

Lagrange Multiplier (တွဲကိန်းကိန်း)

Maximize / Minimize $z = f(x, y)$

သတ်မှတ် $g(x, y) = 0$

① သိ၍ $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

② နှစ်ဖက်လုံး F_x
 F_y
 F_λ

Bordered Hessian Matrix

บทที่ 3. ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

57

ตัวอย่าง 3.7.9. จงหาจุดบนเส้นตรง $y = 2x + 3$ ที่อยู่ใกล้จุด $(4, 2)$ มากที่สุด

สมมติให้ (x, y) เป็นจุดบน $y = 2x + 3$ ซึ่ง

$$\text{Min } d(x, y) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

$$\equiv \text{Min } D(x, y) = (x-4)^2 + (y-2)^2$$

$$\text{Constraint: } g(x, y) = y - 2x - 3 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad F(x, y, \lambda) = D(x, y) + \lambda g(x, y) \\ = (x-4)^2 + (y-2)^2 + \lambda(y-2x-3)$$

$$\textcircled{2} \quad F_x = 2(x-4) - 2\lambda = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$F_y = 2(y-2) + \lambda = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$F_\lambda = y - 2x - 3 = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}; \quad x - 4 = \lambda \quad \textcircled{4}$$

$$\text{แทน } \textcircled{4} \text{ ใน } \textcircled{2}; \quad 2(y-2) + (x-4) = 0$$

$$2y - 4 + x - 4 = 0$$

$$2y + x - 8 = 0 \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \times 2; \quad 4y + 2x - 16 = 0 \quad \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} + \textcircled{3}; \quad 5y = 19$$

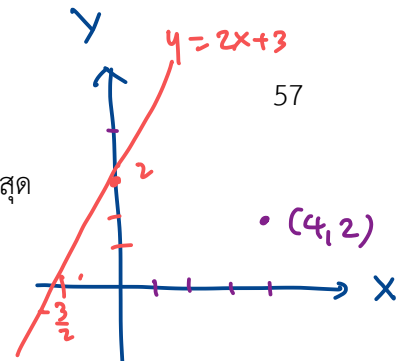
$$y = \frac{19}{5}$$

$$\therefore \frac{19}{5} - 3 = 2x$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{19}{5} - 3 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\text{จุดบนเส้นตรง } \left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5} \right)$$



ตัวอย่าง 3.7.10. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด(ถ้ามี) ของ $x^2 + y^2$ สำหรับจุด (x, y) ที่อยู่บนไฮเพอร์โบลา

ลา $xy = 4$ โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad g(x, y) = xy - 4$$

$$\text{สร้าง } F(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2) + \lambda(xy - 4)$$

$$F_x = 2x + \lambda y = 0$$

$$F_y = 2y + \lambda x = 0$$

$$F_\lambda = xy - 4 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{จาก } 2x = -\lambda y \quad \textcircled{2}$$

$$2y = -\lambda x \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}; \quad x = -\frac{\lambda y}{2} \quad \textcircled{4}$$

$$\text{แทน } \textcircled{4} \text{ ใน } \textcircled{3}, \quad 2y = (-\lambda) \left(-\frac{\lambda y}{2} \right)$$

$$4y = \lambda^2 y$$

$$\text{ถ้า } y = 0 \text{ ทำให } \textcircled{1} \text{ เป็น } 0 - 4 = 0 \text{ ไม่เป็น } \Rightarrow y \neq 0$$

$$\therefore 4 = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = 2, -2$$

$$\text{Case } \lambda = 2 \text{ แทน } 2x = -2y \Leftrightarrow y = -x$$

$$\text{แทน } y = -x \text{ ใน } \textcircled{1}; \quad x(-x) - 4 = 0$$

$$x^2 = -4 \text{ impossible!}$$

$$\text{Case } \lambda = -2 \text{ แทน } 2x = 2y \Leftrightarrow y = x$$

$$\text{แทน } y = x \text{ ใน } \textcircled{1}; \quad x \cdot x - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

หาค่า	(x, y)	$(2, 2)$	$(-2, -2)$
$f(x, y)$	8	8	

หาค่าจุดก้นาไว้ให้ค่าสูงสุดรอบต่ำสุด

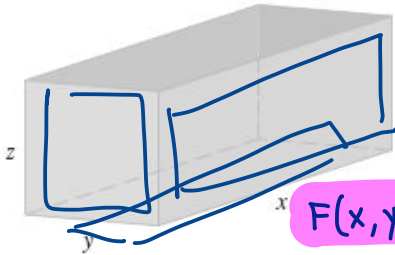
เลือกจุดอื่นบน $xy = 4$

$$\text{เลือก } (1, 4); \quad f(1, 4) = 1 + 16 = 17$$

$$\therefore (2, 2), (-2, -2) \text{ ให้ค่าต่ำสุด.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ถ้า } x = 2 \text{ ได้ } y = 2 \text{ เกิด } (2, 2) \\ x = -2 \text{ ได้ } y = -2 \text{ เกิด } (-2, -2) \end{array} \right\}$$

ตัวอย่าง 3.7.11. ต้องการทำกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าฝาเปิด โดยใช้กระดาษแข็งที่มีพื้นที่ 12 ตารางเมตร (ใช้กระดาษที่มีอยู่ทั้งหมด) จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องดังกล่าว



Max $V = xyz$

ภายใต้เงื่อนไข $12 = 2yz + xy + 2xz$

↓ $g(x,y) = 2yz + xy + 2xz - 12 = 0$

$z = \frac{12 - xy}{2y + 2x}$

$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(2yz + xy + 2xz - 12)$

$F_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0$ — (1)

