

บทที่ 4

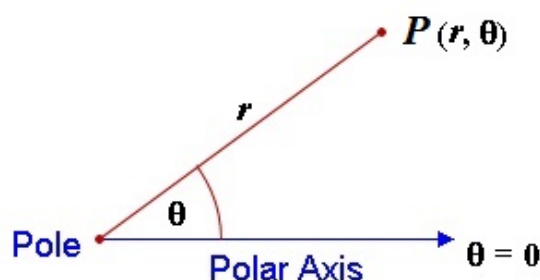
กราฟในปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ (Graphs in two and three-dimensional spaces)

4.1 กราฟในปริภูมิ 2 มิติ ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Graphs in two-dimensional space; polar coordinates)

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

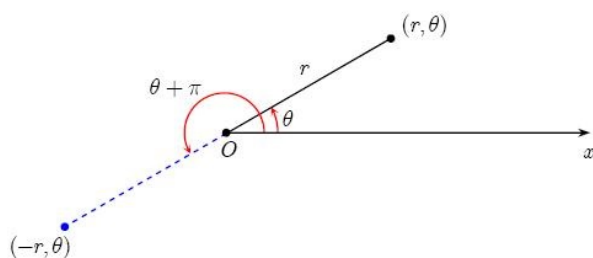
ให้ O เป็นจุดกำเนิดในระนาบ เรียก O ว่า **ขั้ว (pole)** หรือ **จุดกำเนิด (origin)** และลากเส้นตรงจากจุด O ในแนวราบไปทางขวามือและสมนัยกับแกน X ด้านบวกในระบบพิกัดฉาก เรียกว่า **แกนเชิงขั้ว (polar axis)**

กำหนดให้ P เป็นจุดใดๆ ในระนาบ ให้ r เป็นระยะจากจุด O ถึงจุด P และให้ θ เป็นมุมระหว่างแกนเชิงขั้วกับส่วนของเส้นตรง OP ดังรูป โดยมุม θ มีค่าบวกเมื่อวัดในทิศทวนเข็มนาฬิกา และมีค่าลบเมื่อวัดในทิศตามเข็มนาฬิกา เราสามารถแทนจุด P ได้ด้วยคู่อันดับ (r, θ) และเรียก r กับ θ ว่า **พิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate)** ของ P



รูปที่ 4.1: ระบบพิกัดเชิงขั้วในปริภูมิ 2 มิติ

ในกรณีที่จุด P คือจุด O เราจะพบว่า $r = 0$ และตกลงให้ $(0, \theta)$ แทนจุดกำเนิดสำหรับทุกค่าใดๆ ของ θ สำหรับกรณีที่ $r < 0$ เราจะให้จุด $(-r, \theta)$ เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด (r, θ) ผ่านจุด O ดังรูป สังเกตว่าจุด $(-r, \theta)$ แทนจุดเดียวกันกับจุด $(r, \theta + \pi)$



รูปที่ 4.2: พิกัดเชิงขั้วของจุดที่มีค่า r เป็นลบ

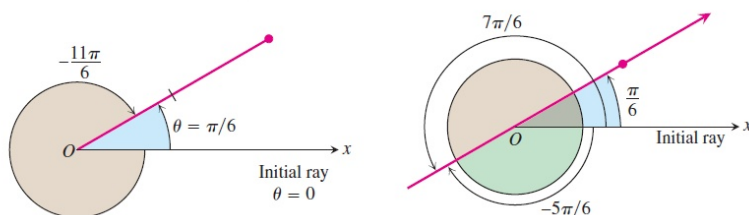
ตัวอย่าง 4.1.1. จงเขียนจุดต่อไปนี้บนระนาบเชิงขั้ว

(1) $(1, \frac{5\pi}{4})$

(2) $(2, -\frac{2\pi}{3})$

(3) $(-3, \frac{3\pi}{4})$

ในระบบพิกัดฉากนั้น จุดทุกจุดจะมีเพียงพิกัดเดียวเท่านั้น แต่ในระบบเชิงขั้วจุดหนึ่งจุดมีได้หลายพิกัด ยกตัวอย่างเช่น จุด $P(2, \frac{\pi}{6})$ สามารถแทนได้ด้วยพิกัด หรือ หรือ ดังรูปที่ 4.3

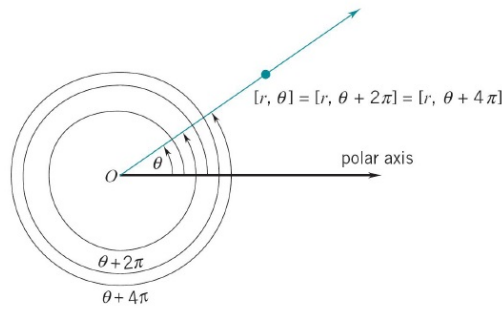


รูปที่ 4.3: พิกัดเชิงขั้วแบบต่างๆ ของจุด $P(2, \frac{\pi}{6})$

ในกรณีทั่วไป เรากล่าวได้ว่าจุดที่แทนด้วยพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) สามารถแทนด้วยพิกัด

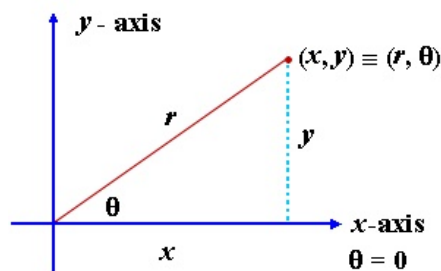
$$(r, \theta + 2n\pi) \text{ หรือ } (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ



รูปที่ 4.4: รูปแบบทั่วไปของจุดในพิกัดเชิงขั้วแบบต่างๆ ของจุด

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก สามารถพิจารณาได้จากรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.5: ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

จากรูปที่ 4.5 จะเห็นว่าถ้าจุด P มีพิกัดฉากเป็น (x, y) และพิกัดเชิงขั้วเป็น (r, θ) แล้ว $\cos \theta = \frac{x}{r}$ และ $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ดังนั้น

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นช่วยให้เราสามารถหาพิกัดฉากได้ เมื่อทราบพิกัดเชิงขั้ว และในทางกลับกันเราสามารถเมื่อทราบพิกัดฉาก เราสามารถหาพิกัดเชิงขั้วได้จาก

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง 4.1.2. จงหาพิกัดฉากของจุดที่มีพิกัดเชิงขั้วเป็น $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $(-2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3})$ และ $(5, \tan^{-1}(\frac{4}{3}))$

ตัวอย่าง 4.1.3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด $(-2, -2\sqrt{3})$ โดยกำหนดให้

(i) $0 < \theta \leq 2\pi$ และ $r > 0$

(ii) $-2\pi < \theta \leq 0$ และ $r < 0$

เส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

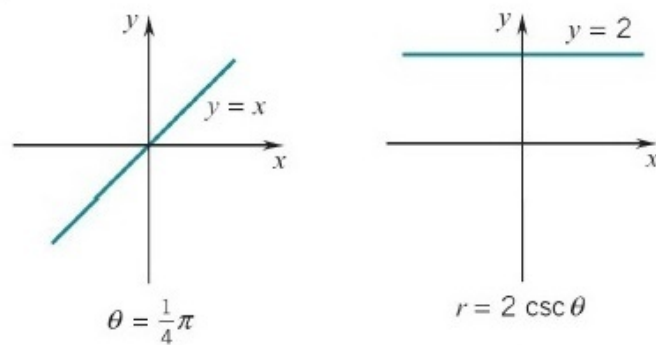
กราฟของสมการเชิงขั้ว $r = f(\theta)$ หรือสมการเชิงขั้วในรูปทั่วไป $F(r, \theta) = 0$ ประกอบด้วยจุดทั้งหมดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) สอดคล้องสมการดังกล่าว

ตัวอย่าง 4.1.4. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r \cos \theta = -2$

ตัวอย่าง 4.1.5. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $\theta = \frac{5\pi}{4}$

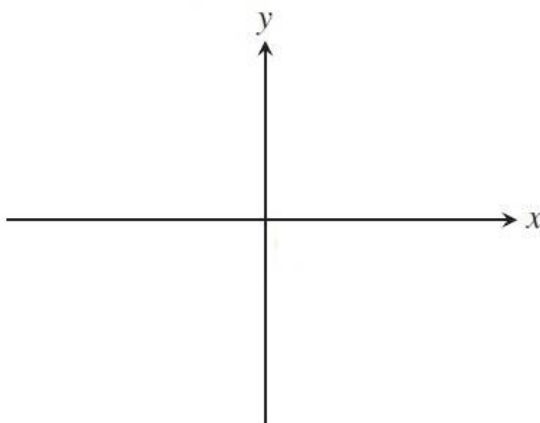
จากตัวอย่าง 4.1.4 และ 4.1.5 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้วจะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

ลักษณะของเส้นตรง	สมการ
เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และตัดกับแกน X ที่จุด $x = a$	$r \cos \theta = a$
เส้นตรงที่ขนานกับแกน X และตัดกับแกน Y ที่จุด $y = b$	$r \sin \theta = b$
เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด	$\theta = \theta_0$



รูปที่ 4.6: เส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 4.1.6. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 3$

