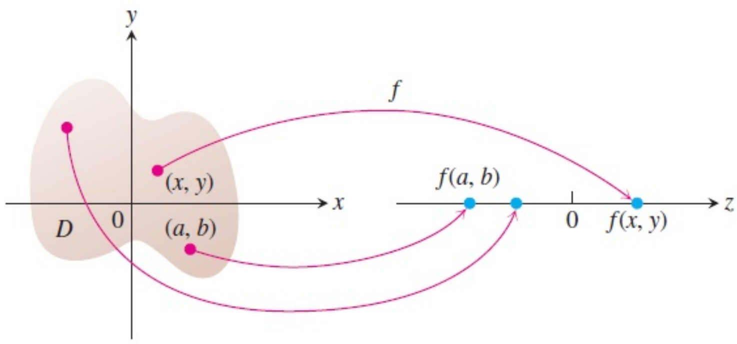
บทที่ 3

ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย (Functions of several variables and partial derivatives)

3.1 ฟังก์ชันสองตัวแปรและความหมายทางเรขาคณิต (Functions of two variables and geometric interpretation)

ฟังก์ชันสองตัวแปร คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นคู่ลำดับ (x, y) ใน $\mathbb{R}^2$ มักเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $z = f(x, y)$



รูปที่ 3.1: ฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ส่งคู่ลำดับ(x, y) ใน $\mathbb{R}^2$ ไปเป็นค่าจริง $f(x, y)$

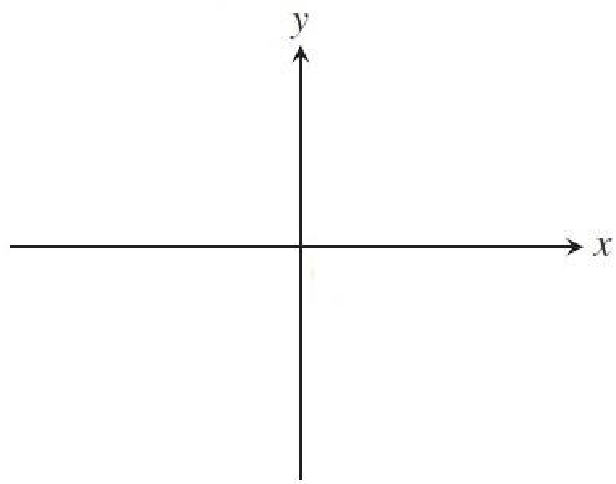
ตัวอย่าง 3.1.1. กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ จงหาค่าของ $f(3, 2)$ และ $f(-1, 1)$

การพิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ คือการพิจารณาคู่ลำดับ (x,y) ที่ทำให้ f หาค่าได้

ตัวอย่าง 3.1.2. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของโดเมนที่หาได้ โดยใช้เส้นทึบสำหรับขอบเขตที่รวมอยู่ในโดเมน และใช้เส้นประ สำหรับส่วนที่ไม่รวมในโดเมน

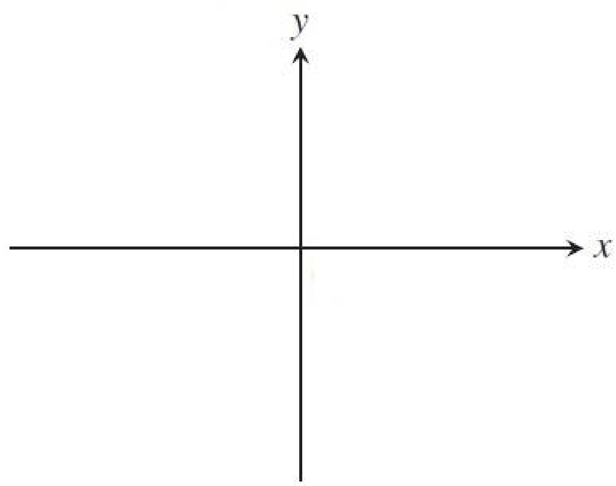
(1) $f(x,y) = \dfrac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$

$D_f = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$



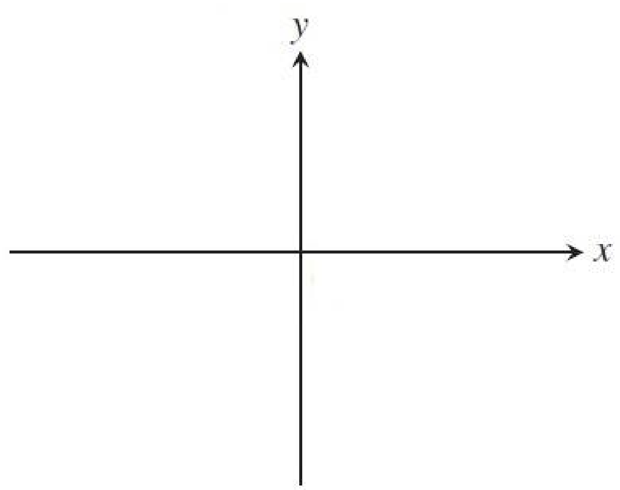
(2) $g(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

