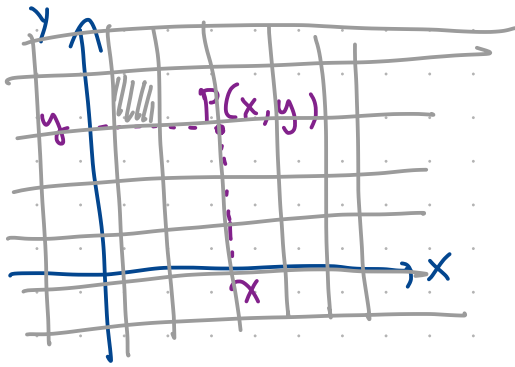
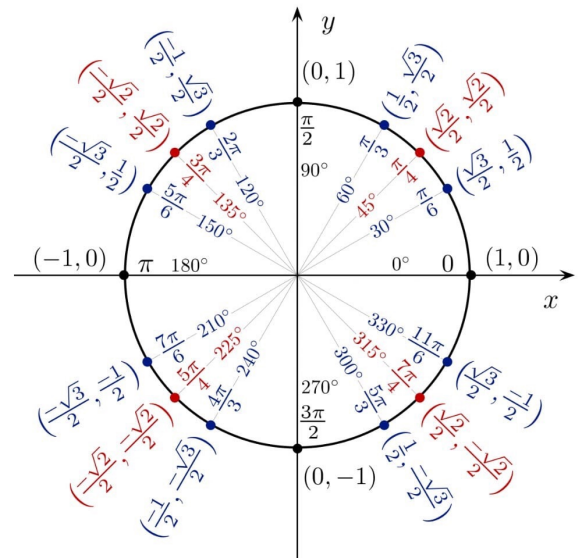
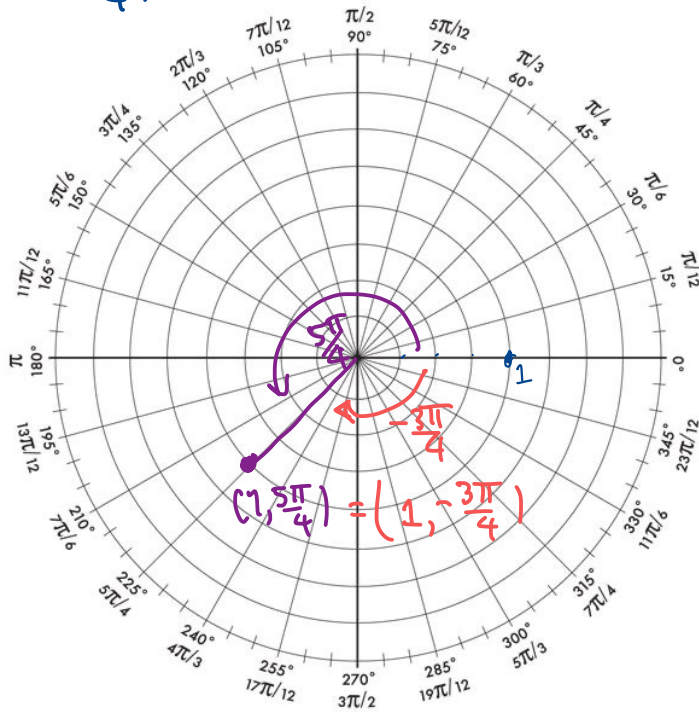
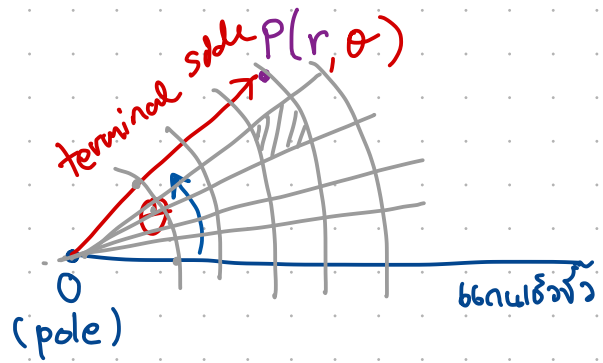