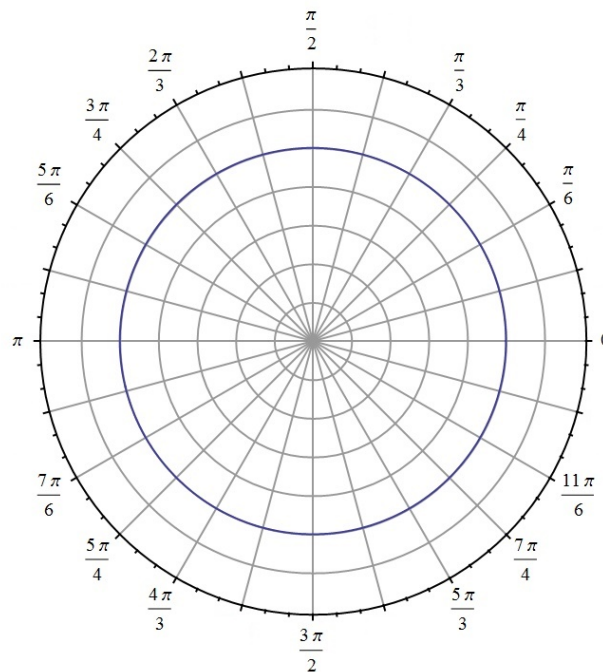


ตัวอย่าง 4.1.7. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 6 \sin \theta$ พร้อมทั้งหาสมการในระบบพิกัดฉากของเส้นโค้งนี้

วิธีทำ จากสมการที่โจทย์กำหนดให้ สามารถหาค่า r ได้ตามตาราง และนำค่า r ที่ได้ไปเขียนกราฟได้ดังรูป

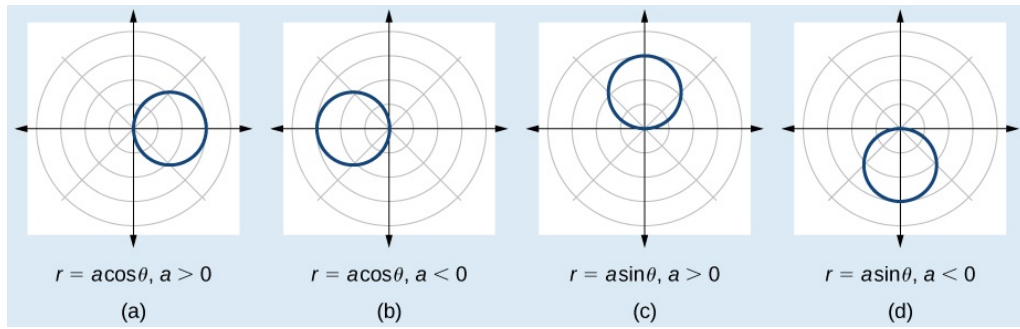
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r									

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



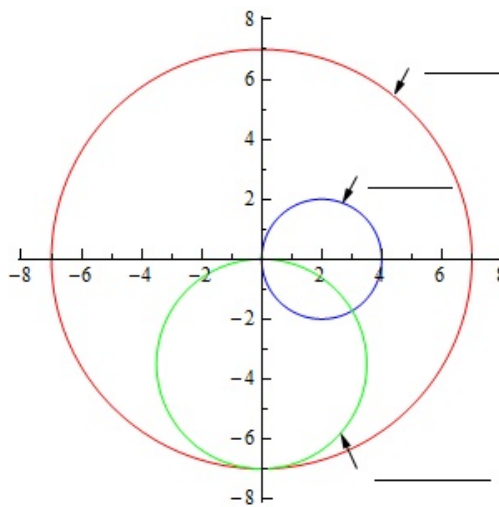
จากตัวอย่าง 4.1.6 และ 4.1.7 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการวงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้วจะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

ลักษณะของวงกลม	สมการ
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี a	$r = a$
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(a, 0)$ รัศมี $ a $	$r = 2a \cos \theta$
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, b)$ รัศมี $ b $	$r = 2b \sin \theta$



รูปที่ 4.7: วงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้ว

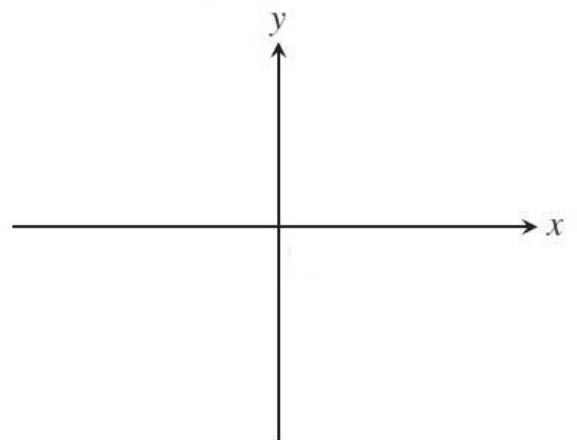
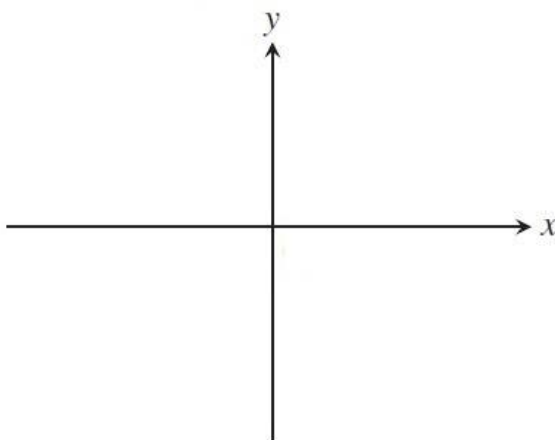
ตัวอย่าง 4.1.8. จงเติมสมการวงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้ว ของวงกลมในรูปด้านล่างให้ถูกต้อง



ตัวอย่าง 4.1.9. จงวาดบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

(1) $r \geq 0; \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

(2) $2 < r \leq 5; \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$

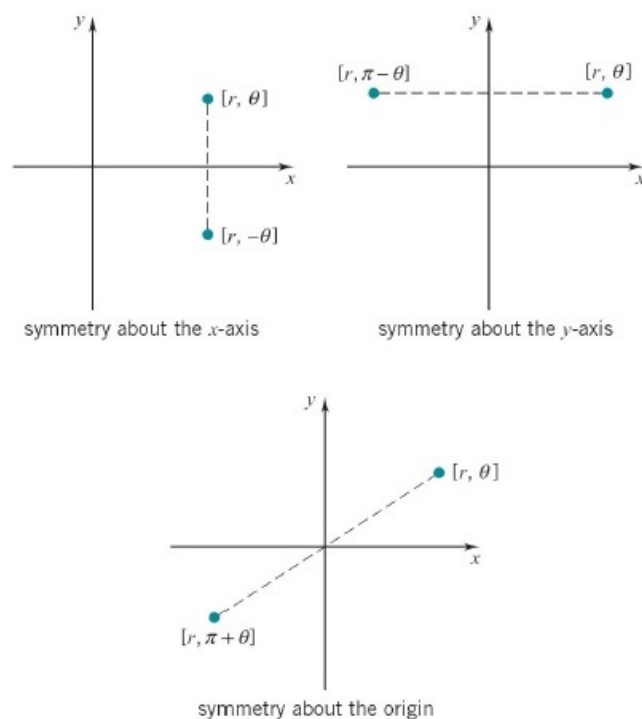


ต่อไปเราจะกล่าวถึงการทดสอบสมมาตรในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จากรูป 4.8 เราสามารถกล่าวถึงการทดสอบสมมาตรในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.10 (Symmetry tests).

- (1) เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบแกน X ถ้า แทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการของเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม
- (2) เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบแกน Y ถ้า แทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการของเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม
- (3) เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วจะสมมาตรรอบจุดกำเนิด ถ้า แทน r ด้วย $-r$ ในสมการของเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม



รูปที่ 4.8: การทดสอบสมมาตรในระบบพิกัดเชิงขั้ว

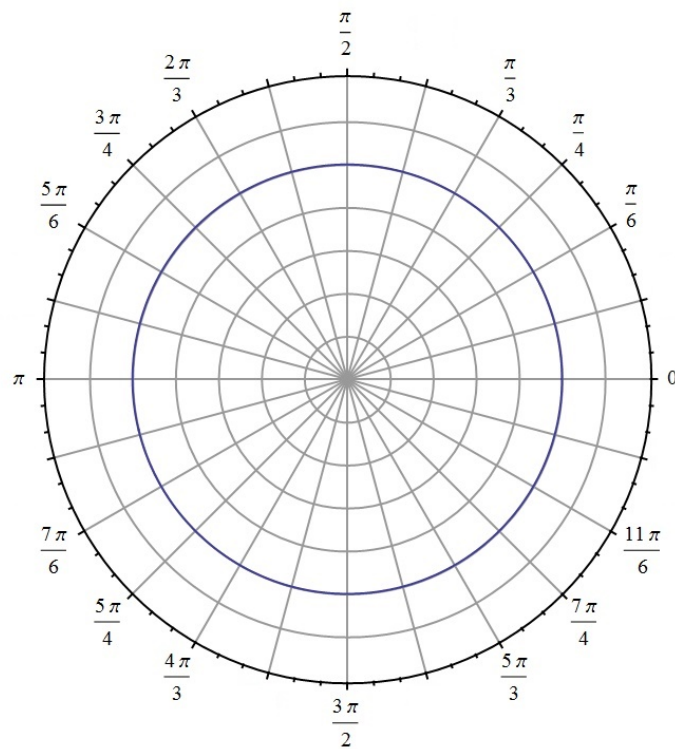
ตัวอย่าง 4.1.11. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 1 - \cos \theta$

วิธีทำ เนื่องจากแทนค่า θ ด้วย $-\theta$ ในสมการแล้วจะได้ว่า

ดังนั้นกราฟสมมาตรรอบแกน เราสามารถนำความสัมพันธ์ระหว่าง θ และ r ไปเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r									

