

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

Case 1 $b^2 - 4ac > 0$: r_1, r_2 เป็นจำนวนจริง
 $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

Case 2 $b^2 - 4ac = 0$: r เป็นรากซ้ำ
 $y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

Case 3 $b^2 - 4ac < 0$; r_1, r_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน
 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$
 $y(x) = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$

$$G(x) \neq 0$$

$y(x)$ ประกอบไปด้วยคำตอบสองส่วน

① $ay'' + by' + cy = 0 \rightarrow$ คำตอบประกอบ
 complementary solution
 $y_c(x) / y_h(x)$

② ส่วนที่เติม $y_p(x)$ ให้สอดคล้องกับ $G(x)$

$\hookrightarrow$ ส่วนที่เติมจะตรงกับ $ay'' + by' + cy = G(x)$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

⊗ ใน $y_p(x)$ ต้องไม่ซ้ำกับ $y_h(x)$

2.2 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ (Non-homogeneous linear equations)

สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์มีรูปทั่วไปคือ

$$ay'' + by' + cy = G(x) \quad (2.4)$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงที่ และ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เป็นศูนย์ เรียกสมการเอกพันธ์

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.5)$$

ว่าเป็น **สมการเติมเต็ม (complementary equation)** ของสมการ (2.4) ถ้าให้ $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.5) และ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (2.4) แล้วเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} a(y_c + y_p)'' + b(y_c + y_p)' + c(y_c + y_p) &= (ay_c'' + by_c' + cy_c) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 + G(x) \\ &= G(x) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลให้ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นจริง

ทฤษฎีบท 2.2.1. ให้ y_h เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (2.5) และ y_p เป็นคำตอบเฉพาะของสมการ (2.4) แล้วคำตอบทั่วไปของสมการ (2.4) จะอยู่ในรูป

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

การหาคำตอบ y_h ของสมการ (2.5) เราได้ทำการศึกษามาก่อนหน้านี้แล้ว ฉะนั้นในหัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงเฉพาะการหาคำตอบ y_p ของสมการ (2.4) ซึ่งจะใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนี้

1. สมมติคำตอบ y_p ให้สอดคล้องกับ $r(x)$ ดังนี้

เทอมใน $r(x)$	สมมติ y_p
$a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$	$b_nx^n + \dots + b_1x + b_0$
Ae^{kx}	Be^{kx}
$A \cos kx + B \sin kx, A \cos kx, B \sin kx$	$C \cos kx + D \sin kx$
$e^{kx}(a_nx^n + \dots + a_1x + a_0)$	$e^{kx}(b_nx^n + \dots + b_1x + b_0)$
$e^{kx}(A \cos tx + B \sin tx), Ae^{kx} \cos tx, Be^{kx} \sin tx$	$e^{kx}(C \cos tx + D \sin tx)$

ตัวอย่าง 2.2.2. จงสมมติคำตอบ y_p (โดยไม่ต้องคำนวณค่า) ของสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้นต่อไปนี้

(1) $y'' + 3y' + 2y = x^2$ $G(x) = x^2$

$y_p = \dots Ax^2 + Bx + C$

(2) $y'' + 4y = e^{3x}$ $G(x) = e^{3x}$

$y_p = \dots Ae^{3x}$

(3) $y'' + y' - 2y = \sin x$ $G(x) = \sin x$

$y_p = \dots A \sin x + B \cos x$

(4) $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$ $G(x) = xe^x + \cos 2x$

$y_p = \dots (Ax+B)Ce^x + (D \cos 2x + E \sin 2x)$
 $= (A_1x+B_1)e^x + (D \cos 2x + E \sin 2x)$

2. แทนค่า y_p, y'_p และ y''_p ลงในสมการ (2.4) จากนั้นทำการเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหาค่าของค่าคงที่ต่างๆ ใน y_p ที่สมมติขึ้น

ตัวอย่าง 2.2.3. จงแก้สมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้นต่อไปนี้

(1) $y'' + 3y' + 2y = x^2$ $G(x) = x^2$

STEP 1 หาค่า $y_h(x)$: $r^2 + 3r + 2 = 0$
 $(r+1)(r+2) = 0$
 $r = -1, -2$

$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

STEP 2 สมมติ $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$
 $y'_p(x) = 2Ax + B$
 $y''_p(x) = 2A$

$y'' + 3y' + 2y = (2A) + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$
 $2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$
 $2Ax^2 + (6A+2B)x + (2A+3B+2C) = x^2$

เทียบ สปร. $\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A+2B = 0 \\ 2A+3B+2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 2B = -3 \Rightarrow B = -\frac{3}{2} \\ 2C = -2(\frac{1}{2}) - 3(-\frac{3}{2}) \end{cases}$

