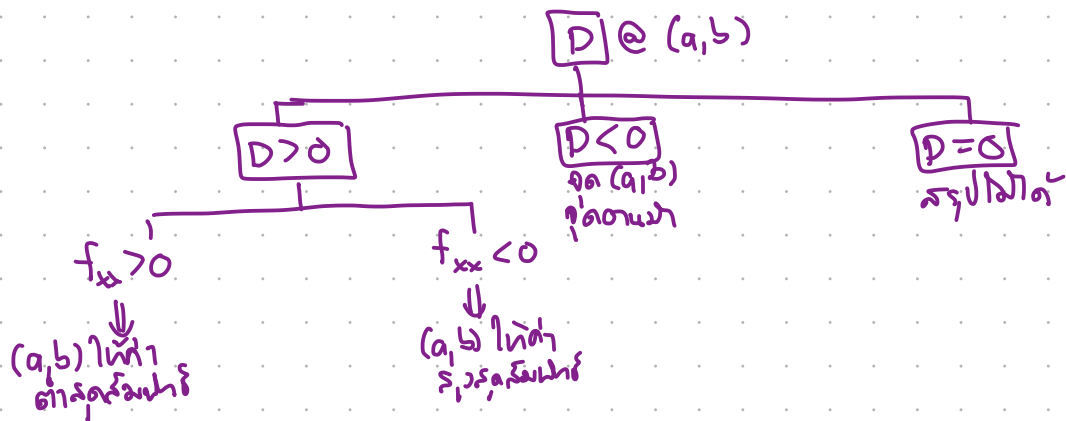


$f(x,y) \rightarrow$ หา Max / Min (relative extrema)

① หาจุดวิกฤต : หา (a,b) ที่ทำให้ $f'(a,b)=0$ หรือ $f'(a,b)$ ไม่มีค่า

② จำแนกจุดวิกฤต : $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$



ตัวอย่าง 3.7.4. จงหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดอานม้า (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

(2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

① หาจุดวิกฤต

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$f_y = 4y^3 - 4x = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore \begin{cases} \textcircled{1}; & y = x^3 \\ \textcircled{2}; & x = y^3 \end{cases}$$

ได้ว่า $x = (x^3)^3$

$$x = x^9$$

$$x^9 - x = 0$$

$$x(x^8 - 1) = 0$$

$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

ถ้า $x = 0$ ได้ $y = 0 \Rightarrow$ จุดวิกฤต $(0, 0)$

$x = 1$ ได้ $y = 1 \Rightarrow$ จุดวิกฤต $(1, 1)$

$x = -1$ ได้ $y = -1 \Rightarrow$ จุดวิกฤต $(-1, -1)$

② ทดสอบจุดวิกฤต

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 12x^2 \\ f_{yy} &= 12y^2 \\ f_{xy} &= -4 \end{aligned}$$