5. ขั้วอิสระ degree of freedom



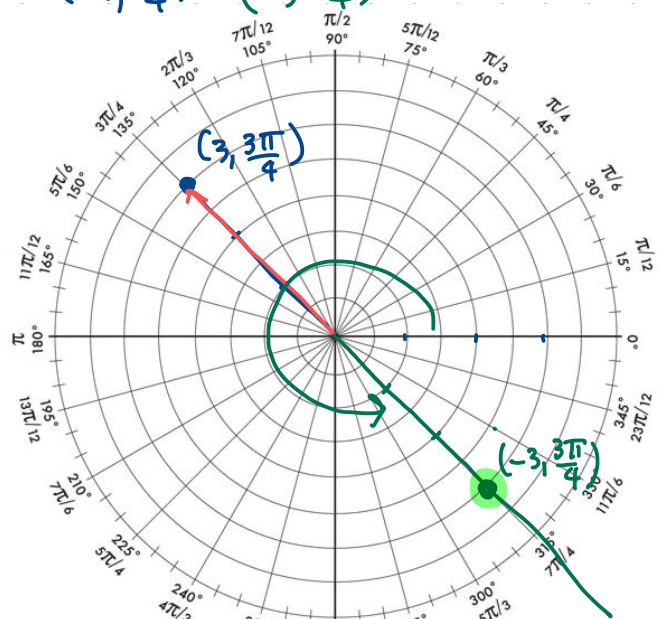
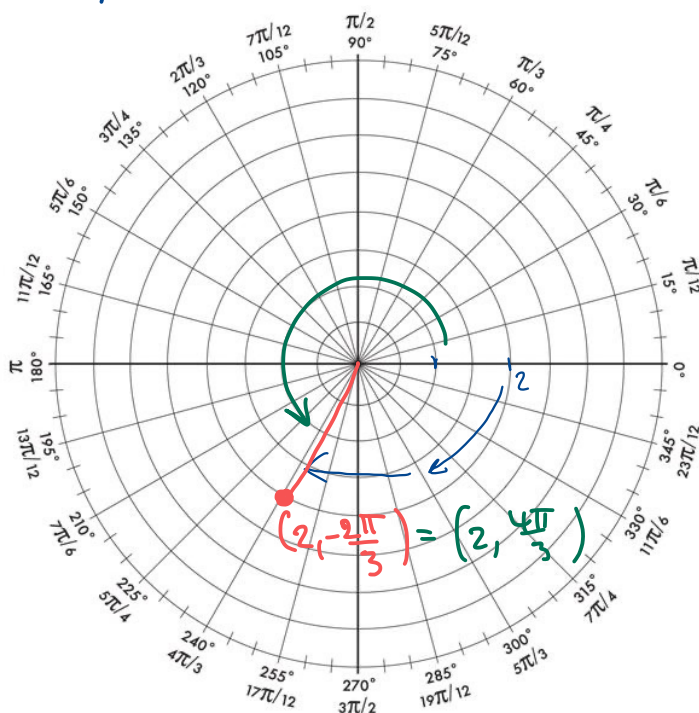
$$(1, \frac{5\pi}{4})$$