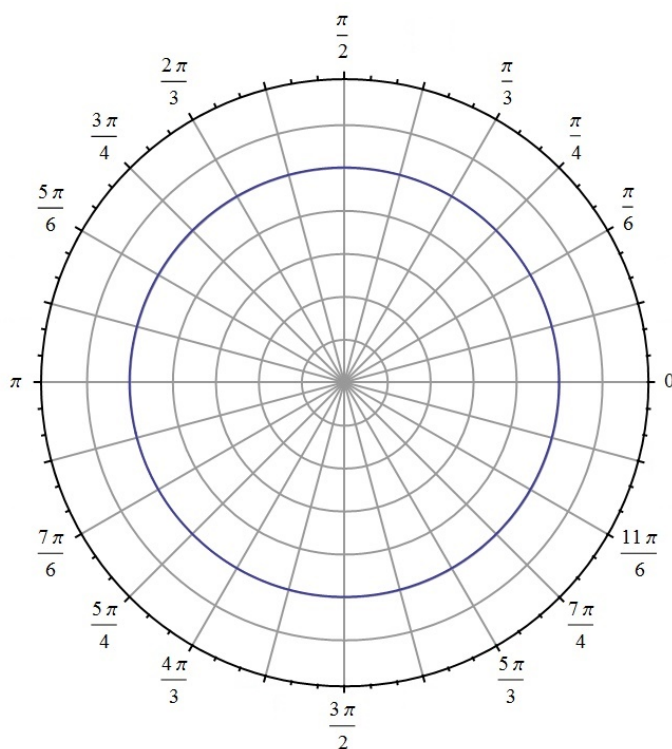
นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.1.12. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 1 + 2 \sin \theta$
วิธีทำ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r									

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้

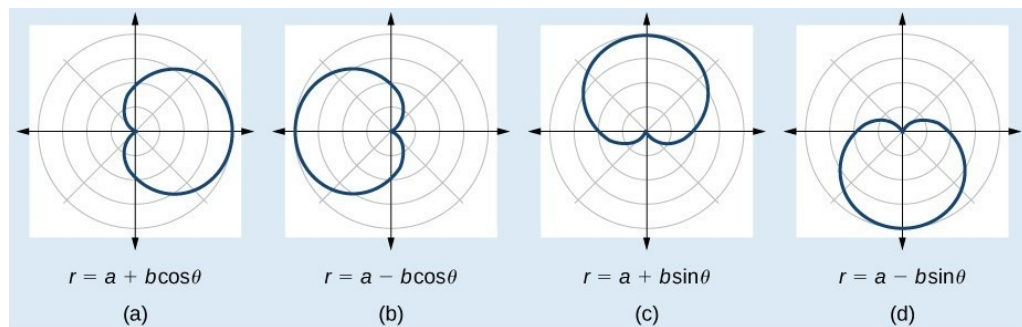


กราฟจากตัวอย่าง 4.1.11 และ 4.1.12 เรียกว่า **เส้นโค้งลิมาคอน (Limaçons)** ซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$r = a \pm b \sin \theta \quad \text{และ} \quad r = a \pm b \cos \theta$$

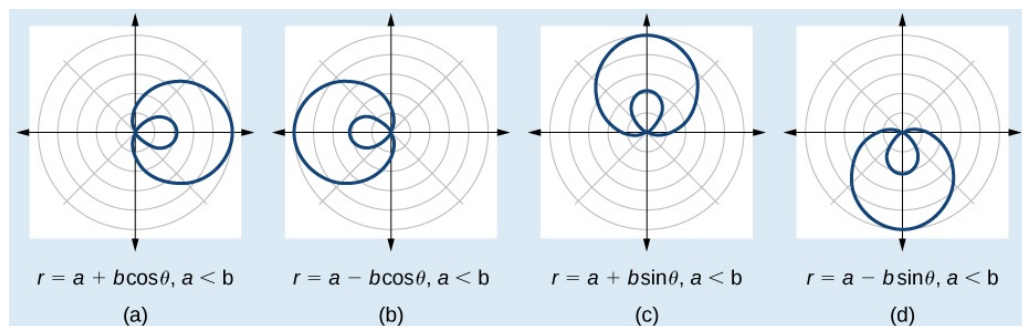
เส้นโค้งลิมาคอนมีลักษณะที่แตกต่างกันขึ้นกับความสัมพันธ์ของ a และ b ดังนี้

- กรณีที่ $a = b$ เราพบว่าเส้นโค้งที่ได้จะเป็นเส้นโค้งรูปหัวใจ ดังตัวอย่าง 4.1.11 ซึ่งเรียกว่า **เส้นโค้งคาร์ดิอยด์ (cardioid)**



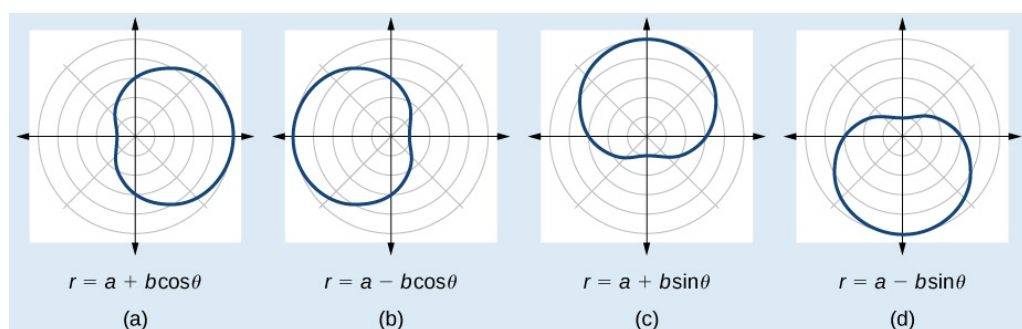
รูปที่ 4.9: เส้นโค้งคาร์ดิอยด์

- กรณีที่ $a < b$ เราพบว่าเส้นโค้งที่ได้จะเกิดเป็น inner-loop



รูปที่ 4.10: เส้นโค้งลิมาคอน $a < b$

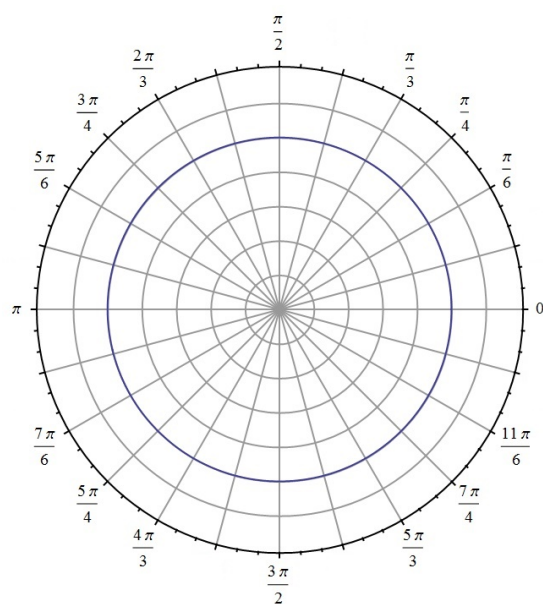
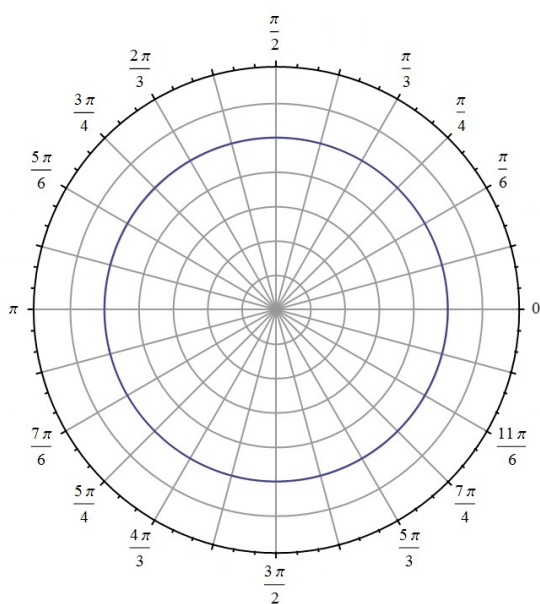
- กรณีที่ $a > b$ จะได้เส้นโค้งดังรูป



รูปที่ 4.11: เส้นโค้งลิมาคอน $a > b$

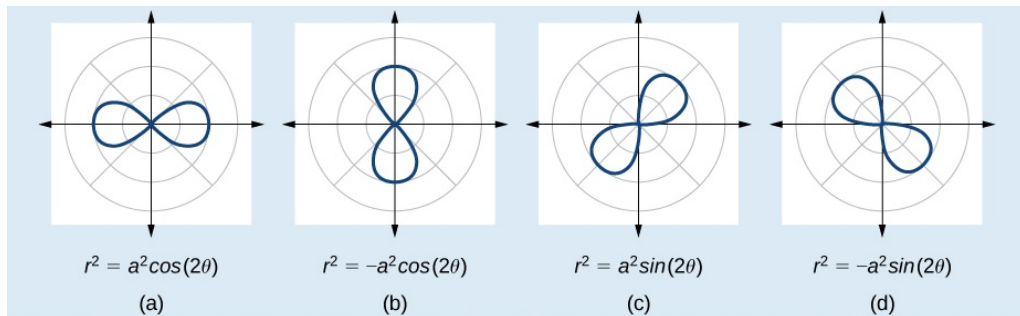
ตัวอย่าง 4.1.13. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r^2 = 2 \cos 2\theta$ และ $r^2 = 2 \sin 2\theta$
วิธีทำ

$r^2 = 2 \cos 2\theta$	θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	r						
$r^2 = 2 \sin 2\theta$	θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
	r						



กราฟจากตัวอย่าง 4.1.13 เรียกว่า **เส้นโค้งเลมนิสเคต (Lemniscates)** ซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta \quad \text{และ} \quad r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$$

