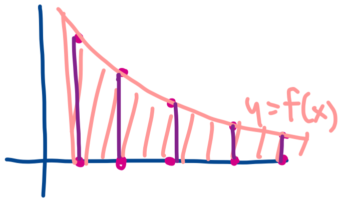
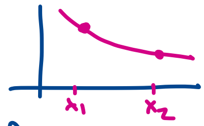
Series อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & ; |r| < 1 \\ \text{diverge} & ; |r| \geq 1 \end{cases}$



$\int_1^{+\infty} f(x)dx$

4.4 Convergence tests for a series with positive terms



4.4.1 The Integral Test

f เป็นฟังก์ชันลด
ถ้า $x_1 \le x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2)$

① ② ③

Theorem 4.5. *Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series with positive terms. If f is a function that is decreasing and continuous on an interval $[a,\infty)$ such that $f(n) = a_n$ for all $n \geq a$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\int_a^{\infty} f(x)dx$ both converge or both diverge.*

Ex. 4.6. Show that the integral test applies, and use the integral test to determine whether the following series converge or diverge.

CAL 1 ถ้า $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a,b)
ถ้า $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน (a,b)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

เลือกฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^2}$ บน $[1,\infty)$

① f cont บน $[1,\infty)$

② f เป็นฟังก์ชันลดบน $[1,\infty)$?

$f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันลดบน $[1,\infty)$

③ $f(n) = \frac{1}{n^2} = a_n \quad \forall n \geq 1$

Check $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\cancel{\frac{1}{b}} + 1\right] = 1$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converges โดย integral test ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ จะลู่เข้า # (Converges)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}} =$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

เลือกฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ บน $[1,\infty)$

$\to f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$

① f cont บน $[1,\infty)$

② f เป็นฟังก์ชันลดบน $[1,\infty)$?

$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}} < 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$

③ $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n \quad \forall n \geq 1$

Check $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{b} - 2\right] = +\infty$

$\therefore \int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverges โดย integral test ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ จะลู่ออก # (diverges).

Ex อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้ integral test

① เลือกฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ บน $[1,\infty)$ $\Rightarrow$ f cont บน $[1,\infty)$

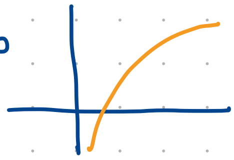
② f เป็นฟังก์ชันลดบน $[1,\infty)$?
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$

③ $f(n) = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

ตรวจสอบ
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|b| - \cancel{\ln 1}^{\,0}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln|b| = +\infty$$

$1 \quad\quad b \quad +\infty$



$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverges

จึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges. #

อนุกรม p (p-series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (p>0)$

$\Downarrow$

Set $p=1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ ← harmonic series.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converges} & \text{ถ้า } p>1 \\ \text{diverges} & \text{ถ้า } 0<p\leq 1 \end{cases}$$

(Proof โดย integral test. เลือก $f(x) = \frac{1}{x^p}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1}\right]$$)

Converges

- Geometric series $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ s.t. $|r|<1$
- Telescopic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
- p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ s.t. $p>1$

diverges

- Geometric Series $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ s.t. $|r|\geq 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s.t. $a_n \neq 0$
- harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ s.t. $0<p\leq 1$

Thm ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ หรือ หาค่าไม่ได้ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges

$\Updownarrow$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ข้อความคาดการณ์ (เดา) ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ← ไม่จริง

counter example
ตัวอย่างค้าน พิจารณา $a_n = \frac{1}{n}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges

Definition 4.6. *A $p-$series is an infinite series of the form*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

where $p > 0$. In the case $p = 1$, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

is called the ***harmonic series.***

Theorem 4.7. *A $p-$series converges if $p > 1$ and diverges if $0 < p \leq 1$.*

Ex. 4.7. Determine whether the following series converges or diverges.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e}$

จาก $e \approx 2.7 > 1$ โดยอนุกรม p ซึ่ง $p > 1$

ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e}$ converges #

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sin 26^\circ}}$

จาก $\sin 26^\circ < \sin 30^\circ = \frac{1}{2} < 1$

โดยอนุกรม p ซึ่ง $0 < p < 1$

ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sin 26^\circ}}$ diverges #

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $|r| = \left|\frac{1}{e}\right| < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ converges #

ทด $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$ ให้ $u=x^2$; $du=2x\,dx$

$\therefore \frac{1}{2}\int \frac{2x}{e^{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^u}du = \frac{1}{2}\int e^{-u}du = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

$\forall x\in[1,\infty)$, $x\geq 1$, $2x^2 > x^2 \geq 1$ $\therefore \boxed{1-2x^2<0}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ $f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}$ บน $[1,\infty)$

① f cont บน $[1,\infty)$

② f เป็น decreasing f^{n} ?

$f'(x) = \frac{e^{x^2}-x\cdot e^{x^2}(2x)}{(e^{x^2})^2} = \frac{e^{x^2}-2x^2e^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{e^{x^2}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^2} < 0$ $\forall x\in[1,\infty)$

$\therefore$ f decreasing function บน $[1,\infty)$

③ $f(n)=\frac{n}{e^{n^2}}$ $\forall n\geq 1$

พิจารณา $\int_1^{+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{x}{e^{x^2}}dx\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-1}\right]$

$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2e^{b^2}}+\frac{1}{2e}\right] = \frac{1}{2e}$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx$ converges โดย integral test สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ converges #

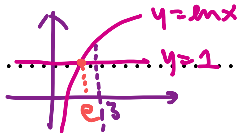
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

① เลือก $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ บน $[2,\infty)$ cont. ✓

② f decreasing บน $[2,\infty)$?

$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$

$1-\ln x$ เป็นลบ ถ้า $\ln x>1$ ถ้า $x>e\approx 2.7$ ได้ว่า $\ln x>1$ ✓ ถ้า $x\in(e,\infty)\subseteq[3,\infty)$



$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันลดบน $[3,\infty)$

③ $f(n)=\frac{\ln n}{n}$ เมื่อ $n\geq 3$

พิจารณา $\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b\frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln b)^2}{2}-\frac{(\ln 3)^2}{2}\right] = +\infty$ div.

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ diverges โดย integral test ดังนั้นได้ว่า $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ diverges #

ทด $\int\frac{\ln x}{x}dx$ ให้ $u=\ln x$; $du=\frac{1}{x}dx$

$\int\frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+C = \frac{(\ln x)^2}{2}+C$

4.4.2 The Comparison Test

Theorem 4.8. *Let* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *be series with nonnegative terms and suppose that and* $a_1\leq b_1, a_2\leq b_2, a_3\leq b_3, ..., a_k\leq b_k, ...$

1. *If* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *converge, then* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *converge.*
2. *If* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *diverge, then* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *diverge.*

Ex. 4.8. Determine whether the following series converges or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-\frac{1}{2}}$

....

....

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n-1}}$