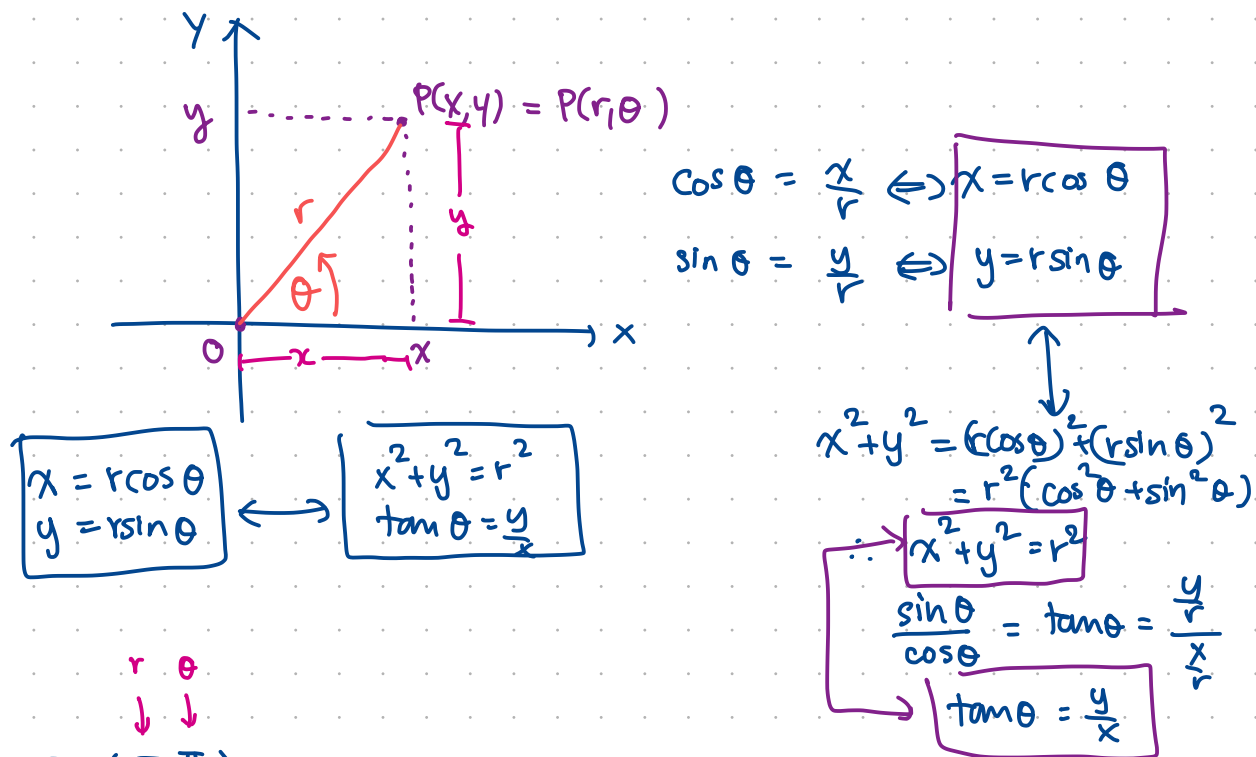


$$\text{ทวน} \left[(-r, \theta) = (r, \theta + \pi) \right]$$

$$(-3, \frac{3\pi}{4}) = (3, \frac{7\pi}{4})$$

$$(2, -\frac{2\pi}{3})$$



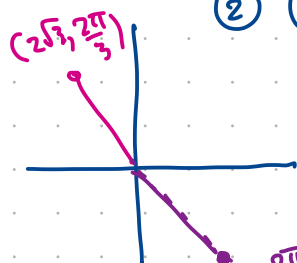


Ex 4.1.2 ① $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

$$\therefore x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$y = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$\therefore$ พิกัดฉากคือ $(1, 1)$

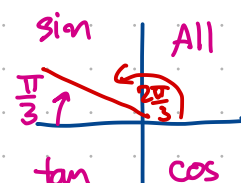


② $(-2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}) \in \mathbb{Q}_4$

$$x = -2\sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) = (-2\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = -2\sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = (-2\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3$$

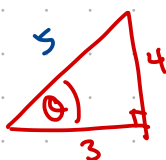
$\therefore$ พิกัดฉากคือ $(\sqrt{3}, -3)$



③ $(5, \tan^{-1}(\frac{4}{3}))$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \text{ ถ้า } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$



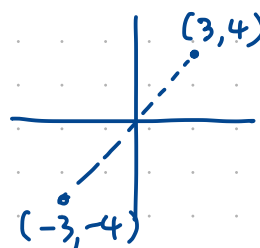
$$\Rightarrow x = r \cos \theta$$

$$\therefore x = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\therefore y = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

พิกัดฉากคือ $(3, 4)$



$(3, 4) \in \mathbb{Q}_1$

บทที่ 4

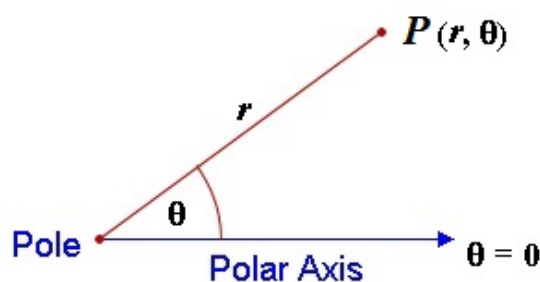
กราฟในปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ (Graphs in two and three-dimensional spaces)

