Recall: $ay'' + by' + cy = r(x)$

case $r(x) = 0$; $ay'' + by' + cy = 0$

$$\Downarrow$$

สมการช่วย $ar^2 + br + c = 0$

ให้ r_1, r_2 เป็นคำตอบ.

$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$

$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ $\quad r = \alpha \pm i\beta$ $\quad y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

case $r(x) \neq 0$ $\quad y = y_c + y_p$ ← คำตอบเฉพาะ:

$\Uparrow$

$ay_c'' + by_c' + cy_c = 0$

* วิธีเดา สมมติ y_p

ต้องสังเกตว่าไม่ซ้ำกับ y_c

* คูณ x^m เพื่อ จะไม่มีปัญหา *

* การใช้ Laplace transformation ในการหา คำตอบ สมการเชิงอนุพันธ์.

$$\boxed{ay''+by'+cy = r(t)}$$

STEP 1 Take Laplace $\Downarrow$

สมการที่ขึ้นกับตัวแปร s

$$\boxed{\mathcal{L}\{ay''+by'+cy\}} = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

* $\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)$

STEP 2 สมการที่ไม่ทราบ $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$

STEP 3 Take $\mathcal{L}^{-1}$

Ex 2.3.4 $\quad y'(t) + 4y(t) = e^t \; ; \quad y(0) = 2 \qquad t$

$\mathcal{L}$

STEP 1 Take Laplace

สมการที่เป็น s

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 4y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-1} \quad ; \; \mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s+4)Y(s) = 2 + \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{2s-2+1}{s-1}$$

$$= \frac{2s-1}{s-1}$$

STEP 2

$$Y(s) = \frac{2s-1}{(s-1)(s+4)}$$

$\parallel$

$\mathcal{L}\{y(t)\}$

STEP 3 Take $\mathcal{L}^{-1}$

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y(t)\}\}}_{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s-1)(s+4)}\right\}$$

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s-1)(s+4)}\right\}}_{}\ **$$

* จัดรูปให้สามารถหา $\mathcal{L}^{-1}$ ได้ * ; $\frac{1}{s-a}$

การแยกเศษส่วนย่อย:

$$\frac{2s-1}{(s-1)\cancel{(s+4)}} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+4)}$$

$$= \frac{A(s+4) + B(s-1)}{\cancel{(s-1)(s+4)}}$$

$$2s-1 = A(s+4) + B(s-1)$$

* วิธี 1 เทียบสปส.

$$2s-1 = As + 4A + Bs - B$$

$$= (A+B)s + 4A - B$$

$A+B = 2$ และ $4A - B = -1$ $\left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{9}{5} \end{array}\right.$

* วิธีที่ 2 แทนค่า s

$$2s-1 = A(s+4) + B(s-1)$$

แทน $s=1$; $1 = 5A$ $\therefore A = \frac{1}{5}$

แทน $s=-4$; $-9 = -5B$ $\therefore B = \frac{9}{5}$

* $A = \underline{1/5}$, $B = \underline{9/5}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+4}\right\}$$

$$= A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$= Ae^{t} + Be^{-4t} \quad \#$$

$$= \frac{1}{5}e^{t} + \frac{9}{5}e^{-4t}$$

2. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t+1$, $\quad y(0)=1$; $y'(0)=0$

STEP 1: Take Laplace

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t+1\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - \boxed{sy(0) - y'(0)}$$ ค่าเริ่มต้น

$$= s^2\mathcal{L}\{y\} - s$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$$

$$= s\mathcal{L}\{y\} - 1$$; $\boxed{\text{ให้ } \mathcal{L}\{y\} = Y(s)}$

จะได้ $$s^2Y(s) - s + 3\left(sY(s) - 1\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

STEP 2 จัดรูปหา $Y(s)$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + s + 3$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1 + s + s^3 + 3s^2}{s^2}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 1}{s^2(s^2 + 3s + 2)}}$$

แทน $s = -1$; $-1+3-1+1 = C$ $\quad \therefore C = 2$

$s = 0$; $1 = 2B$ $\quad \therefore B = 1/2$

$s = -2$; $-8+12-2+1 = -4D$ $\quad \therefore D = -\frac{3}{4}$

หา A ; แทนอะไรก็ได้ที่ สปร หน้า $A \neq 0$

$$s = 1 \; ; \; \cancel{6} = 6A + 6B + 3C + 2D$$

$$= 6A + 3 + 6 - 3/2$$

$$6A = -3/2 \quad \therefore A = -1/4$$

" แทนค่ากลับเพื่อหา $\mathcal{L}^{-1}$ ต่อ : "

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{-3/4}{s+2} \right\}$$

$$= \underbrace{\boxed{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t}}_{y_p} + \underbrace{\boxed{2e^{-t} + -\frac{3}{4}e^{-2t}}}_{y_c} \quad \#$$

STEP 3 Take $\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^3+3s^2+s+1}{s^2(s^2+3s+2)} \right\}$$

* แยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{s^3+3s^2+s+1}{\cancel{s^2(s^2+3s+2)}} = \frac{s^3+3s^2+s+1}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$= \frac{As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s+1)}{\cancel{s^2(s+1)(s+2)}}$$

จะได้

$$s^3+3s^2+s+1 = As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s+1)$$

3. $y''(t)+4y(t) = 4t+8;\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-1$

STEP 1 Take $\mathcal{L}$

$\Rightarrow$ STEP 2 $\boxed{\text{หา } Y(s)}$

STEP 3 Take $\mathcal{L}^{-1}$ เพื่อหา $y(t)$

$$\underset{\mathcal{L}\{y''\}}{\boxed{s^2Y(s)-4s+1}} + 4\underset{\mathcal{L}\{y\}}{Y(s)} = \mathcal{L}\{4t+8\}$$

$$= \frac{4}{s^2}+\frac{8}{s}$$

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{4}{s^2}+\frac{8}{s}+4s-1$$

$$= \frac{4+8s+4s^3-s^2}{s^2}$$

$$\therefore\quad Y(s) = \frac{4s^3-s^2+8s+4}{s^2(s^2+4)}$$

Take $\mathcal{L}^{-1}$;

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^3 - s^2 + 8s + 4}{s^2(s^2+4)}\right\}$$

$$\frac{4s^3 - s^2 + 8s + 4}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2+4}$$

แก้หา , A, B, C, D จะได้ $A = 2,\ B = 1,\ C = 2,\ D = -2$

$$\therefore\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2s-2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= 2 + t + 2\cos(2t) - \sin(2t)$$

#