$D_g = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

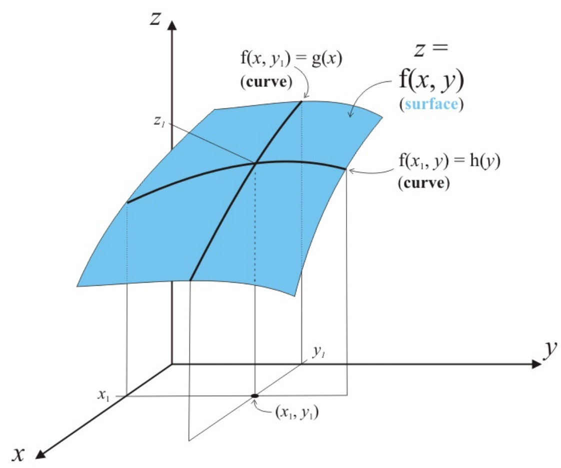


(3) $h(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$

$D_h = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



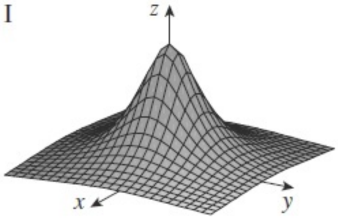
กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปรมักจะมีลักษณะเป็นพื้นผิวโค้งใน 3 มิติ ดังรูป



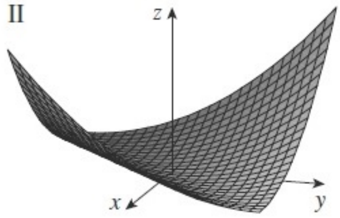
รูปที่ 3.2: กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร

ตัวอย่าง 3.1.3. จงจับคู่กราฟของฟังก์ชันในข้อ A-F กับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

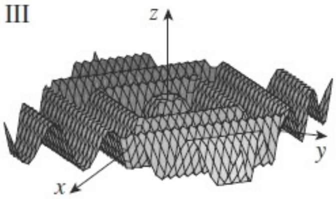
I



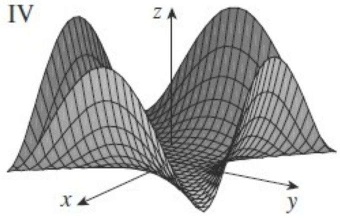
II



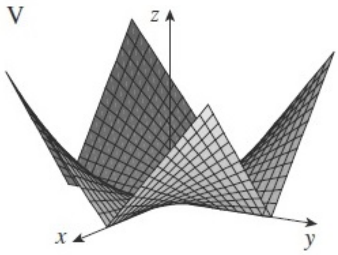
III



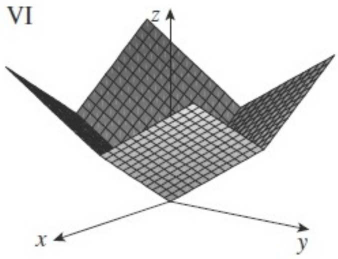
IV



V



VI



สมการ	กราฟ
$f(x,y) = \|x\| + \|y\|$	....
$f(x,y) = \|xy\|$	....
$f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$	....
$f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$	....
$f(x,y) = (x-y)^2$	....
$f(x,y) = \sin(\|x\| + \|y\|)$	....

■

ฟังก์ชันของหลายตัวแปร (Function of several variables)

ฟังก์ชันของ n ตัวแปร คือฟังก์ชันที่มี n อันดับ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$ เป็นโดเมน เช่น $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร มีค่า

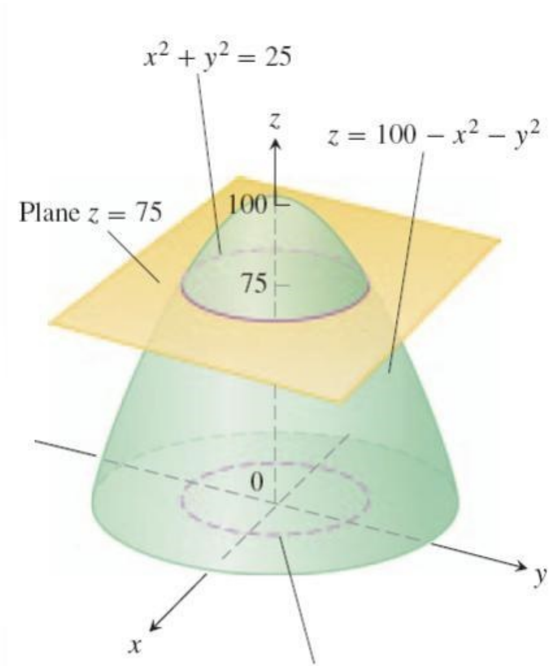
$f(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) =$ . . . . และมีโดเมนคือ

$D_f =$ . . . .

โค้งระดับ (Level curves)

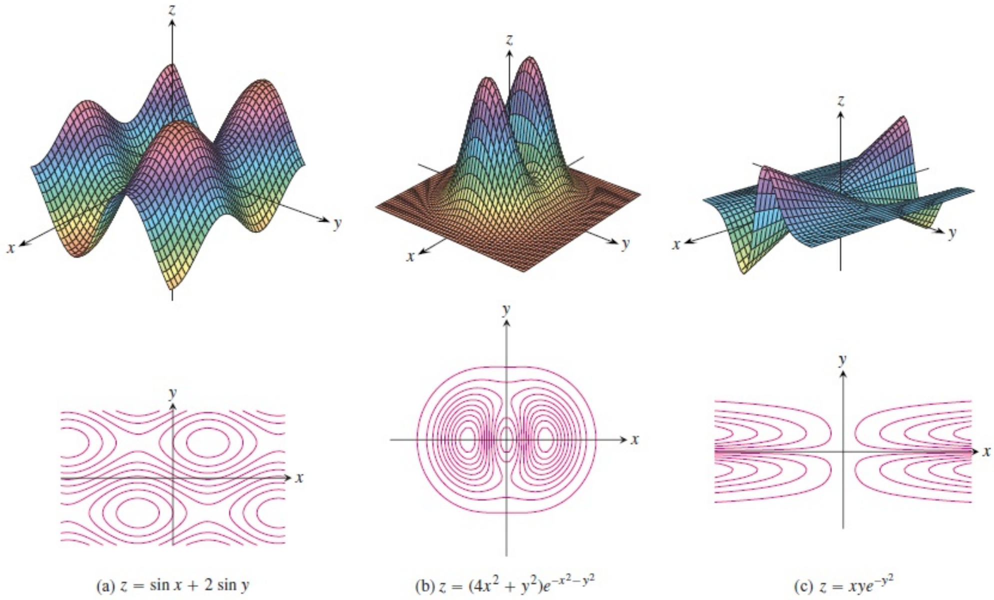
โค้งระดับของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร $f(x,y)$ คือการนำแผ่นระนาบ $z = k$ มาตัดผ่านพื้นผิวโค้งของกราฟแล้วโพรเจคชันเส้นที่เป็นรอยตัดระหว่างพื้นผิวโค้งกับแผ่นระนาบลงบนพื้นราบ หรือ กล่าวได้ว่า โค้งระดับของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร $f(x,y)$ คือเส้นโค้ง $f(x,y) = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