4.1 กราฟในปริภูมิ 2 มิติ ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Graphs in two-dimensional space; polar coordinates)

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

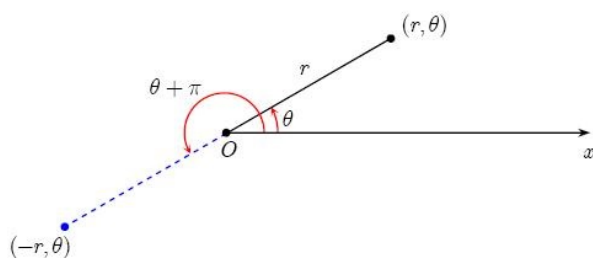
ให้ O เป็นจุดกำเนิดในระนาบ เรียก O ว่า **ขั้ว (pole)** หรือ **จุดกำเนิด (origin)** และลากเส้นตรงจากจุด O ในแนวราบไปทางขวามือและสมนัยกับแกน X ด้านบวกในระบบพิกัดฉาก เรียกว่า **แกนเชิงขั้ว (polar axis)**

กำหนดให้ P เป็นจุดใดๆ ในระนาบ ให้ r เป็นระยะจากจุด O ถึงจุด P และให้ θ เป็นมุมระหว่างแกนเชิงขั้วกับส่วนของเส้นตรง OP ดังรูป โดยมุม θ มีค่าบวกเมื่อวัดในทิศทวนเข็มนาฬิกา และมีค่าลบเมื่อวัดในทิศตามเข็มนาฬิกา เราสามารถแทนจุด P ได้ด้วยคู่อันดับ (r, θ) และเรียก r กับ θ ว่า **พิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate)** ของ P



รูปที่ 4.1: ระบบพิกัดเชิงขั้วในปริภูมิ 2 มิติ

ในกรณีที่จุด P คือจุด O เราจะพบว่า $r = 0$ และตกลงให้ $(0, \theta)$ แทนจุดกำเนิดสำหรับทุกค่าใดๆ ของ θ สำหรับกรณีที่ $r < 0$ เราจะให้จุด $(-r, \theta)$ เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด (r, θ) ผ่านจุด O ดังรูป สังเกตว่าจุด $(-r, \theta)$ แทนจุดเดียวกันกับจุด $(r, \theta + \pi)$



รูปที่ 4.2: พิกัดเชิงขั้วของจุดที่มีค่า r เป็นลบ

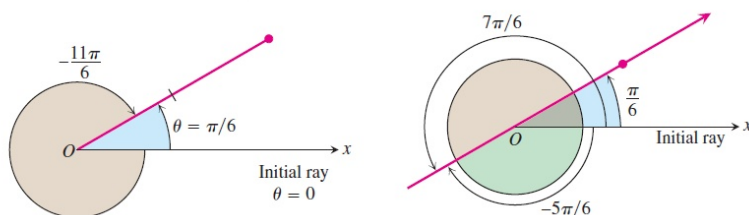
ตัวอย่าง 4.1.1. จงเขียนจุดต่อไปนี้บนระนาบเชิงขั้ว

(1) $(1, \frac{5\pi}{4})$

(2) $(2, -\frac{2\pi}{3})$

(3) $(-3, \frac{3\pi}{4})$

ในระบบพิกัดฉากนั้น จุดทุกจุดจะมีเพียงพิกัดเดียวเท่านั้น แต่ในระบบเชิงขั้วจุดหนึ่งจุดมีได้หลายพิกัด ยกตัวอย่างเช่น จุด $P(2, \frac{\pi}{6})$ สามารถแทนได้ด้วยพิกัด หรือ หรือ ดังรูปที่ 4.3

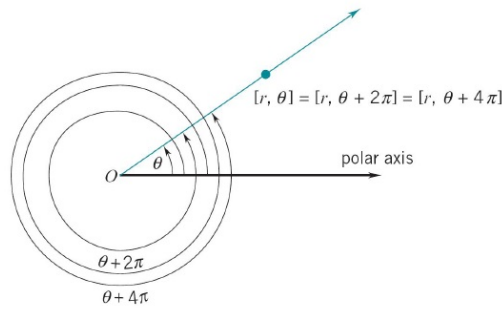


รูปที่ 4.3: พิกัดเชิงขั้วแบบต่างๆ ของจุด $P(2, \frac{\pi}{6})$

ในกรณีทั่วไป เรากล่าวได้ว่าจุดที่แทนด้วยพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) สามารถแทนด้วยพิกัด