จุด $(0, 0)$: $D = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$

แสดงว่า จุด $(0, 0)$ เป็นจุดอานม้า

จุด $(1, 1)$: $D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0$

check: $f_{xx} = 12 > 0$

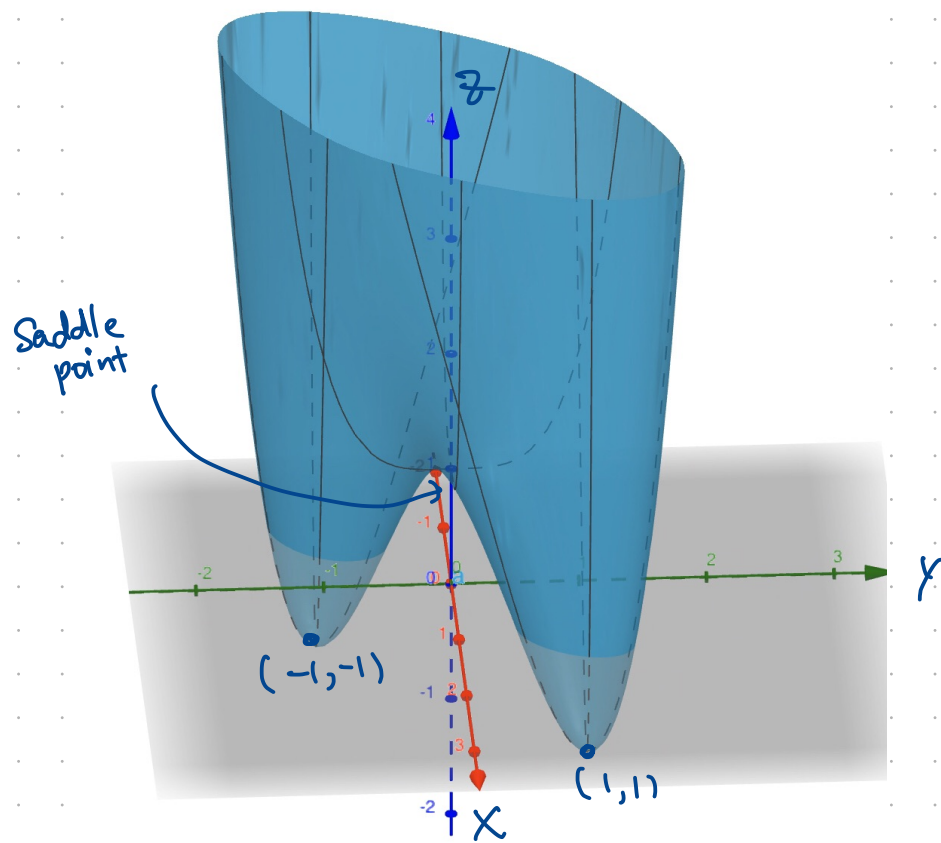
แสดงว่า จุด $(1, 1)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

จุด $(-1, -1)$: $D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0$

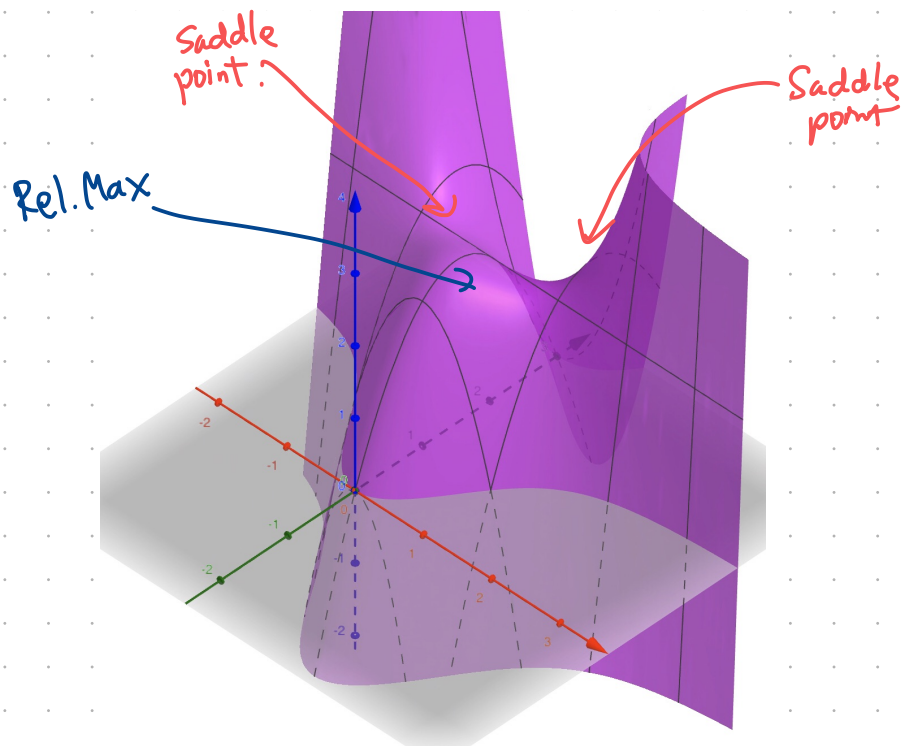
check: $f_{xx} = 12 > 0$

แสดงว่า จุด $(-1, -1)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

Ex(2)



Ex 3



(3) $f(x, y) = 2x^2y - y^2 - 4x^2 + 3y$

① หาจุดวิกฤต

$f_x = 4xy - 8x = 0$ -①

$f_y = 2x^2 - 2y + 3 = 0$ -②

แทนค่า ②; $2y = 2x^2 + 3 \Leftrightarrow y = x^2 + \frac{3}{2}$ -③

แทน ③ ใน ①; $4x(x^2 + \frac{3}{2}) - 8x = 0$

$4x^3 + 6x - 8x = 0$

$4x^3 - 2x = 0$

$2x^3 - x = 0$

$x(2x^2 - 1) = 0$

$x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) = 0$

$x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ถ้า $x=0$ ได้ $y = \frac{3}{2}$; $(0, \frac{3}{2})$