เช่น รูป 3.3 แสดงโค้งระดับของฟังก์ชัน $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ ที่ค่า $k = 75$



รูปที่ 3.3: โค้งระดับ $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$

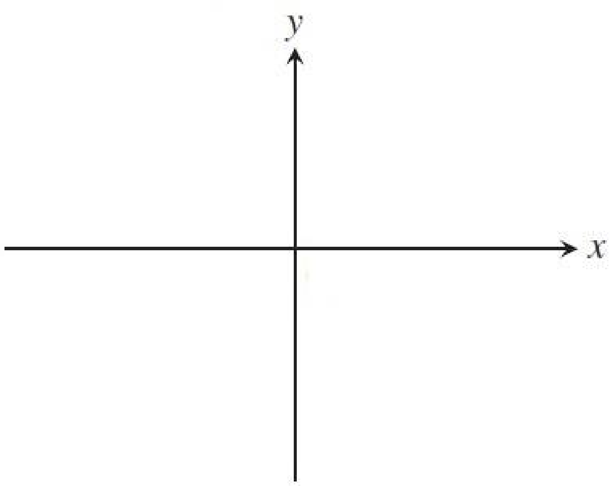
รูป 3.4 แสดงโค้งระดับของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ที่ค่า k ต่างๆ กัน



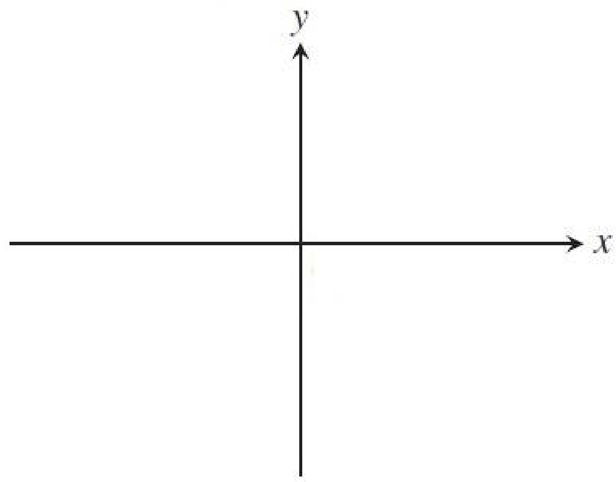
รูปที่ 3.4: กราฟของฟังก์ชันและโค้งระดับของฟังก์ชันนั้นๆ

ตัวอย่าง 3.1.4. จงเขียนกราฟของโค้งระดับฟังก์ชันต่อไปนี้ ที่ค่า k ที่กำหนดให้

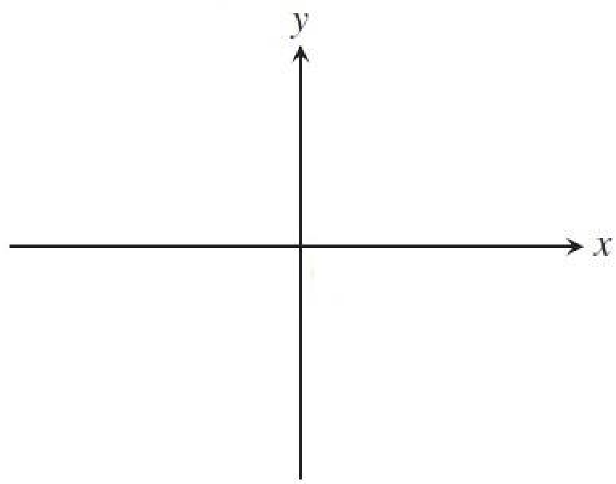
(1) $f(x, y) = y - \ln x; k = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$



(2) $f(x,y) = e^{y/x}; k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

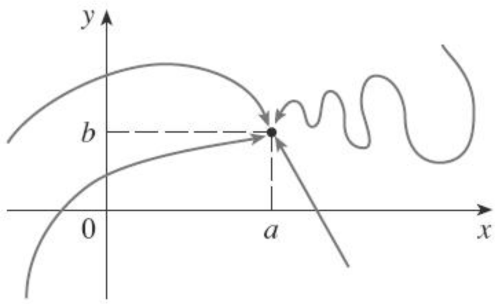


(3) $f(x,y) = y^2 - x^2; k = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$



3.2 ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limits and continuity)

ให้ (a, b) เป็นจุดบนระนาบ xy การเข้าใกล้จุด (a, b) นั้นสามารถทำได้หลายทิศทางตามเส้นโค้งต่างๆ ดังรูปต่อไปนี้



ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบในระนาบ xy ที่มีสมการพาราเมตริก