$F_y = xz + \lambda(2z + x) = 0$ — (2)

$F_z = xy + \lambda(2y + 2x) = 0$ — (3)

$F_\lambda = 2yz + xy + 2xz - 12 = 0$ — (4)

(1); $\frac{yz}{y+2z} = -\lambda$ — (5)

(2); $\frac{xz}{2z+x} = -\lambda$ — (6)

(3); $\frac{xy}{2y+2x} = -\lambda$ — (7)

(5) = (6), $\frac{yz}{y+2z} = \frac{xz}{2z+x} \quad (z \neq 0)$

$y(2z+x) = x(y+2z)$

$2zy + xy = xy + 2zx$

$2zy = 2zx$

$\therefore \boxed{x = y}$

(6) = (7); $\frac{xz}{2z+x} = \frac{xy}{2y+2x} \quad (x \neq 0)$

$z(2x+2y) = y(2z+x)$

$2xz + 2yz = 2yz + xy$

$2xz = xy$

$\boxed{y = 2z}$

$\therefore x = 2z \Leftrightarrow z = \frac{x}{2}$

จาก (4) $x\left(\frac{x}{2}\right) + x(x) + 2x\left(\frac{x}{2}\right) - 12 = 0$

$x^2 + x^2 + x^2 = 12$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$\therefore \boxed{x = 2}$ ได้ 2

$y = 2$ และ $z = 1$

จาก (4) $x = 2, y = 2, z = 1$

จึงได้กล่องที่ปริมาตรมากที่สุดคือ 4 ลบ.ม.

#

$$u = y^2; du = 2y dy \quad \int \frac{2y}{e^{y^2}} dy = \int e^{x+2} dx$$

$$-e^{-y^2} = e^{x+2} + C$$

$$(2) \quad \underbrace{\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)}_{\text{Newton's Law of Cooling}} \Rightarrow \begin{array}{l} T(0) = 100 \\ T_s = 25 \\ T(1) = 75 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{T - T_s} dT = \int k dt$$

$$\ln|T-T_s| = kt + C$$

$$\therefore T(t) = T_s + C e^{kt}$$

$\leftarrow \text{un } C, k$

$$k = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$C = 75$$

အကယ်၍ $T(t) = 50$

$$t = \frac{\ln(\frac{1}{3})}{\ln(\frac{2}{3})}$$

$$(3) \quad (1+x^2)y' = 2xy + ((1+x^2)\sec x)^2 \Leftrightarrow (1+x^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = ((1+x^2)\sec x)^2$$

① အသံပြောင်း နှင့် $\frac{dy}{dx}$ မှာ 1

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} y = (1+x^2) \sec^2 x$$

② $\mu(x) = e^{\int -\frac{2x}{1+x^2} dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1+x^2} y \right] = \sec^2 x$$

$$\int d\left(\frac{1}{1+x^2}y\right) = \int \sec^2 x \, dx$$

$$\frac{1}{1+x^2}y = \tan x + C$$

$$y = (1+x^2)\tan x + C(1+x^2)$$

④ 2995 RL/RC : $R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$

$$R=10, C=0.5, E(t) = 4e^{-t}$$

$$Q(0) = 0$$

$$10 \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.5} = 4e^{-t}$$

$$\frac{dQ}{dt} + 0.2Q = 0.4e^{-t}$$

$$\mu(t) = e^{\int 0.2 dt} = e^{0.2t}$$

$$(C = \frac{8}{5})$$

⑤ $y'' + 6y' + 8y = 0$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} r^2 + 6r + 8 &= 0 \\ (r+2)(r+4) &= 0 \\ r &= -2, -4 \end{aligned}$$

→ r_1, r_2 שונים וריאליים
 $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

② $y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

$$\textcircled{3} \quad r = \frac{\alpha \pm \beta i}{\gamma} \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$$

(6) (b.1) $y'' - 10y' + 25y = xe^{5x} + \pi$

$$y_h \Rightarrow \begin{aligned} r^2 - 10r + 25 &= 0 \\ (r-5)(r-5) &= 0 \\ r &= 5 \\ y_h(x) &= C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} \end{aligned}$$

$$y_p(x) = x^2(Ax+B)e^{5x} + C$$

(7) $y'' - 4y' = 3 + 10\sin 2x$

$$y_h(x) \Rightarrow \begin{aligned} r^2 - 4r &= 0 \\ r(r-4) &= 0 \\ r &= 0, 4 \end{aligned}$$

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^{4x}$$

$$y_p(x) = Ax + B\sin 2x + C\cos 2x$$

find A, B, C
by substituting

$$y_p'(x) =$$

$$y_p''(x) =$$

match coefficients
A, B, C

$$A = -\frac{3}{4}, B = -\frac{1}{2}, C = 1$$

(8) $f(t) = 2\sin^2(7t) + (3t+1)^2$

$$= 2\left(\frac{1 - \cos 14t}{2}\right) + (9t^2 + 6t + 1)$$

$$\therefore \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos 14t\} + 9\mathcal{L}\{t^2\} + 6\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{1\}$$

(9) $y'' + 9y = 5\cos 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

X space $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ S space
 $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$$\mathcal{L}\{y''(x)\} + 9\mathcal{L}\{y(x)\} = 5\mathcal{L}\{\cos 2x\}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 9Y(s) = \frac{5s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 9} \left[\frac{5s}{s^2 + 4} + s \right]$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 9s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} = \frac{s(s^2 + 9)}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\therefore y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2x$$