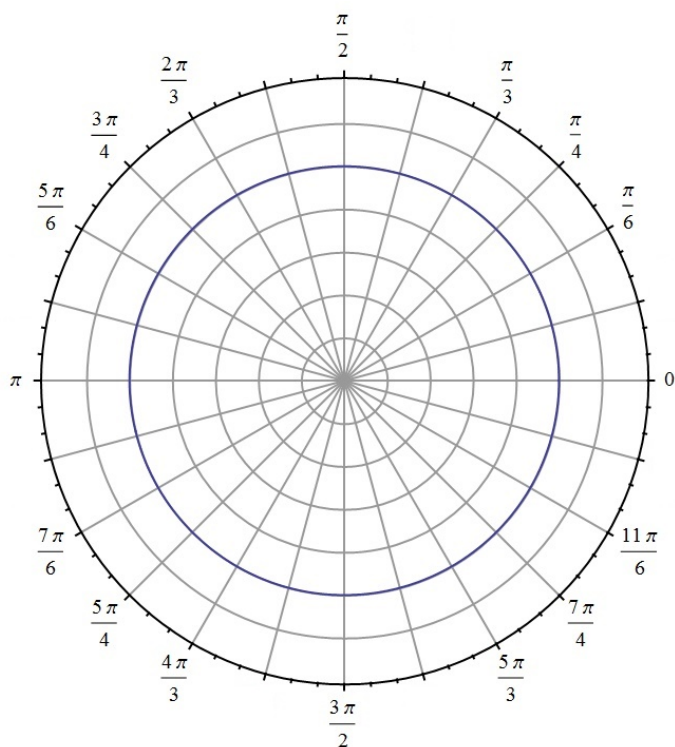


รูปที่ 4.12: เส้นโค้งเลมนิสเคต

ตัวอย่าง 4.1.14. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 3 \cos 2\theta$
วิธีทำ

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r									

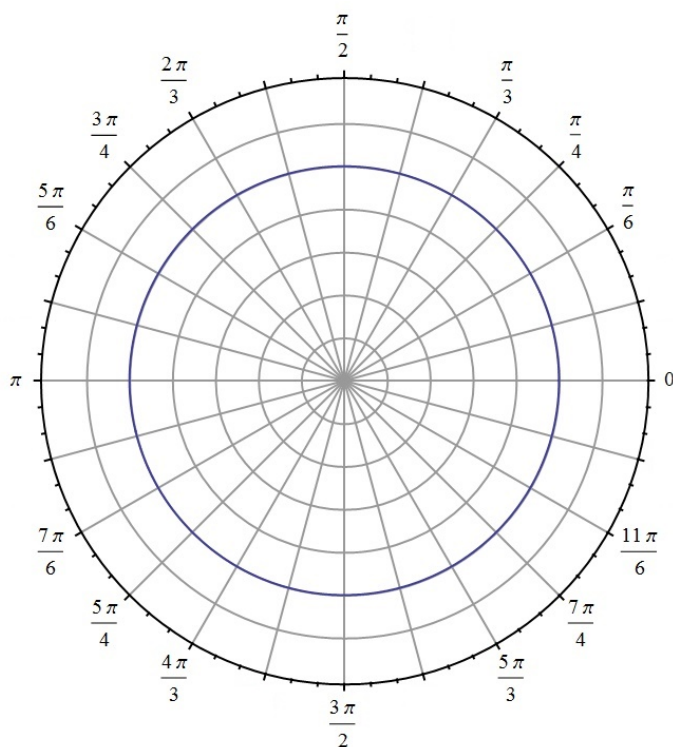
และสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.1.15. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 3 \sin 3\theta$
วิธีทำ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r									

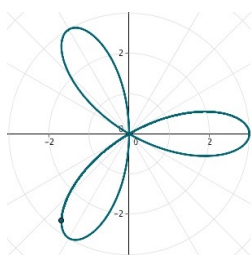
นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



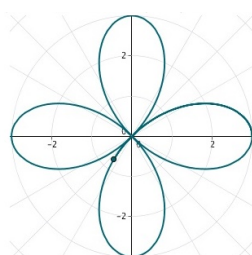
กราฟจากตัวอย่าง 4.1.14 เรียกว่า **เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose curves)** ซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$r = a \cos n\theta \quad \text{และ} \quad r = a \sin n\theta$$

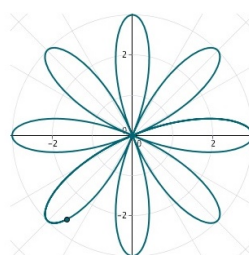
จำนวนของกลีบกุหลาบจะขึ้นอยู่กับ n ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จำนวนของกลีบกุหลาบจะมี n กลีบ แต่ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จำนวนของกลีบกุหลาบจะมี $2n$ กลีบ



$$y = 3 \cos 3\theta$$



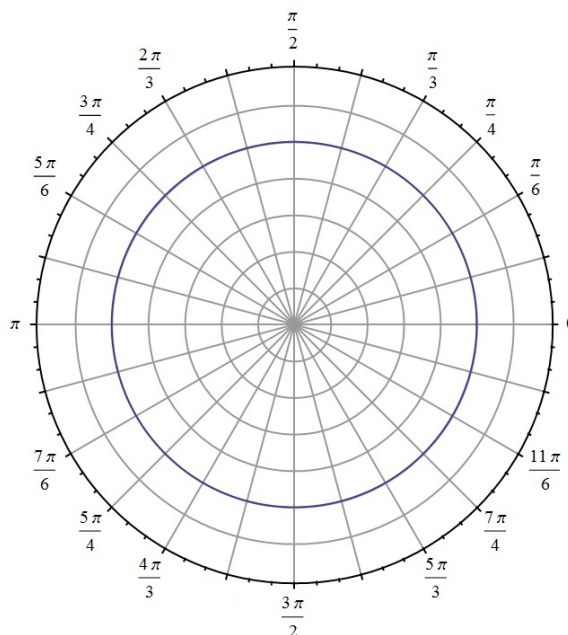
$$y = 3 \cos 2\theta$$



$$y = 3 \cos 4\theta$$

รูปที่ 4.13: เส้นโค้งกลีบกุหลาบ

ตัวอย่าง 4.1.16. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = \theta$ โดยที่ $\theta \geq 0$
วิธีทำ

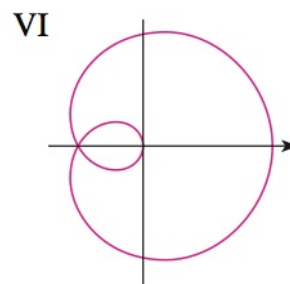
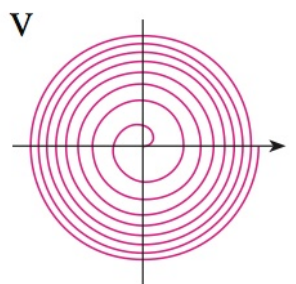
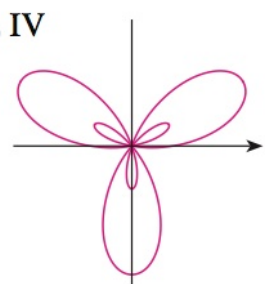
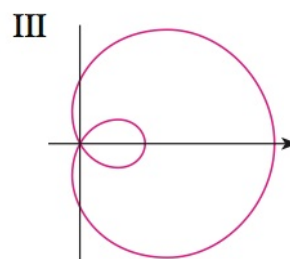
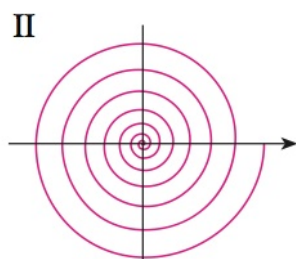
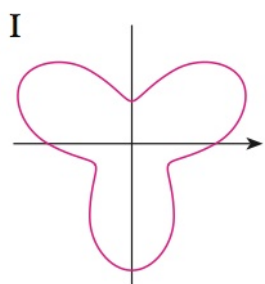


กราฟจากตัวอย่าง 4.1.16 เรียกว่า **เส้นเวียนก้นหอย (Spirals)** ซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$r = a\theta \quad \text{โดยที่ } \theta \geq 0 \text{ หรือ } \theta \leq 0$$

ตัวอย่าง 4.1.17. จงจับคู่กราฟของเส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้กับสมการที่กำหนดให้

- | | | |
|---|---|-----------------------------|
| (1) $r = \sqrt{\theta}, 0 \leq \theta \leq 16\pi$ | (2) $r = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ | (3) $r = 1 + 2\cos\theta$ |
| (4) $r = \theta^2, 0 \leq \theta \leq 16\pi$ | (5) $r = 2 + \sin 3\theta$ | (6) $r = 1 + 2\sin 3\theta$ |



4.2 กราฟในปริภูมิ 3 มิติ ระบบพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม (Graphs in three-dimensional rectangular, cylindrical and spherical coordinates)

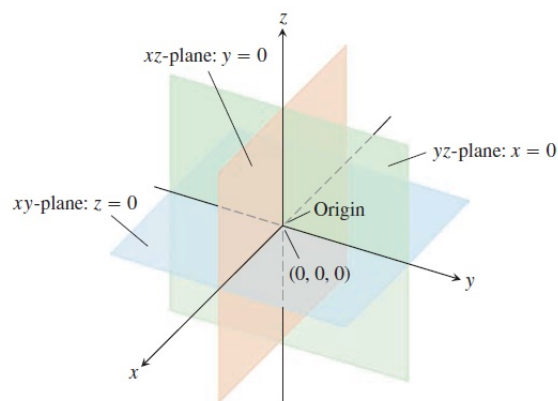
กราฟในปริภูมิ 3 มิติ

ระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ (rectangular coordinate) เกิดจากการที่แกน X แกน Y และแกน Z ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ทำให้เกิดระนาบขึ้น 3 ระนาบ ดังนี้