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

และ (a, b) เป็นจุดบน C โดยที่ $(a, b) = (x(t_0), y(t_0))$ สมมติ $z = f(x, y)$ เป็นสมการของฟังก์ชันสองตัวแปร เราจะเขียนแทน ลิมิตของ $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) เข้าใกล้จุด (a, b) ตามเส้น C ด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ และนิยามโดย

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$$

ตัวอย่าง 3.2.1. กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ตามเส้น $y = mx$

ทฤษฎีบท 3.2.2. สมมติให้ $f(x,y) \to L_1$ เมื่อ $(x,y) \to (a,b)$ ตามเส้นโค้ง C_1 และ $f(x,y) \to L_2$ เมื่อ $(x,y) \to (a,b)$ ตามเส้นโค้ง C_2 ถ้า $L_1 \neq L_2$ แล้ว $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 3.2.3. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 3.2.4. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

บทนิยาม 3.2.5. เราจะกล่าวว่าฟังก์ชันของสองตัวแปร $f(x,y)$ *ต่อเนื่อง* ที่จุด (a,b) ถ้า

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

และจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดบนโดเมนของ f

หมายเหตุ ถ้า $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (a,b) แล้ว ผลบวก, ผลต่าง, ผลคูณ, และผลหารของ f และ g จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (a,b) ด้วย นั่นคือ $(f \pm g)(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y), (fg)(x,y) = f(x,y)\cdot g(x,y)$ และ $\dfrac{f}{g}(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}, g(a,b) \neq 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (a,b)

ทฤษฎีบท 3.2.6. สมมติให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (a,b) และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(a,b)$ แล้ว $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y))$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (a,b) ด้วย โดยที่

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = g(f(a,b))$$

ตัวอย่าง 3.2.7. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} =$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} =$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1} =$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} =$

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) =$

3.3 อนุพันธ์ย่อยและความหมายทางเรขาคณิต (Partial derivatives and geometric interpretation)

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x และ y **อนุพันธ์ย่อยของ** f **เทียบกับ** x **ที่จุด** (x, y) ใดๆ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f_x หรือ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ กำหนดโดย

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

ในทำนองเดียวกัน **อนุพันธ์ย่อยของ** f **เทียบกับ** y **ที่จุด** (x, y) ใดๆ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f_y หรือ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ กำหนดโดย

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

ข้อสังเกต

1. จากนิยามของอนุพันธ์ย่อยจะได้ว่า f_x สามารถหาได้โดยมองให้ y เป็นตัวคงค่า แล้วหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร x เพียงอย่างเดียว และในทำนองเดียวกัน f_y สามารถหาได้โดยมองให้ x เป็นตัวคงค่า แล้วหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร y เพียงอย่างเดียว
2. สัญลักษณ์อื่นๆ ที่มักใช้แทน f_x และ f_y คือ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ตามลำดับ
3. สัญลักษณ์ $f_x(a,b)$ และ $f_y(a,b)$ หรือสัญลักษณ์ $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}$ หมายถึง การแทนค่าอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y ด้วย $x = a$ และ $y = b$

ตัวอย่าง 3.3.1. กำหนดให้ $f(x,y) = x^4y^2 - 2xy^5$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(1,2)}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ . . . .

$\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ . . . .

$\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(1,2)} =$ . . . .

ต่อไปเราจะกล่าวถึงฟังก์ชันที่มีมากกว่าสองตัวแปร การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปรสามารถทำได้เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันสองตัวแปร เช่นถ้าให้ $w = f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปรจะได้ว่า f มีอนุพันธ์ย่อย 3 จำนวนคือ

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$

และ

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

ตัวอย่าง 3.3.2. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $z = x^y$

   $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ . . . .

   $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ . . . .

2. $z = \dfrac{2y}{y + \cos x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ . . . .

$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ . . . .

3. $f(x, y, z) = z\tan(xy)$

$f_x =$ . . . .

$f_y =$ . . . .

$f_z =$ . . . .

4. $w = \dfrac{x}{y + z} + \arcsin(xyz)$

$\dfrac{\partial w}{\partial x} =$ . . . .

$\dfrac{\partial w}{\partial y} =$ . . . .

$\dfrac{\partial w}{\partial z} =$ . . . .

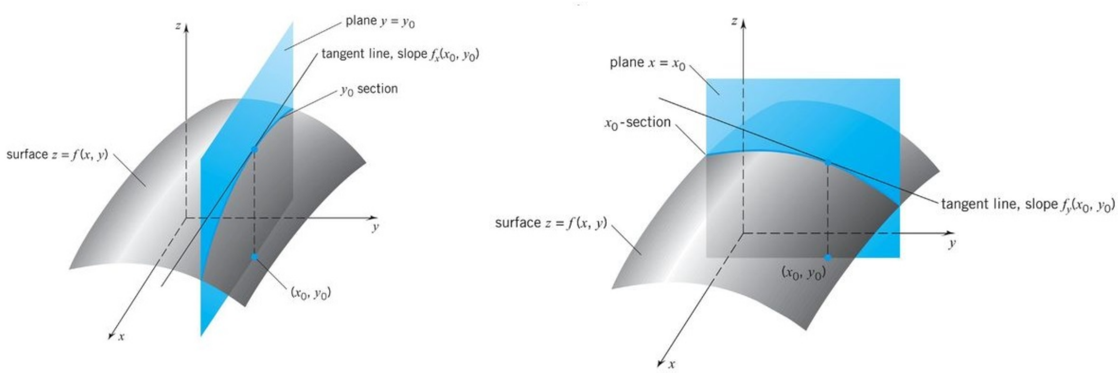
ตัวอย่าง 3.3.3. กำหนดให้ $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ จงหาค่าของ

$f_x(-6, 4) =$ . . . .