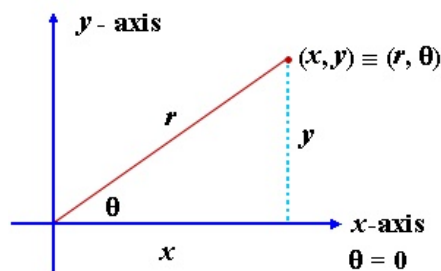
$$(r, \theta + 2n\pi) \text{ หรือ } (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ



รูปที่ 4.4: รูปแบบทั่วไปของจุดในพิกัดเชิงขั้วแบบต่างๆ ของจุด

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก สามารถพิจารณาได้จากรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.5: ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

จากรูปที่ 4.5 จะเห็นว่าถ้าจุด P มีพิกัดฉากเป็น (x, y) และพิกัดเชิงขั้วเป็น (r, θ) แล้ว $\cos \theta = \frac{x}{r}$ และ $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ดังนั้น

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นช่วยให้เราสามารถหาพิกัดฉากได้ เมื่อทราบพิกัดเชิงขั้ว และในทางกลับกันเราสามารถเมื่อทราบพิกัดฉาก เราสามารถหาพิกัดเชิงขั้วได้จาก

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง 4.1.2. จงหาพิกัดฉากของจุดที่มีพิกัดเชิงขั้วเป็น $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $(-2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3})$ และ $(5, \tan^{-1}(\frac{4}{3}))$

4 possible cases

- ① $r > 0 ; 0 < \theta \leq 2\pi$
- ② $r > 0 ; -2\pi < \theta \leq 0$
- ③ $r < 0 ; 0 < \theta \leq 2\pi$
- ④ $r < 0 ; -2\pi < \theta \leq 0$

4

บทที่ 4. กราฟในปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ

ตัวอย่าง 4.1.3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด $(-2, -2\sqrt{3})$ โดยกำหนดให้ $x, y \in \mathbb{Q}_3 \rightarrow \text{หา } r, \theta$

(i) $0 < \theta \leq 2\pi$ และ $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = (-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$$

$$\therefore r = \pm 4$$

ดังนั้น $r = 4$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$\therefore$ จุดในพิกัดเชิงขั้ว คือ $(4, \frac{4\pi}{3})$

(ii) $-2\pi < \theta \leq 0$ และ $r < 0$

$$(4, \frac{4\pi}{3}) = (-4, \frac{4\pi}{3} + \pi)$$

$$= (-4, \frac{7\pi}{3})$$

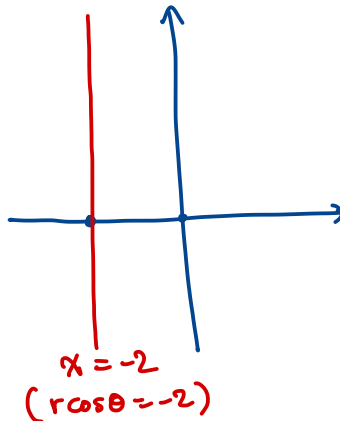
$$= (-4, \frac{\pi}{3})$$

$$(4, \frac{4\pi}{3}) = (4, -\frac{2\pi}{3}) = (-4, -\frac{5\pi}{3}) = (-4, \frac{\pi}{3})$$

เส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

กราฟของสมการเชิงขั้ว $r = f(\theta)$ หรือสมการเชิงขั้วในรูปทั่วไป $F(r, \theta) = 0$ ประกอบด้วยจุดทั้งหมดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) สอดคล้องสมการดังกล่าว

ตัวอย่าง 4.1.4. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r \cos \theta = -2 \Leftrightarrow x = -2$



θ	r
0	-2
$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$
$\vdots$	$\vdots$

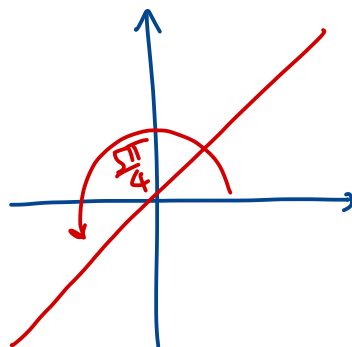
$$r \cos \frac{\pi}{6} = -2$$

$$r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ตัวอย่าง 4.1.5. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $\theta = \frac{5\pi}{4}$