ถ้า $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ได้ $y = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2} = 2$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$

ถ้า $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ได้ $y = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2} = 2$; $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$

② ทดสอบจุดวิกฤต

$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

$f_{xx} = 4y - 8$

$f_{yy} = -2$

$f_{xy} = 4x$

จุด $(0, \frac{3}{2})$; $D = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

check $f_{xx}(0, \frac{3}{2}) = -2 < 0$

$\therefore$ จุด $(0, \frac{3}{2})$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0, \frac{3}{2})$

จุด $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$; $D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & -2 \end{vmatrix} = -2 - \frac{16}{2} = -10 < 0$

$\therefore$ จุด $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ เป็นจุดอาน

จุด $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$; $D = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & -2 \end{vmatrix} = -2 - 8 = -10 < 0$

$\therefore$ จุด $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ เป็นจุดอาน

บทนิยาม 3.7.5. จะเรียกฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ว่ามี ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ที่จุด (a, b) ถ้า $f(x, y) \leq f(a, b)$ สำหรับทุกๆ จุด (x, y) ในโดเมนของ f และจะเรียกฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ว่ามี ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ที่จุด (a, b) ถ้า $f(x, y) \geq f(a, b)$ สำหรับทุกๆ จุด (x, y) ในโดเมนของ f

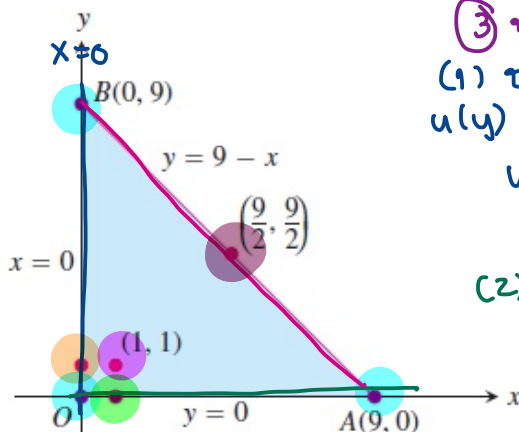
วิธีการหาค่าขีดสุดสัมบูรณ์บนโดเมนที่มีขอบเขตจำกัด (closed + bounded)

1. หาจุดวิกฤตของ f

2. หาค่าของ f ที่จุดวิกฤต และจุดขอบของโดเมนของ f

3. เปรียบเทียบค่าที่ได้ ค่ามากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ ค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.7.6. จงหาค่าขีดสุดสัมบูรณ์ของ $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ บนบริเวณปิดในควอดรนต์ที่ 1 ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = 0, y = 0$ และ $y = 9 - x$



③ พิจารณาจุดบนขอบเขตต่างๆ

(1) ขอบเส้น $x=0$

$u(y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$

$u'(y) = 2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$\therefore (0, 1)$ บนขอบ $x=0$ เป็นจุดที่จำกัด

(2) ขอบเส้น $y=0$

$v(x) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$

$\therefore v'(x) = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\therefore (1, 0)$ บนขอบ $y=0$

(3) ขอบเส้น $y=9-x$

$w(x) = f(x, 9-x) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2$

$w(x) = -61 + 18x - 2x^2$

$w'(x) = 18 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

ได้ $y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$ จุด $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ บนเส้น $y=9-x$

① หาจุดต่างๆ

① จุดวิกฤต

$f_x = 2 - 2x = 0$

$f_y = 2 - 2y = 0$

$\therefore$ จุดวิกฤต $(1, 1)$

② จุดบนขอบเขต

จุด $(0, 0), (9, 0), (0, 9)$

② เปรียบเทียบค่า

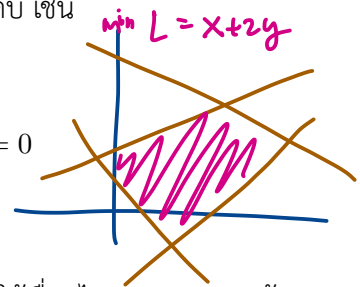
(x, y)	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 9)$	$(9, 0)$	$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$
$f(x, y)$	4	2	-61	-6	3	3	$-\frac{41}{2}$
Abs. Max	4						
Abs. Min			-61	-6			