$f_y(-6, 4) =$ . . . .

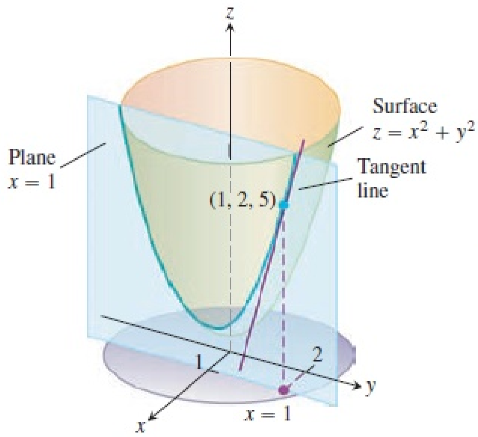
ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อย

จากนิยามของ f_x และ f_y พบว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (a, b) คือ ความชันที่จุด $x = a$ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการนำระนาบ $y = b$ มาตัดกับพื้นผิว $z = f(x, y)$ และในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (a, b) คือ ความชันที่จุด $y = b$ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการนำระนาบ $x = a$ มาตัดกับพื้นผิว $z = f(x, y)$ ดังรูป



รูปที่ 3.5: ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

ตัวอย่าง 3.3.4. จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟพาราโบลาที่เกิดจากการนำระนาบ $x = 1$ ไปตัดกับพื้นผิวพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ ที่จุด $(1, 2, 5)$



3.4 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง (Partial Derivatives of higher order)

ฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองได้ 4 จำนวน คือ

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} == \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y =} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ข้อสังเกต เรียกอนุพันธ์ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ว่า **อนุพันธ์ผสม** และพบว่า

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสาม เราจะได้ว่า $z = f(x, y)$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสามได้ .... จำนวน คือ

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \qquad f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

$f_{xxy} =$ .... $f_{xyy} =$ ....

$f_{xyx} =$ .... $f_{yyx} =$ ....

$f_{yxx} =$ .... $f_{yxy} =$ ....

ตัวอย่าง 3.4.1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x, y) = \ln(3x + 5y)$

   $f_{xx} =$ .... $f_{yy} =$ ....

   $f_{xy} =$ .... $f_{yx} =$ ....

2. $z = \sqrt{x + y^2}$

   $z_{xx} =$ .... $z_{yy} =$ ....

   $z_{xy} =$ .... $z_{yx} =$ ....

ตัวอย่าง 3.4.2. กำหนดให้ $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$ จงหาอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้

$f_x =$ .... $f_{xx} =$ ....

$f_{xxy} =$ .... $f_{xxyz} =$ ....

3.5 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันโดยปริยาย (Partial derivatives of composite and implicit functions)

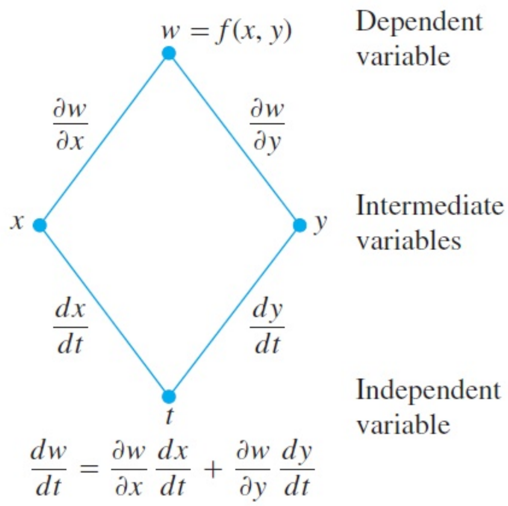
อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันประกอบ

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันประกอบก่อน ซึ่งก็คือการศึกษากฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรนั่นเอง เนื่องจากฟังก์ชันหลายตัวแปรมีอนุพันธ์ได้หลายแบบ กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรจึงมีได้หลายแบบเช่นกัน ในที่นี้เราจะพิจารณากฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร โดยแบ่งการพิจารณาเป็นกรณีต่างๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $w = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x และ y โดยที่ $x = g(t)$ และ $y = h(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ t จะได้ว่า

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

สามารถนำไปเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้

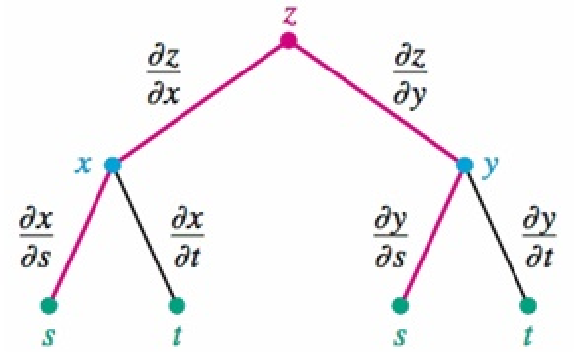


ตัวอย่าง 3.5.1. กำหนดให้ $w = \sin x \cos y$ โดยที่ $x = \sin t$ และ $y = \cos t$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

กรณีที่ 2 ให้ $w = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x และ y โดยที่ $x = g(s, t)$ และ $y = h(s, t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ s และ t จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

สามารถนำไปเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้

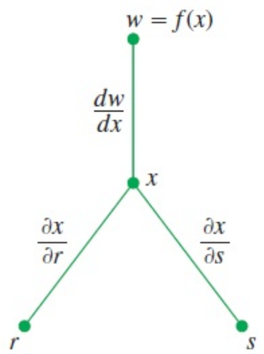


ตัวอย่าง 3.5.2. กำหนดให้ $z = \arctan(2x + y)$ โดยที่ $x = s^2 t$ และ $y = s \ln t$ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