$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan(\frac{5\pi}{4}) = \frac{y}{x}$$

$$y = x$$

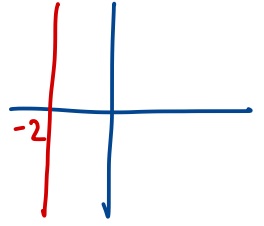
$$\tan(\frac{5\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4})$$

จากตัวอย่าง 4.1.4 และ 4.1.5 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้วจะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

ลักษณะของเส้นตรง	สมการ
เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และตัดกับแกน X ที่จุด $x = a$	$r \cos \theta = a$
เส้นตรงที่ขนานกับแกน X และตัดกับแกน Y ที่จุด $y = b$	$r \sin \theta = b$
เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด	$\theta = \theta_0$

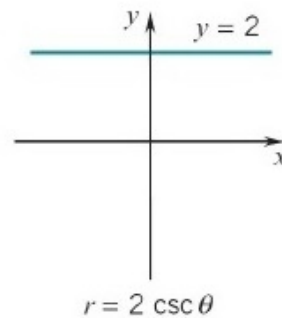
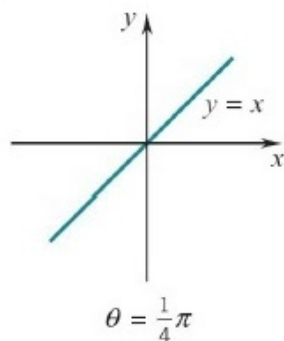
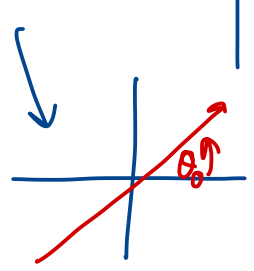
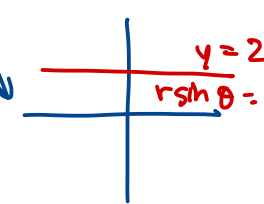
$$r \cos \theta = -2$$

$$x = -2$$



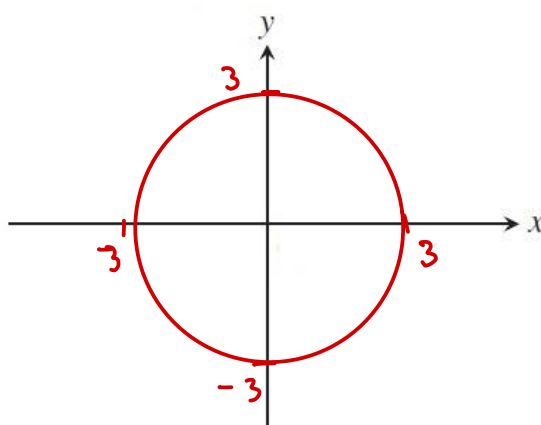
$$y = 2$$

$$r \sin \theta = 2$$



รูปที่ 4.6: เส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 4.1.6. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 3$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 3^2 = 9$$

สมการวงกลม รัศมี 3 หน่วย
จุดก. (0,0)

ตัวอย่าง 4.1.7. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = 6 \sin \theta$ พร้อมทั้งหาสมการในระบบพิกัดฉากของเส้นโค้งนี้

วิธีทำ จากสมการที่โจทย์กำหนดให้ สามารถหาค่า r ได้ตามตาราง และนำค่า r ที่ได้ไปเขียนกราฟได้ดังรูป

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	3	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	6	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	3	0

