

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

- ឱ្យអនុវត្តការបំប្លែង
- Fourier Series / Fourier Transform

អនុវត្តការបំប្លែងអនុវត្តការបំប្លែង

Laplace's Transform

ឱ្យ $f(t)$ ដែលជាអនុគមន៍ពេលវេលា $t \geq 0$

អនុវត្តការបំប្លែង

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \underline{f(t)} e^{-st} dt$$

$f(t)$
space of t

$F(s)$
space of s

$$F(s) \text{ ត្រូវបានកំណត់ដោយអនុវត្តការបំប្លែង } F(s) = \mathcal{L}\{f\}$$

$$f(t) \text{ ត្រូវបានកំណត់ដោយអនុវត្តការបំប្លែងច្រក } F(s) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

2.3 การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นโดยการแปลงลาปลาซ (Solving of initial - valued problems by using Laplace's transform)

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ในช่วง $t \geq 0$ ผลการแปลงลาปลาซ ของ $f(t)$ คือฟังก์ชัน $F = \mathcal{L}(f)$ ที่นิยามโดย

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

เรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่า ผลการแปลงอินเวอร์ส ของ $F(s)$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ นั่นคือ

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

ตัวอย่าง 2.3.1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(t) = 3$

$$F(s) = \mathcal{L}(3)$$

$$= \int_0^{\infty} 3e^{-st} dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m 3e^{-st} dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{3}{s} e^{-st} \right]_0^m$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{3}{s} e^{-ms} + \frac{3}{s} \right]$$

$$= \frac{3}{s}$$

หรือใช้สูตร: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

ให้ $u = -st$; $du = -s dt$

$$\therefore 3 \int e^{-st} dt = -\frac{3}{s} \int e^u du = -\frac{3}{s} e^{-st} + C$$

(2) $f(t) = e^{2t}$

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{2t})$$

$$= \int_0^{\infty} e^{2t} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(2-s)t} dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m e^{(2-s)t} dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} \right]_0^m$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2-s} e^{(2-s)m} - \frac{1}{2-s} \right]$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2-s} e^{-(s-2)m} - \frac{1}{2-s} \right] \quad (s > 2)$$

$$= \frac{1}{s-2} \quad (s > 2)$$

จากตัวอย่าง 2.3.1 เราสามารถใช้นิยามการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆ และสรุปผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันได้ดังตารางต่อไปนี้

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
$\rightarrow k$	$\frac{k}{s}$ (Ex 2.3.1 (1))
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ (Ex 2.3.1 (2))
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$

ตารางที่ 2.1: ตารางแสดงผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน

สมบัติเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซและการแปลงอินเวอร์ส

กำหนดให้ $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ และ a, b เป็นค่าคงที่ใดๆ แล้ว

$$(1) \mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)) = aF(s) + bG(s)$$

$$(2) \mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = af(t) + bg(t)$$

ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของ $f(t)$

สมมติว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนทุกช่วงจำกัดของ $t \geq 0$ แล้ว

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

และ

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s \mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

ตัวอย่าง 2.3.2. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (1) \mathcal{L}(4t^2 - 2t + 3) &= 4\mathcal{L}(t^2) - 2\mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(3) \\ &= 4 \cdot \frac{2!}{s^{2+1}} - 2 \cdot \frac{1}{s^{1+1}} + \frac{3}{s} \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \mathcal{L}(5e^{-3t} + 4t^2 - 3\sin 5t) &= 5\mathcal{L}(e^{-3t}) + 4\mathcal{L}(t^2) - 3\mathcal{L}(\sin 5t) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{s - (-3)} + 4 \cdot \frac{2!}{s^{2+1}} - 3 \cdot \frac{5}{s^2 + 5^2} \\ &= \frac{5}{s+3} + \frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2 + 25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \mathcal{L}((1 + e^{3t})^2) &= \mathcal{L}(1 + 2e^{3t} + (e^{3t})^2) \\ &= \mathcal{L}(1 + 2e^{3t} + e^{6t}) \\ &= \mathcal{L}(1) + 2\mathcal{L}(e^{3t}) + \mathcal{L}(e^{6t}) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s-6} \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \mathcal{L}(\cos^2 t) &= \mathcal{L}\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos 2t) \\ &= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad \# \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} (5) \mathcal{L}(\sin(\omega t + \phi)) &= \mathcal{L}(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) \\ &= \cos \phi \mathcal{L}(\sin \omega t) + \sin \phi \mathcal{L}(\cos \omega t) \\ &= \cos \phi \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \phi \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega \cos \phi + s \sin \phi}{s^2 + \omega^2} \quad \# \end{aligned}$$