ตัวอย่าง 3.5.3. จงเขียนกฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชัน $w = f(x, y, z, t)$ โดยที่ $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = (u, v)$ และ $t = t(u, v)$

ตัวอย่าง 3.5.4. กำหนดให้ $M = xe^{y-z^2}$ โดยที่ $x = 2uv$ และ $y = u - v$ และ $z = u + v$ จงหา $\dfrac{\partial M}{\partial u}$ เมื่อ $u = 3, v = -1$

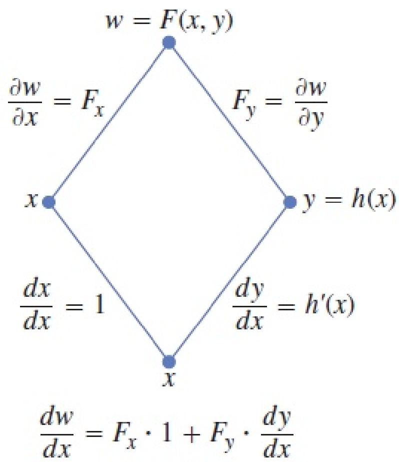
ตัวอย่าง 3.5.5. จงเขียนกฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชัน $w = f(x)$ โดยที่ $x = g(r, s)$



อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยปริยาย

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ สร้างฟังก์ชัน F โดยกำหนดให้ $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$ จะเห็นว่าฟังก์ชัน $F(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และยังเป็นฟังก์ชันโดยปริยายอีกด้วย โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_y}$$



ตัวอย่าง 3.5.6. กำหนดให้ $\cos(x-y) = xe^y$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ สร้างฟังก์ชัน F โดยกำหนดให้ $F(x,y,z) = F(x,y,f(x)) = 0$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{F_y}{F_z}$$

ตัวอย่าง 3.5.7. จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ของฟังก์ชันโดยปริยายที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $x - z = \arctan(yz)$

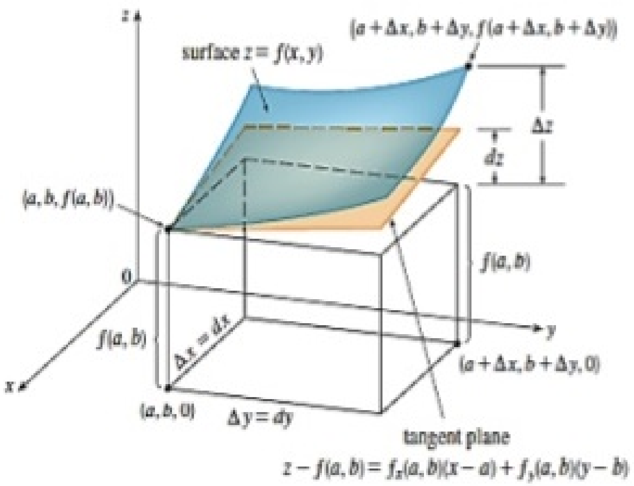
(2) $xyz = \cos(x+y+z)$

3.6 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมและการประยุกต์ (Total differentials and applications)

ให้ $z = f(x, y)$ ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของ z เขียนแทนด้วย dz, นิยามโดย

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

เมื่อ dx, dy คือ ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของ x และ y ตามลำดับ

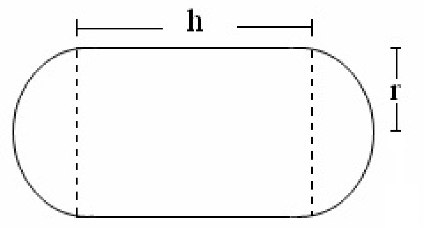


รูปที่ 3.6: ความหมายทางเรขาคณิตของผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม dz

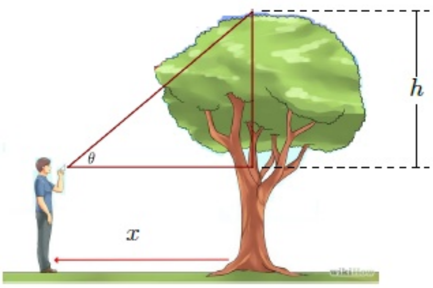
คล้ายกับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร รูป 3.6 แสดงให้เห็นว่า dz คือการเปลี่ยนแปลงความสูงของระนาบสัมผัส เมื่อจุด (x, y) เปลี่ยนจาก (a, b) ไปเป็น $(a + \triangle x, b + \triangle y)$ ในขณะที่ $\triangle z$ คือการเปลี่ยนแปลงความสูงของพื้นผิว $z = f(x, y)$

ตัวอย่าง 3.6.1. กำหนดให้ $z = f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$ จงเปรียบเทียบค่าของ dz และ $\triangle z$ เมื่อ (x, y) เปลี่ยนจาก (3,-1) เป็น (2.96,-0.95)

ตัวอย่าง 3.6.2. พิจารณาแคปซูลซึ่งประกอบด้วยทรงกระบอกและครึ่งทรงกลมดังรูป ถ้าให้ r และ h คือรัศมีและความยาวของแคปซูล และให้ A แทนพื้นที่ผิวของแคปซูล จะได้ว่า $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$ ถ้าวัดความยาวของแคปซูลได้ 1 ซม. และวัดรัศมีของแคปซูลได้ 0.5 ซม. โดยต่างก็มีค่าผิดพลาดในการวัดไม่เกิน 0.01 ซม. จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมเพื่อประมาณค่าผิดพลาดในการวัดค่า A ที่เป็นไปได้มากที่สุด