ระนาบ XY ซึ่งประกอบด้วยแกน X และแกน Y หรือเรียกว่าระนาบ $z = 0$

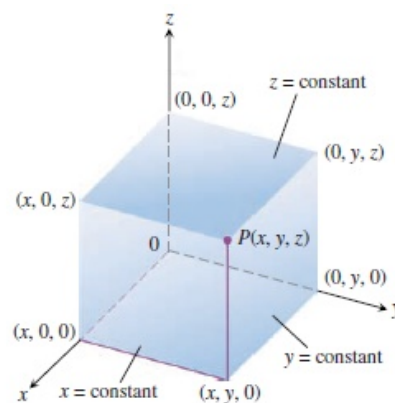
ระนาบ XZ ซึ่งประกอบด้วยแกน X และแกน Z หรือเรียกว่าระนาบ $y = 0$

ระนาบ YZ ซึ่งประกอบด้วยแกน Y และแกน Z หรือเรียกว่าระนาบ $x = 0$



รูปที่ 4.14: ระนาบ $x = 0, y = 0$ และ $z = 0$

ให้ P เป็นจุดใดๆ ในปริภูมิ 3 มิติ จะบอกตำแหน่งของ P ด้วยลำดับ (x, y, z) ดังรูปที่ 4.15

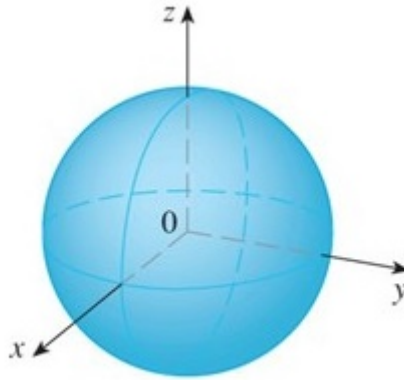


รูปที่ 4.15: จุด $P(x, y, z)$ ในระบบพิกัดฉาก

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร x, y และ z อาจเขียนได้ในรูป $z = f(x, y)$ หรือ $F(x, y, z) = 0$ เซตของจุด (x, y, z) ที่สอดคล้องกับสมการ $z = f(x, y)$ หรือ $F(x, y, z) = 0$ เรียกว่า **พื้นผิว** และเรียก $z = f(x, y)$ หรือ $F(x, y, z) = 0$ ว่า **สมการพื้นผิว**

ในบทนี้เราจะศึกษาพื้นผิวในสามมิติ ดังต่อไปนี้

ทรงกลม (Spheres)



รูปที่ 4.16: ทรงกลม

โดยทั่วไปแล้วทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k, l) และมีรัศมี r จะมีสมการคือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

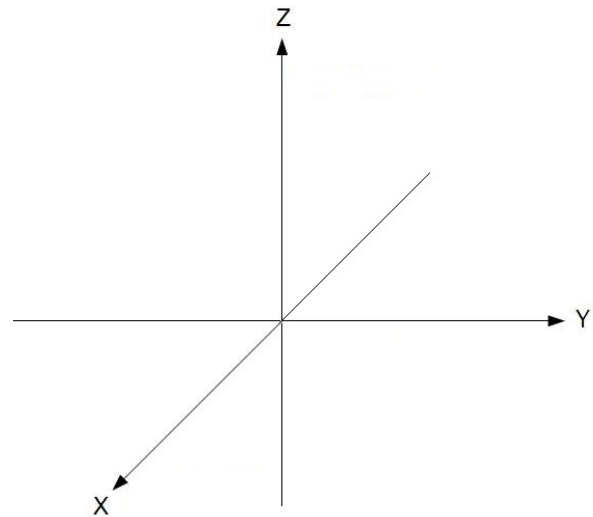
$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

ตัวอย่าง 4.2.1. จงพิจารณาว่าสมการ $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ เป็นสมการทรงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

พื้นผิวเชิงทรงกระบอก (Cylindrical surfaces)

พื้นผิวเชิงทรงกระบอก คือพื้นผิวที่เกิดจากการเลื่อนเส้นโค้งบนระนาบหนึ่ง ขนานไปกับเส้นคงที่เส้นหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า **เส้นก่อกำเนิด**

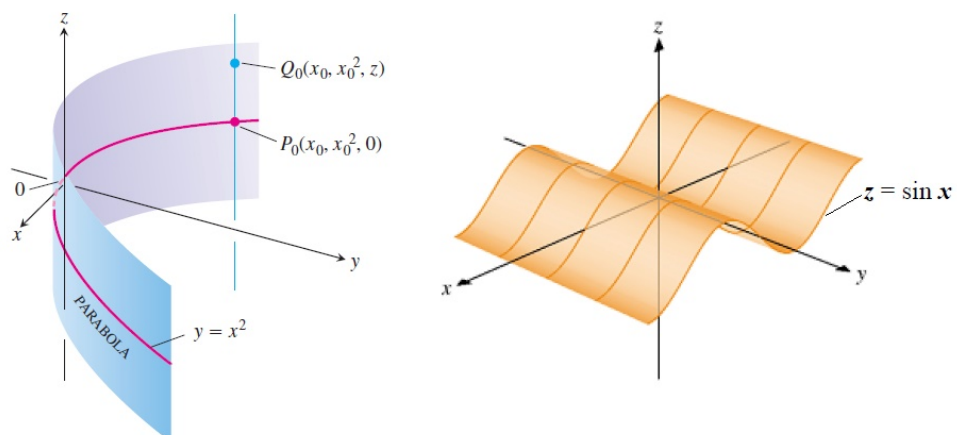
ตัวอย่าง 4.2.2. จงเขียนกราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 4$ ในสามมิติ



ข้อสังเกต

- (1) สมการพื้นผิวเชิงทรงกระบอกจะมีตัวแปรเพียง 2 ตัวแปรจากตัวแปร x, y, z
- (2) เส้นก่อกำเนิดของพื้นผิวคือแกนของตัวแปรที่ไม่ปรากฏในสมการ หรือเป็นเส้นตรงที่ขนานไปกับแกนของตัวแปรดังกล่าว

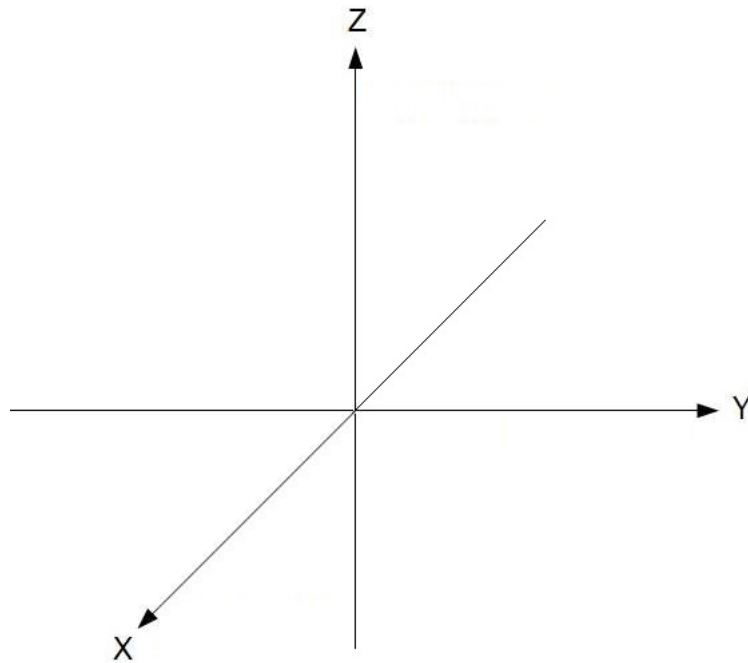
รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของพื้นผิวเชิงทรงกระบอกอื่นๆ



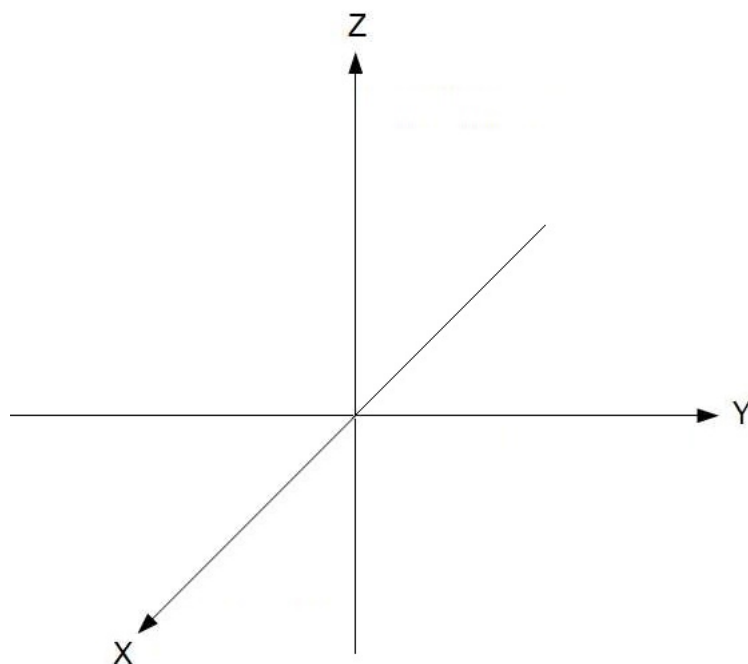
รูปที่ 4.17: พื้นผิวเชิงทรงกระบอก

ตัวอย่าง 4.2.3. จงเขียนกราฟของสมการพื้นผิวเชิงทรงกระบอกต่อไป ในสามมิติ

(i) $z = 4 - x^2$



(ii) $z^2 = 1 + y^2$



พื้นผิวกำลังสอง (Quadric surfaces)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาลักษณะของกราฟของสมการกำลังสองของสามตัวแปร x, y, z ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