บทที่ 2. สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองและการแปลงลาปลาซ

หา $f(t)$ ที่ส่ง $\mathcal{L}(f(t))$ ใด $F(s)$

ตัวอย่าง 2.3.3. จงหาผลการแปลงอินเวอร์สเมื่อกำหนด $F(s)$ ดังต่อไปนี้

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \\ \text{Then } \mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

$$(1) F(s) = \frac{3s+1}{s^2+5} = \frac{3s}{s^2+5} + \frac{1}{s^2+5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(s)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{s^2+5} + \frac{1}{s^2+5}\right) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5}\right) \\ &= 3\cos \sqrt{5}t + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin \sqrt{5}t \quad \# \end{aligned}$$

$$(2) F(s) = \frac{9s+7}{2s(s+1)}$$

$$\frac{9s+7}{2s(s+1)} = \frac{A}{2s} + \frac{B}{s+1}$$

$$9s+7 = A(s+1) + B(2s)$$

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } s = -1 \text{ จะได้ } 9(-1)+7 &= B(-2) \\ -2 &= -2B \\ B &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ถ้า } s = 0 \text{ จะได้ } 7 = A$$

$$(3) F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+5)}$$

$$\frac{s+3}{(s-1)(s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5}$$

$$s+3 = A(s+5) + B(s-1)$$

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } s = -5 \text{ จะได้ } -2 &= B(-6) \\ \therefore B &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } s = 1 \text{ จะได้ } 4 &= 6A \\ \therefore A &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore F(s) = \frac{7}{2s} + \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(s)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7}{2s} + \frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{7}{2} + e^{-t} \quad \# \end{aligned}$$

$$\therefore F(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(s)) &= \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) \\ &= \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-5t} \quad \# \end{aligned}$$

(HW)

$$(4) F(s) = \frac{s+1}{(2s-1)(s+2)}$$

$$[f(t) = \frac{3}{10}e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{5}e^{-2t}]$$

$$(5) F(s) = \frac{s^2 + s + 5}{s^2(s-1)(s+1)}$$

$$\frac{s^2 + s + 5}{s^2(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$$

$$s^2 + s + 5 = A(s \cdot (s-1)(s+1)) + B(s-1)(s+1) + C \cdot s^2(s+1) + D \cdot s^2(s-1)$$

$$s^2 + s + 5 = A(s^3 - s) + B(s^2 - 1) + C(s^3 + s^2) + D(s^3 - s^2)$$

$$s^2 + s + 5 = (A+C+D)s^3 + (B+C-D)s^2 + (-A)s + (-B)$$

เทียบผล:
$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ B + C - D = 1 \\ -A = 1 \\ -B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -5 \\ C + D = 1 \\ C - D = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C = 6 \\ \therefore C = 3 \\ \Rightarrow D = -2 \end{cases}$$

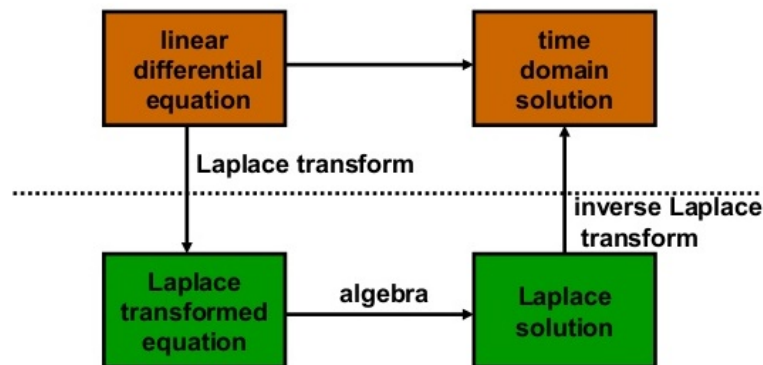
การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ

เราสามารถนำการแปลงลาปลาซไปช่วยหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ t ที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตของฟังก์ชันของ s โดยใช้การแปลงลาปลาซ เรียกสมการที่ได้ว่า **สมการเสริม**
2. แก้สมการเสริมเพื่อหาฟังก์ชันของ s
3. หาผลการแปลงลาปลาซอินเวอร์สของฟังก์ชันของ s ที่หาได้ในข้อ 2. เพื่อจะได้คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ t

หรือเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

time domain



รูปที่ 2.1: หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยการแปลงลาปลาซ [2]

จากนี้เป็นต้นไป เราจะกำหนดสัญลักษณ์ให้ $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$