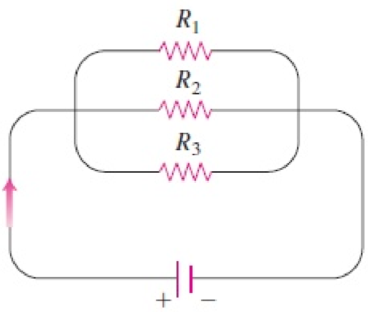
ตัวอย่าง 3.6.3. คุณหน้ากากทุเรียนจะทำการประมาณค่าความสูงของต้นทุเรียนหมอนทอง โดยให้ x เป็นระยะที่ยืนห่างจาก ต้นทุเรียน และ h เป็นความสูงของต้นทุเรียนหมอนทองวัดจากระดับสายตาของคุณหน้ากากทุเรียนจนถึงยอด (ดังรูป) ในขณะที่วัดมุมเงยที่คุณหน้ากากทุเรียนมองเห็นยอดได้ $45°$ สามารถวัดระยะที่ยืนห่างจากต้นทุเรียน หมอนทองได้เป็นระยะ 10 เมตร สมมติว่าค่าผิดพลาดจากการวัดมุมเงยเป็น $1°$ และค่าผิดพลาดจากการวัด ระยะทางเป็น 0.2 เมตร จงประมาณค่าความผิดพลาดของค่าความสูงของต้นไม้จากระดับสายตา h



ตัวอย่าง 3.6.4. ตัวต้านทานรวม R เกิดจากการต่อแบบขนานของตัวต้านทาน R_1, R_2 และ R_3 โดยมีค่าความต้านทานรวมเป็นไปตามสมการ

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

ถ้ากำหนดให้ $R_1 = 25\Omega, R_2 = 40\Omega$ และ $R_3 = 50\Omega$ โดยที่ตัวต้านทานแต่ละตัวมีค่าผิดพลาดที่เป็นไปได้ในการวัดคือ 0.5% จงหาค่าผิดพลาดที่เป็นไปได้ในการวัดความต้านทานรวม R

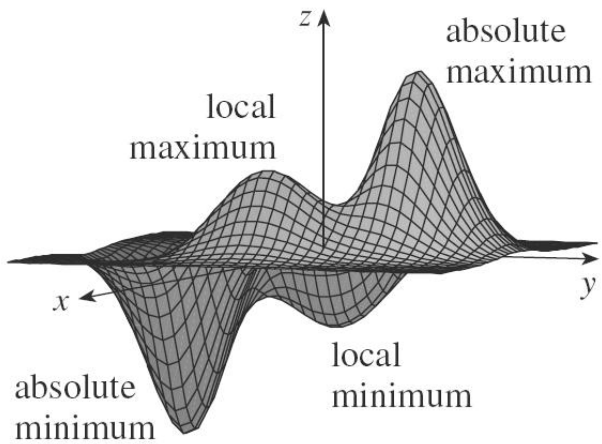


3.7 ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร และตัวคูณลากรองจ์ (Maximum and minimum values of functions of two variables; Lagrange multiplier)

บทนิยาม 3.7.1. ให้ $z = f(x, y)$ เราจะกล่าวว่า

1. f มี **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (local minimum)** ที่ (a, b) ถ้า $f(a, b) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในบริเวณใกล้เคียง (a, b) และเรียก $f(a, b)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ** f

2. f มี **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (local maximum)** ที่ (a, b) ถ้า $f(a, b) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในบริเวณใกล้เคียง (a, b) และเรียก $f(a, b)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ** f

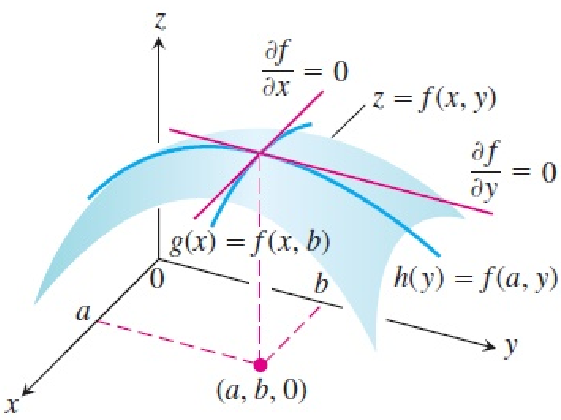


รูปที่ 3.7: จุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

ทฤษฎีบท 3.7.2. ถ้าฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b) และ f หาอนุพันธ์ย่อยได้ที่ (a, b) แล้ว

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{และ} \qquad f_y(a, b) = 0$$

หมายเหตุ จะเรียกจุด (a, b) ว่า **จุดวิกฤต (critical point)** ของ f ถ้า $f_x(a, b) = 0$ และ $f_y(a, b) = 0$ หรือ ถ้า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด (a, b)
ดังนั้นจะได้ว่า จากทฤษฎีบท 3.7.2 ถ้า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b) แล้ว (a, b) จะเป็นจุดวิกฤต ของ f



รูปที่ 3.8: จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันจะมีอนุพันธ์ย่อยเป็นศูนย์

ทฤษฎีบท 3.7.3 (การทดสอบค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์โดยอนุพันธ์อันดับสอง). ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองต่อเนื่องบนบริเวณใกล้เคียงกับจุด (a, b)และให้