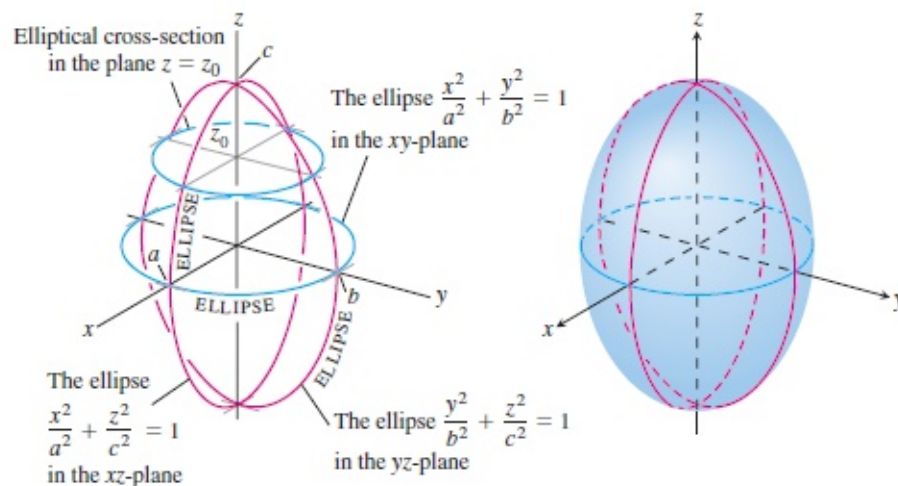
พื้นผิวกำลังสองที่สำคัญมีดังนี้

- ทรงรี (ellipsoids)

มีรูปแบบสมการคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ตัดแกน X แกน Y และ แกน Z ที่จุด $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ และ $(0, 0, \pm c)$ ตามลำดับ มีรอยตัดบนระนาบ XY , XZ และ YZ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ และ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ตามลำดับ



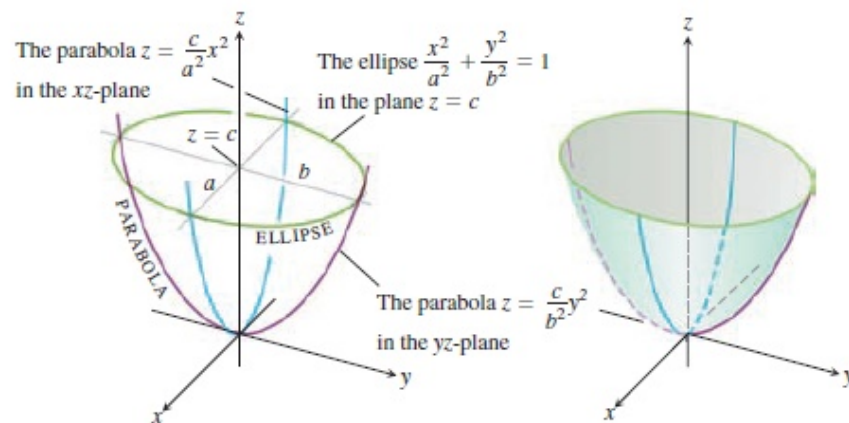
รูปที่ 4.18: ทรงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

- พาราโบลอยด์เชิงวงรี (elliptic paraboloid)

มีรูปแบบสมการคือ $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

ตัดแกน Z ที่จุด $(0, 0, 0)$ มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นโค้งพาราโบลา $z = \frac{c}{a^2}x^2$

และ $z = \frac{c}{b^2}y^2$ ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ $z = c$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



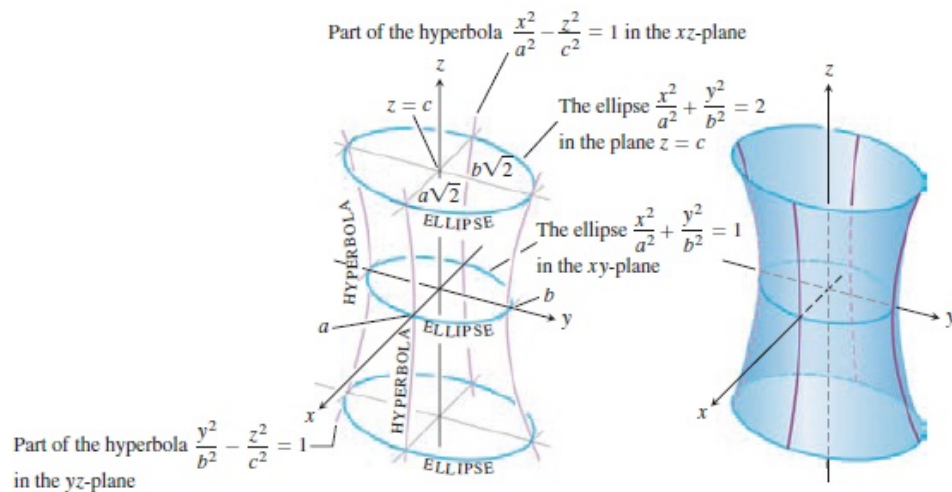
รูปที่ 4.19: พาราโบลอยด์เชิงวงรี $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

• ไฮเพอร์โบลอยด์เชือกมโยง (one sheeted hyperboloid)

มีรูปแบบสมการคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นโค้งไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ และ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ XY และระนาบ $z = c$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ ตามลำดับ

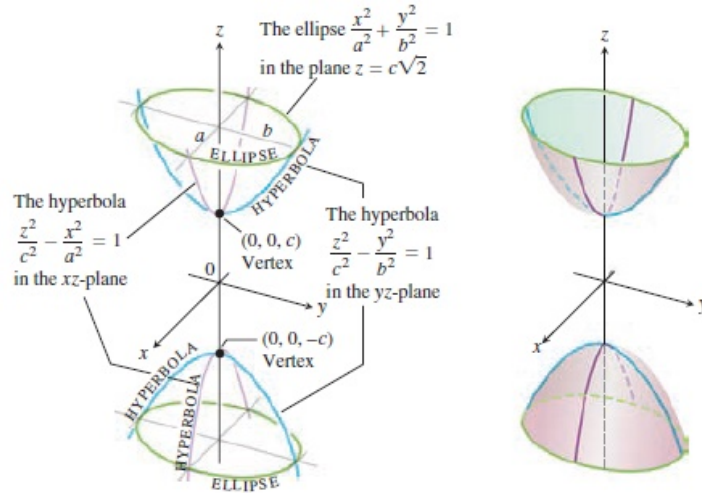


รูปที่ 4.20: ไฮเพอร์โบลอยด์เชือกมโยง $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

• ไฮเพอร์โบลอยด์แยกส่วน (two sheeted hyperboloid)

มีรูปแบบสมการคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

ตัดแกน Z ที่จุด $(0, 0, \pm c)$ มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นโค้งไฮเพอร์โบล่า $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ และ $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ $z = c\sqrt{2}$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

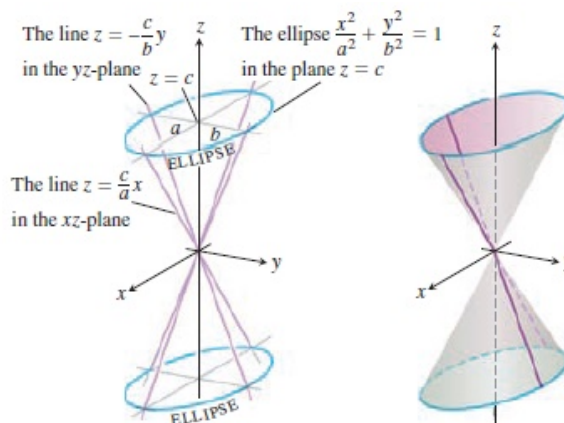


รูปที่ 4.21: ไฮเพอร์โบลอยด์แยกส่วน $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

• กรวยเชิงวงรี (elliptic cone)

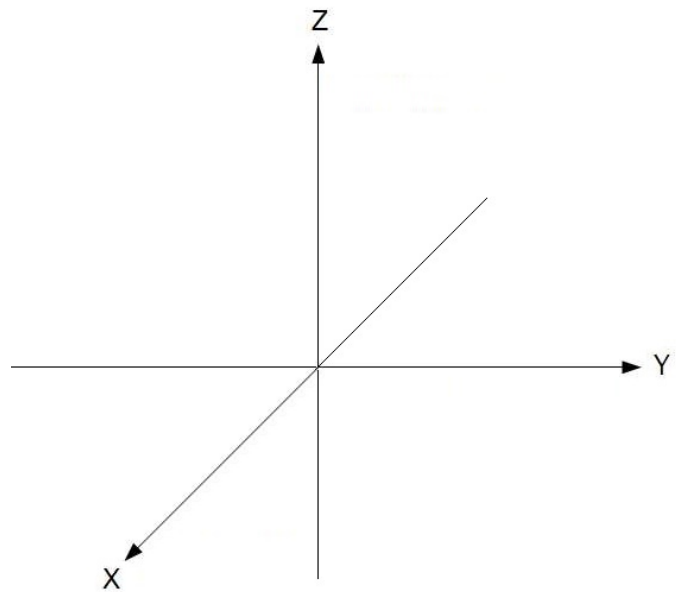
มีรูปแบบสมการคือ $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

ตัดแกน Z ที่จุด $(0, 0, 0)$ มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นตรง $z = \frac{c}{a}x$ และ $z = -\frac{c}{b}y$ ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ $z = c$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