$2C = -1 + \frac{9}{2} \Rightarrow 2C = \frac{7}{2} \Rightarrow C = \frac{7}{4}$

$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

$$(2) y'' + 4y = e^{3x}$$

STEP 1 $y_h(x): r^2 + 4 = 0$
 $r = \pm 2i$

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

STEP 2 $y_p(x):$ สมมติ $y_p(x) = Ae^{3x}$
 $y_p'(x) = 3Ae^{3x}$
 $y_p''(x) = 9Ae^{3x}$

$$\therefore y'' + 4y = 9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$13Ae^{3x} = e^{3x}$$

แก้สมการ: $13A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{13}$

$$\therefore y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}$$

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{13}e^{3x}$$

$$(3) y'' + y' - 2y = \sin x$$

STEP 1: $r^2 + r - 2 = 0$
 $(r+2)(r-1) = 0$

$$\therefore r = 1, -2$$

$$\therefore y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

STEP 2: $y_p(x)$ สมมติ $y_p(x) = A \sin x + B \cos x$
 $y_p'(x) = A \cos x - B \sin x$
 $y_p''(x) = -A \sin x - B \cos x$

$$y'' + y' - 2y = (-A \sin x - B \cos x) + (A \cos x - B \sin x) - 2(A \sin x + B \cos x) = \sin x$$

$$(-A - B - 2A) \sin x + (-B + A - 2B) \cos x = \sin x$$

$$(-3A - B) \sin x + (A - 3B) \cos x = \sin x$$

แก้สมการ: $\begin{cases} -3A - B = 1 \\ A - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3B \\ -3(3B) - B = 1 \end{cases}$
 $-10B = 1$
 $B = -\frac{1}{10} \Rightarrow A = -\frac{3}{10}$

$$\therefore y_p(x) = -\frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x$$

(4) $y'' + y = \sin x$

STEP 1: $r^2 + 1 = 0$
 $r = \pm i$

$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

STEP 2: สมมติ $y_p(x) = (A \cos x + B \sin x)x$
 $= Ax \cos x + Bx \sin x$

หาค่า $y_p'(x) = (Ax \sin x + A \cos x) + (Bx \cos x + B \sin x)$

$y_p''(x) = -A \cos x - A \sin x - A \sin x - Bx \sin x + B \cos x + B \cos x$

$y_p''(x) + y_p(x) = (-A \cos x - 2A \sin x - Bx \sin x + 2B \cos x) + (Ax \cos x + Bx \sin x) = \sin x$
 $-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x$

$\therefore \begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$y_p(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$

$\therefore y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$ #

เมื่อหาค่า $y_p(x)$ กำหนดตัวคูณ x เข้ามา
 $y_p(x)$ ขว้างไปกับ $y_h(x)$
เราจะได้ x^m ไปดูในเทอมที่ซ้ำของ $y_p(x)$
เมื่อใดก็ตามที่ได้ $y_p(x)$ ไม่ซ้ำกับพจน์ใน $y_h(x)$
เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุด

(5) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

STEP 1: $y_h(x)$: $r^2 - 6r + 9 = 0$
 $(r-3)(r-3) = 0$
 $r = 3$

$y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

STEP 2 $y_p(x)$: สมมติ $y_p(x) = Ax^2 e^{3x}$

$y_p'(x) = 3Ax^2 e^{3x} + 2Ax e^{3x}$

$y_p''(x) = 9Ax^2 e^{3x} + 6Ax e^{3x} + 6Ax e^{3x} + 2A e^{3x}$

$y'' - 6y' + 9y = (9Ax^2 e^{3x} + 12Ax e^{3x} + 2A e^{3x}) - 6(3Ax^2 e^{3x} + 2Ax e^{3x}) + 9(Ax^2 e^{3x}) = e^{3x}$
 $2A e^{3x} = e^{3x}$

หาค่า A : $2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$

$y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$

ตัวอย่าง 2.2.4. จงหาคำตอบ $y_h(x)$ และสมมติคำตอบ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว

(1) $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$

$r^2 + 9r = 0$
 $r(r+9) = 0$
 $r = 0, -9$

$y_c(x) = \dots c_1 + c_2 e^{-9x} \dots$

$y_p(x) = \dots (Ax+B)e^{-x} [C \cos \pi x + D \sin \pi x] \dots$

HW

(2) $y'' - 4y' + 8y = 2x^2 + 1 + \sin x$

$y_c(x) = \dots$

$y_p(x) = \dots$

HW

(3) $2y'' - 5y' + 3y = 2e^{3x} - x + 2$

$y_c(x) = \dots$

$y_p(x) = \dots$

(4) $y'' - y' = 1 - e^x$

$r^2 - r = 0$
 $r(r-1) = 0$
 $r = 0, 1$

$y_c(x) = \dots c_1 + c_2 e^x \dots$

$y_p(x) = \dots Ax + Bxe^x \dots$

(5) $y'' + 12y' + 36y = 3e^{-6x} + 7xe^{-6x} + x$

$y_c(x) = \dots$

$y_p(x) = \dots$

(6) $y'' - 2y' + y = xe^x$

$y_c(x) = \dots$

$y_p(x) = \dots$

แบบฝึกหัดทบทวน เรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองไม่เอกพันธ์