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้

$$r = 6 \sin \theta \rightarrow r^2 = 6r \sin \theta$$

↓

$$x^2 + y^2 = 6r \sin \theta$$

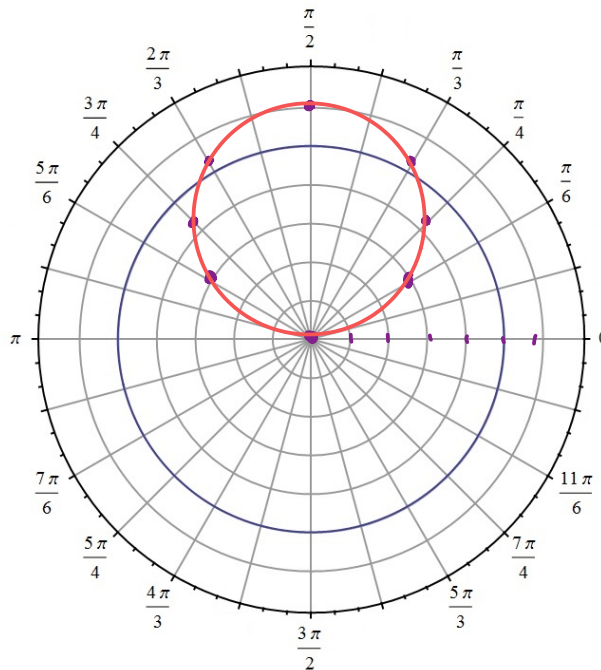
$$x^2 + y^2 = 6y$$

$$x^2 + (y^2 - 6y + 9) = 9$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

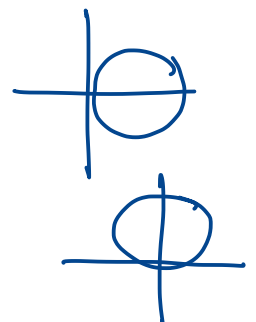
สมการวงกลม
มี จล.ก. ศูนย์ (0, 3)

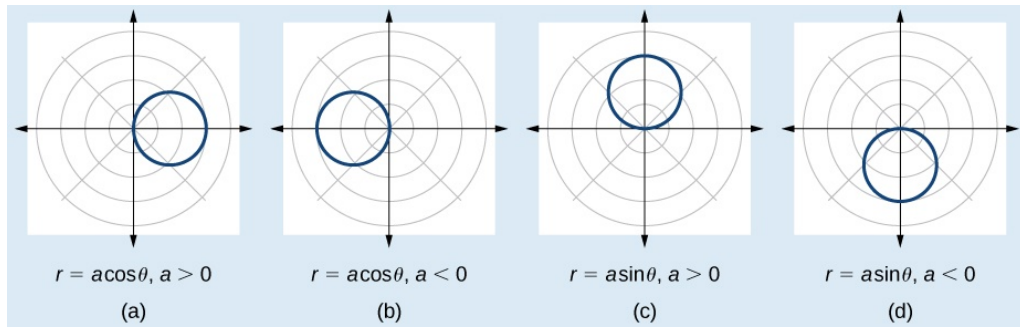
รัศมี 3



จากตัวอย่าง 4.1.6 และ 4.1.7 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการวงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้วจะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

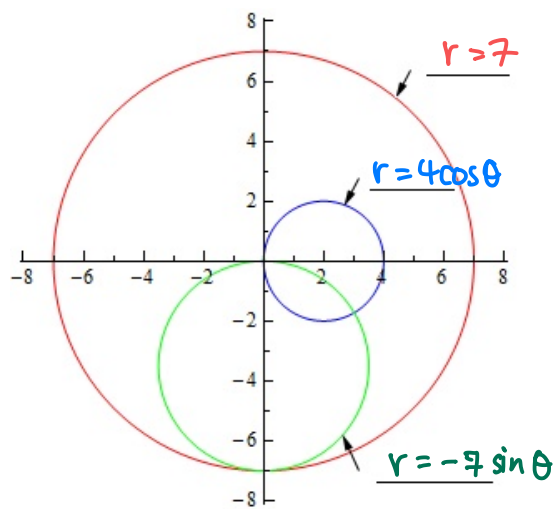
ลักษณะของวงกลม	สมการ
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี a	$\underline{r = a}$
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(a, 0)$ รัศมี $ a $	$r = 2a \cos \theta$
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, b)$ รัศมี $ b $	$r = 2b \sin \theta$





รูปที่ 4.7: วงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 4.1.8. จงเติมสมการวงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้ว ของวงกลมในรูปด้านล่างให้ถูกต้อง



ตัวอย่าง 4.1.9. จงวาดบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

(1) $r \geq 0$ $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

(2) $2 < r \leq 5$; $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$