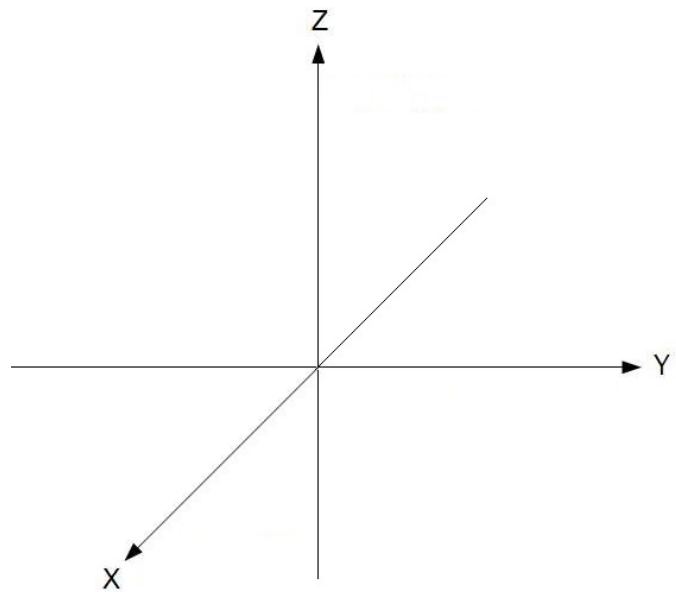


รูปที่ 4.22: กรวยเชิงวงรี $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

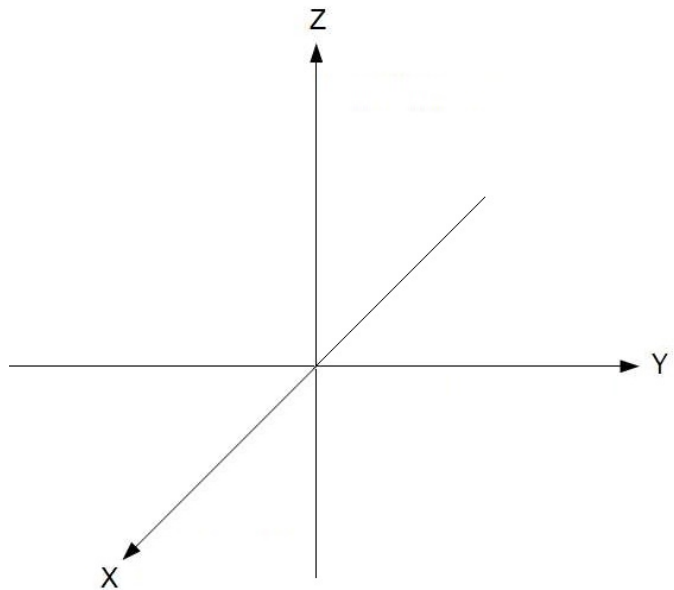
ตัวอย่าง 4.2.4. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$



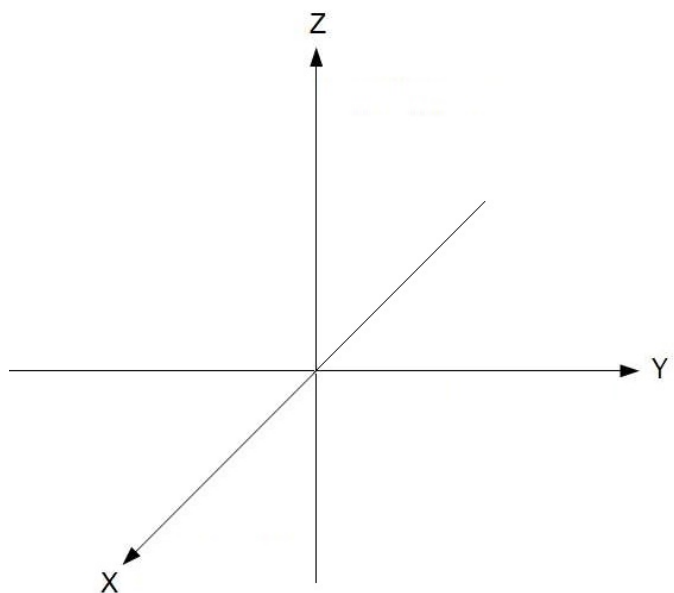
ตัวอย่าง 4.2.5. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $x^2 + 4z^2 - y = 0$



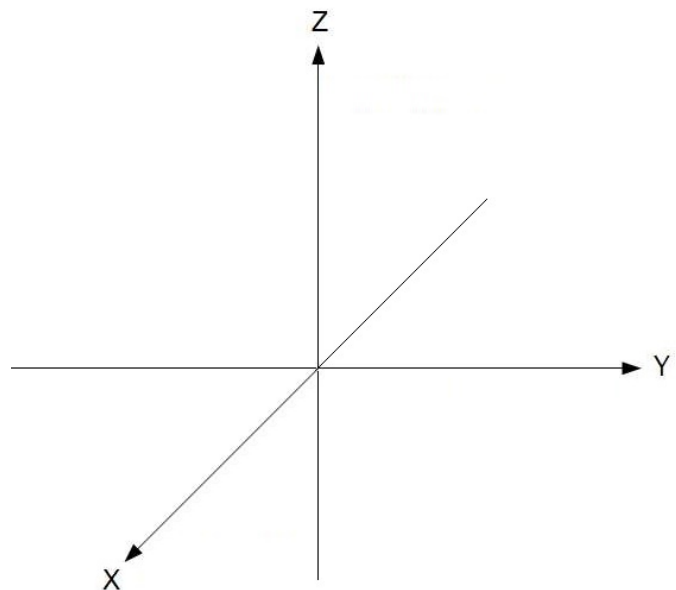
ตัวอย่าง 4.2.6. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $y^2 = x^2 + z^2$



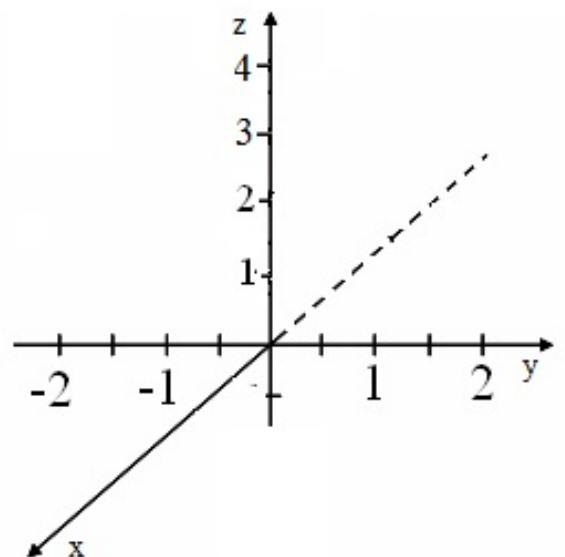
ตัวอย่าง 4.2.7. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$



ตัวอย่าง 4.2.8. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$



ตัวอย่าง 4.2.9. จงวาดรูปและแรเงาทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยพื้นผิว $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ และปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z - (2 + \sqrt{3}) = -\sqrt{x^2 + y^2}$



ตัวอย่าง 4.2.10. จงจับคู่กราฟของพื้นผิวในสามมิติต่อไปนี้กับสมการที่กำหนดให้

(A) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

(C) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

(E) $y = 2x^2 + z^2$

(G) $x^2 + 2z^2 = 1$

(I) $z = 2x^2$

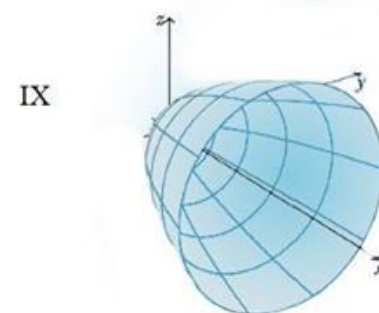
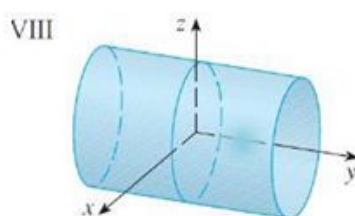
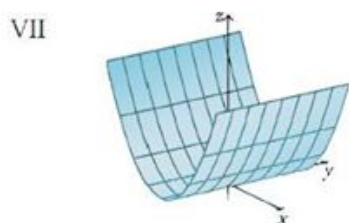
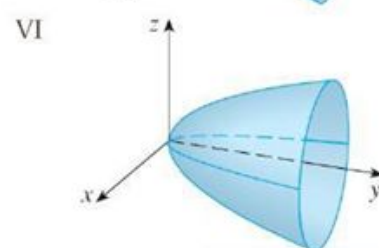
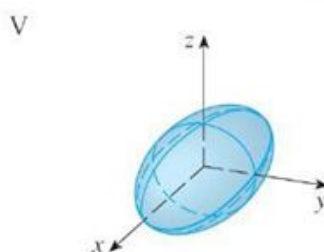
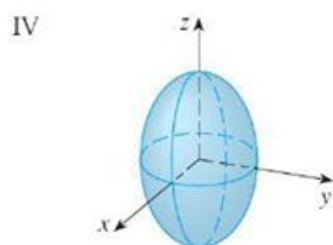
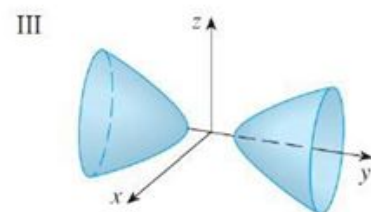
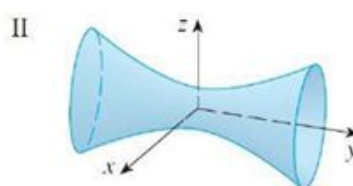
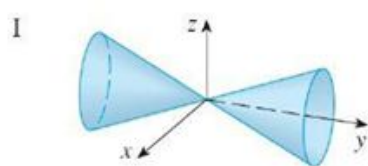
(B) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