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

สรุปการสมมติ $y_p(x)$ ตามชนิดของ $G(x)$

ฟังก์ชัน $G(x)$		การสมมติ $y_p(x)$
ฟังก์ชัน เดียว	ฟังก์ชันพหุนามดีกรี n $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$
	ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล Ae^{kx}	Be^{kx}
	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ $A \sin mx$ หรือ $A \cos mx$ หรือ $A \sin mx + B \cos mx$	$A_1 \sin mx + B_1 \cos mx$
ผลคูณ ของ ฟังก์ชัน	$P_n(x)e^{kx}$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0)e^{kx}$
	$P_n(x) \sin mx$ หรือ $P_n(x) \cos mx$ หรือ $P_n(x) \sin mx + P_n(x) \cos mx$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0) \sin mx$ $+ (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0) \cos mx$
	$ae^{kx} \sin mx, be^{kx} \cos mx$ หรือ $e^{kx}[a \sin mx + b \cos mx]$	$e^{kx}[A \sin mx + B \cos mx]$

1. จงกำหนด $y_p(x)$ ที่สอดคล้องกับ $G(x)$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- | | |
|---|--|
| (a) $G(x) = 2x^3 - x + 3$ | $y_p(x) = \underline{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}$ |
| (b) $G(x) = 2e^{-x}$ | $y_p(x) = \underline{Ae^{-x}}$ |
| (c) $G(x) = \sin 2x$ | $y_p(x) = \underline{A \sin 2x + B \cos 2x}$ |
| (d) $G(x) = 5 \cos 4x$ | $y_p(x) = \underline{A \sin 4x + B \cos 4x}$ |
| (e) $G(x) = \sin 2x + \cos 2x$ | $y_p(x) = \underline{A \sin 2x + B \cos 2x}$ |
| (f) $G(x) = \underline{\sin 2x} + \underline{\cos 3x}$ | $y_p(x) = \underline{A \sin 2x + B \cos 2x + C \sin 3x + D \cos 3x}$ |
| (g) $G(x) = x \sin 2x$ | $y_p(x) = \underline{(Ax+B)[C \sin 2x + D \cos 2x]}$
<small>or $(Ax+B) \sin 2x + (Cx+D) \cos 2x$</small> |
| (h) $G(x) = x^2 e^{-x}$ | $y_p(x) = \underline{(Ax^2+Bx+C)(e^{-x})}$ |
| (i) $G(x) = \underline{3e^x} + \underline{ex^2} + 1$ | $y_p(x) = \underline{Ae^x + [Bx^2 + Cx + D]}$ |
| (j) $G(x) = (2e^{3x} + 3) \sin x + xe^{-x}$
$\underline{G(x) = 2e^{3x} \sin x + 3 \sin x + xe^{-x}}$ | $y_p(x) = \underline{e^{3x}[A \sin x + B \cos x]} + \underline{[C \sin x + D \cos x] + (Ex+F)e^{-x}}$ |

2. จงหา $y_c(x)$ และสมมติ $y_p(x)$ โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (ไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว)

(a) $16y'' - 8y' + y = xe^{x/4} + e^{4x}$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(b) $y'' + 8y = 7 \cos 2\sqrt{2}x$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(c) $y'' - 2y' - 9y = x \sin 10x + 2\pi$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(d) $y'' + 3y' = x + 1 + 2 \sin x$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(e) $y'' + 4y = x \sin 2x + e^{2x} \cos 2x + 5$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(f) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + xe^{-x} + e^{-2x} \cos x$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(g) $y'' + 2y' = xe^{2x} - 10$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(h) $y'' - 12y' + 16y = \frac{3}{2}e^{6x} - e^{-6x}$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(i) $y'' - 8y' + 17y = x \sin x - 6e^{4x}$

$$y_c(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$y_p(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

(j) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin 3x$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

(k) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + 5$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

(l) $y'' + y = x \sin x$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

(m) $y'' - 2y' - 3y = 7e^{3x} + x^2$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

(n) $y'' - 2y' - 3y = 6e^{-3x} + 7e^{4x} + 5x$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

(o) $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x} + \sin 7x$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

(p) $y'' - 2y' + 5y = 8e^x \sin 2x$

$y_c(x) =$ _____

$y_p(x) =$ _____

3. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $y'' + y = 10xe^x$