ตัวคูณลากรองจ์ "Lagrange's Multiplier"

ต่อไปเราจะใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์กับการแก้ปัญหาค่าขีดสุดที่มีเงื่อนไขบังคับ เช่น

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ } S = xy + 2xz + 2yz$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไข } xyz = 32 \text{ หรือ } xyz - 32 = 0$$



การแก้ปัญหาค่าขีดสุดโดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์ทำได้ดังนี้

- เขียนแทนปัญหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ด้วย

① ปัญหาค่าต่ำสุด (หรือ ปัญหาค่าสูงสุด) $z = f(x, y)$ **objective function**

② ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ **constraint**

- สร้างฟังก์ชัน F โดยที่ $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

- หาจุดวิกฤตของ F โดยแก้สมการ

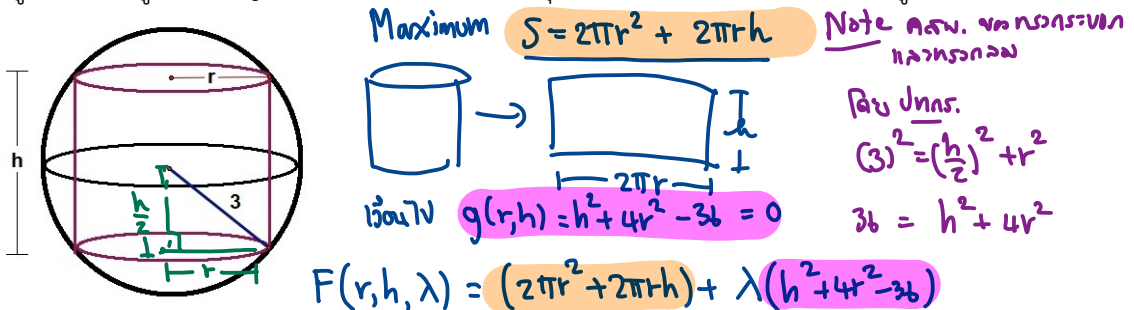
$$F_x(x, y, \lambda) = 0,$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 0,$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

- ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ จะเกิดที่จุดวิกฤตที่หาได้ในข้อ 3.

ตัวอย่าง 3.7.7. พิจารณาทรงตันรูปทรงกระบอกรัศมี r สูง h ที่บรรจุแนบในพื้นผิวทรงกลมรัศมี 3 หน่วย ดังรูป จงเขียนรูปแบบปัญหาเพื่อหาพื้นที่ผิวที่มากที่สุดของทรงตันดังกล่าว โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์



ตัวอย่าง 3.7.8. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x, y) = xy$ เมื่อ x, y เป็นจุดบนวงรี $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

① สร้าง $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$

② หาจุดวิกฤต

$$F_x = y + \frac{\lambda x}{4} = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$F_y = x + \lambda y = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$F_\lambda = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \quad \text{--- ③}$$

Then ①; $y + \frac{\lambda x}{4} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda x}{4}$ --- ④

②; $x + \lambda y = 0 \Leftrightarrow x = -\lambda y$ --- ⑤

ใส่ ④ แทนใน ⑤; $x = -\lambda \left(-\frac{\lambda x}{4} \right) \Leftrightarrow x = \frac{\lambda^2 x}{4}$ --- ⑥

Case $x = 0$ ได้ $y = 0$ แต่ เติ (0,0) ไม่แทนใน ③

เราสมมติว่า $x \neq 0$ ⑦; $1 = \frac{\lambda^2}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

$\lambda = 2$ แทนใน ④; $y = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = -2y$

$\frac{(-2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

ถ้า $y = 1$ ได้ $x = -2 \Rightarrow (-2, 1)$

$y = -1$ ได้ $x = 2 \Rightarrow (2, -1)$

$\lambda = -2$ แทนใน ④; $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2y$

$\frac{(2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

ถ้า $y = 1$ ได้ $x = 2 \Rightarrow (2, 1)$

$y = -1$ ได้ $x = -2 \Rightarrow (-2, -1)$

Abs. Max $(2, 1)$ $(-2, -1)$

Abs. Min $(-2, 1)$ $(2, -1)$

(x, y)	(2, 1)	(-2, -1)	(-2, 1)	(2, -1)
f(x, y)	2	2	-2	-2