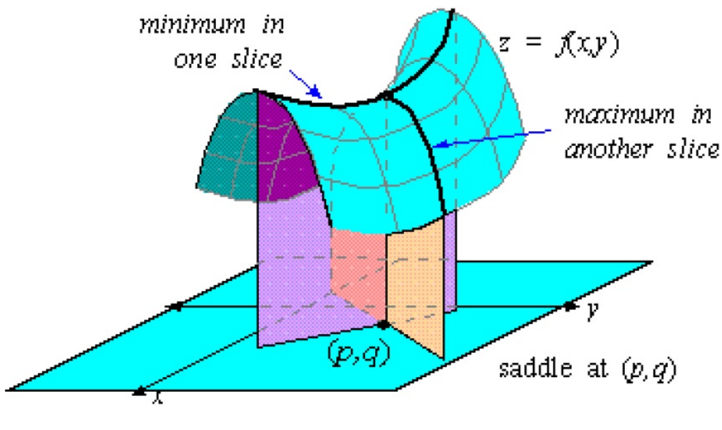
$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b)^2)$$

จะได้ว่า

(a) ถ้า $D > 0$ และ $f_{xx}(a, b) > 0$ แล้ว $f(a, b)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(b) ถ้า $D > 0$ และ $f_{xx}(a, b) < 0$ แล้ว $f(a, b)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

(c) ถ้า $D < 0$ แล้ว (a, b) จะเป็นจุดอานม้า



รูปที่ 3.9: จุดอานม้า

ตัวอย่าง 3.7.4. จงหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดอานม้า (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

(2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

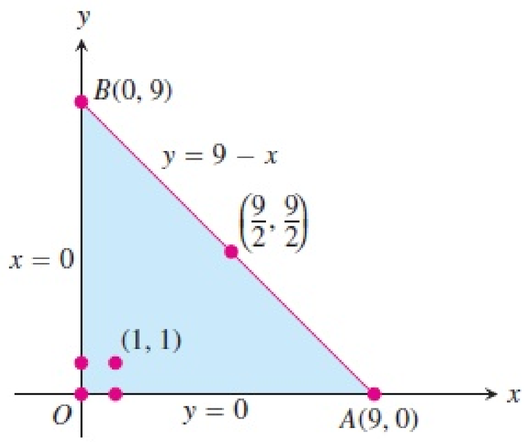
(3) $f(x, y) = 2x^2y - y^2 - 4x^2 + 3y$

บทนิยาม 3.7.5. จะเรียกฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ว่ามี **ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum)**ที่จุด (a, b) ถ้า $f(x, y) \leq f(a, b)$ สำหรับทุกๆ จุด (x, y) ในโดเมนของ f
และจะเรียกฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ว่ามี **ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum)**ที่จุด (a, b) ถ้า $f(x, y) \geq f(a, b)$ สำหรับทุกๆ จุด (x, y) ในโดเมนของ f

วิธีการหาค่าขีดสุดสัมบูรณ์บนโดเมนที่มีขอบเขตจำกัด

1. หาจุดวิกฤตของ f
2. หาค่าของ f ที่จุดวิกฤต และจุดขอบของโดเมนของ f
3. เปรียบเทียบค่าที่ได้ ค่ามากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ ค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.7.6. จงหาค่าขีดสุดสัมบูรณ์ของ $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ บนบริเวณปิดในควอแดนท์ที่ 1 ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = 0, y = 0$ และ $y = 9 - x$



ตัวคูณลากรองจ์

ต่อไปเราจะใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์กับการแก้ปัญหาค่าขีดสุดที่มีเงื่อนไขบังคับ เช่น

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ } S = xy + 2xz + 2yz$$
$$\text{ภายใต้เงื่อนไข } xyz = 32 \text{ หรือ } xyz - 32 = 0$$

การแก้ปัญหาค่าขีดสุดโดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์ทำได้ดังนี้

1. เขียนแทนปัญหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ด้วย

$$\text{ปัญหาค่าต่ำสุด (หรือ ปัญหาค่าสูงสุด)} \qquad z = f(x, y)$$
$$\text{ภายใต้เงื่อนไข} \qquad g(x, y) = 0$$

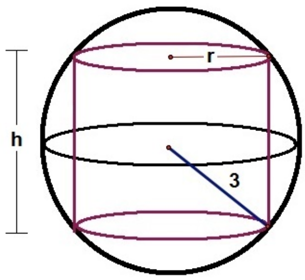
2. สร้างฟังก์ชัน F โดยที่ $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

3. หาจุดวิกฤตของ F โดยแก้สมการ

$$F_x(x, y, \lambda) = 0, \qquad F_y(x, y, \lambda) = 0, \qquad F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

4. ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ จะเกิดที่จุดวิกฤตที่หาได้ในข้อ 3.

ตัวอย่าง 3.7.7. พิจารณาทรงตันรูปทรงกระบอกรัศมี r สูง h ที่บรรจุแนบในพื้นผิวทรงกลมรัศมี 3 หน่วย ดังรูป จงเขียนรูปแบบปัญหาเพื่อหาพื้นที่ผิวที่มากที่สุดของทรงตันดังกล่าว โดยวิธีตัวคูณลากรองจ์



ตัวอย่าง 3.7.8. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x, y) = xy$ เมื่อ x, y เป็นจุดบนวงรี $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

ตัวอย่าง 3.7.9. จงหาจุดบนเส้นตรง $y = 2x + 3$ ที่อยู่ใกล้จุด $(4, 2)$ มากที่สุด

ตัวอย่าง 3.7.10. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด(ถ้ามี) ของ $x^2 + y^2$ สำหรับจุด (x, y) ที่อยู่บนไฮเพอร์โบลา $xy = 4$ **โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์**

ตัวอย่าง 3.7.11. ต้องการทำกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าฝาเปิด โดยใช้กระดาษแข็งที่มีพื้นที่ 12 ตารางเมตร(ใช้กระดาษที่มีอยู่ทั้งหมด) จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องดังกล่าว