(D) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(F) $y^2 = x^2 + 2z^2$

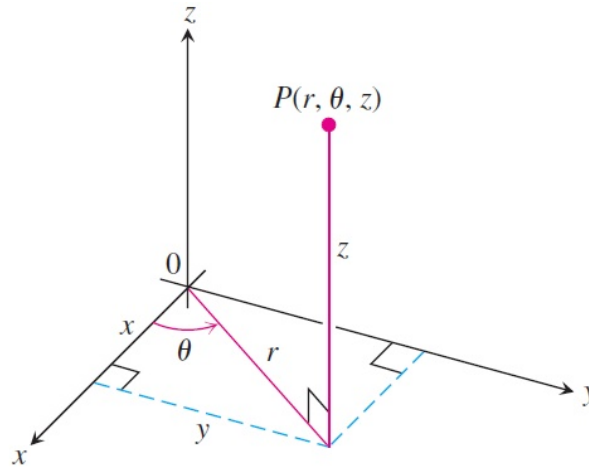
(H) $y = x^2 - z^2$

(K) $\frac{x}{4} = y^2 + z^2$



พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinates)

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใน 3 มิติ นอกเหนือจากพิกัดฉาก (x, y, z) เรายังสามารถบอกตำแหน่งของ P ได้ด้วยพิกัด $P(r, \theta, z)$ เมื่อ r และ θ คือพิกัดเชิงขั้วของจุดที่ได้จากการโปรเจกชันจุด P ลงบนระนาบ XY ดังรูป



รูปที่ 4.23: พิกัดทรงกระบอก

ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y, z) และ (r, θ, z) ดังนี้

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

ในทางกลับกัน เราจะได้ว่า

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$

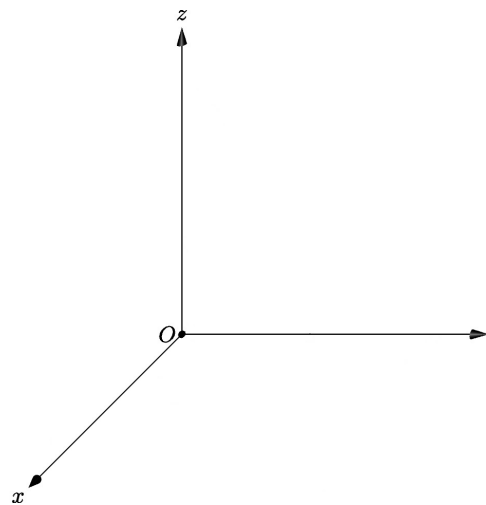
ตัวอย่าง 4.2.11.

- (1) จงเขียนจุด $(5, \frac{\pi}{6}, 4)$ ใน 3 มิติพร้อมทั้งเปลี่ยนให้เป็นพิกัดฉาก

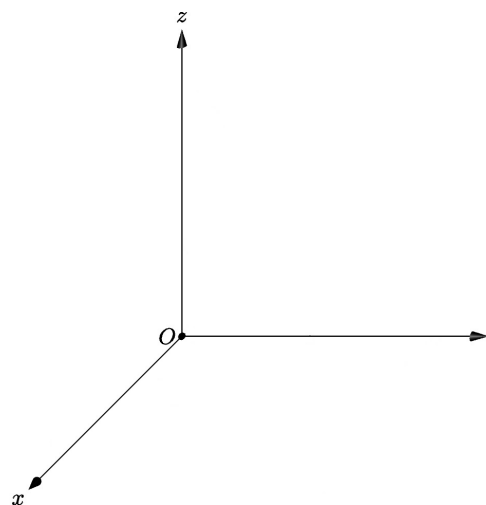
(2) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(3, -3, -7)$ ให้เป็นพิกัดทรงกระบอก

ตัวอย่าง 4.2.12. จงเขียนกราฟของพื้นผิวต่อไปนี้ในพิกัดทรงกระบอก

(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$



(2) $r^2 + z^2 = 9$

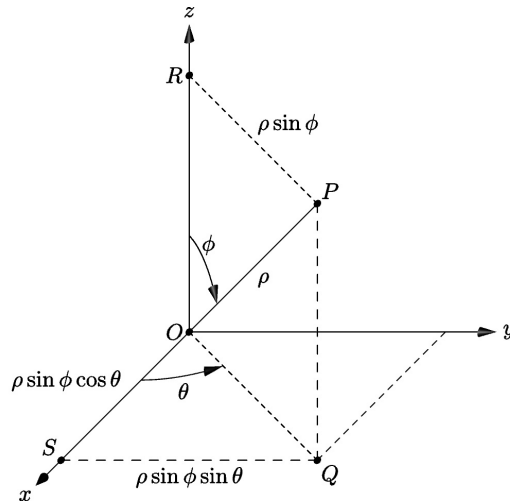


พิกัดทรงกลม (Spherical coordinates)

นอกเหนือจากพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอกแล้ว เรายังสามารถบอกตำแหน่งของจุดใน 3 มิติด้วยพิกัดทรงกลมได้อีกด้วย

เราสามารถเขียนแทน $P(x, y, z)$ ได้ด้วยพิกัดทรงกลม $P(\rho, \theta, \phi)$ เมื่อ ρ คือ ขนาดของเส้นตรง OP ที่เชื่อมระหว่าง P และจุดกำเนิด O

θ คือ มุมที่เส้นตรงที่เกิดจากการโปรเจกชันเส้นตรง OP ลงบนระนาบ XY ทำกับแกน X ในทิศวนเข็มนาฬิกา, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ และ ϕ คือ มุมที่เส้นตรง OP ทำกับแกน Z บวก, $0 \leq \phi \leq \pi$



รูปที่ 4.24: พิกัดทรงกลม

จากรูปที่ 4.24 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y, z) และ (ρ, θ, ϕ) ดังนี้

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

และ

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทรงกระบอก $P(r, \theta, z)$ และพิกัดทรงกลม $P(\rho, \theta, \phi)$ ได้ดังนี้

$$r = \rho \sin \theta \quad \theta = \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

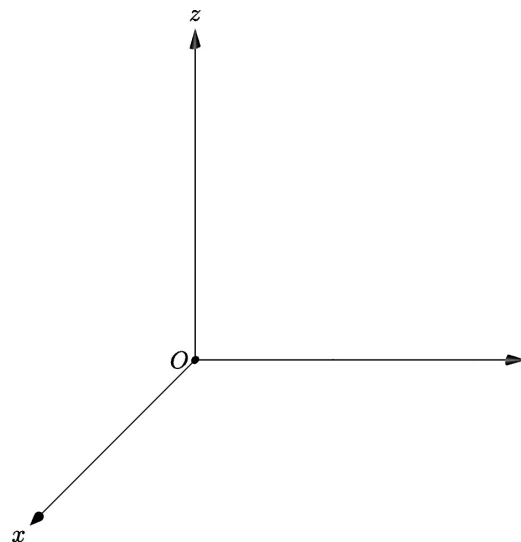
ตัวอย่าง 4.2.13.

(a) จงเขียนจุด $(8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ ใน 3 มิติพร้อมทั้งเปลี่ยนให้เป็นพิกัดฉาก

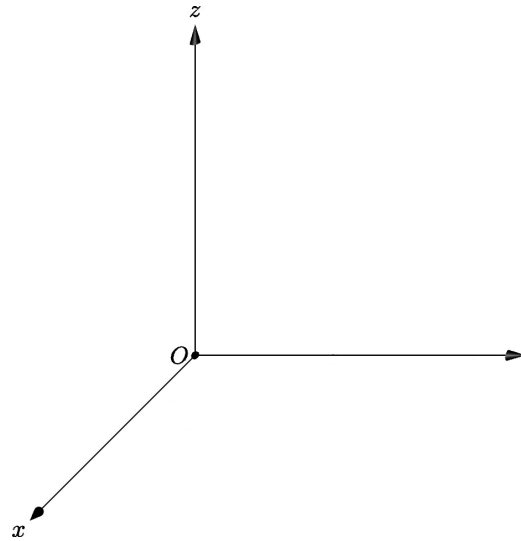
(b) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(1, 1, \sqrt{2})$ ให้เป็นพิกัดทรงกลม

ตัวอย่าง 4.2.14. จงเขียนกราฟของพื้นผิวต่อไปนี้ในพิกัดทรงกลม

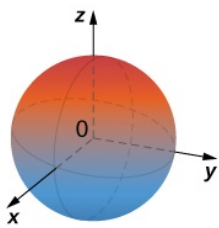
(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$



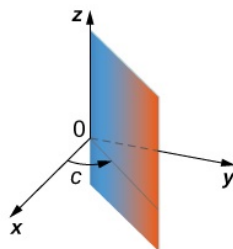
$$(2) \phi = \frac{\pi}{4}, \quad \phi = \frac{3\pi}{4}$$



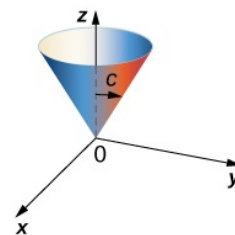
ตัวอย่างอื่นๆ ของกราฟในระบบพิกัดทรงกลม



Sphere $\rho = c$ (constant)

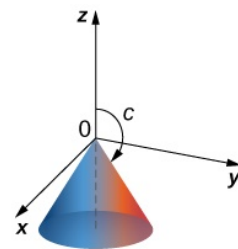


Half plane $\theta = c$ (constant)



$$0 < c < \frac{\pi}{2}$$

Half cone $\phi = c$ (constant)



$$\frac{\pi}{2} < c < \pi$$

รูปที่ 4.25: กราฟในระบบพิกัดทรงกลม