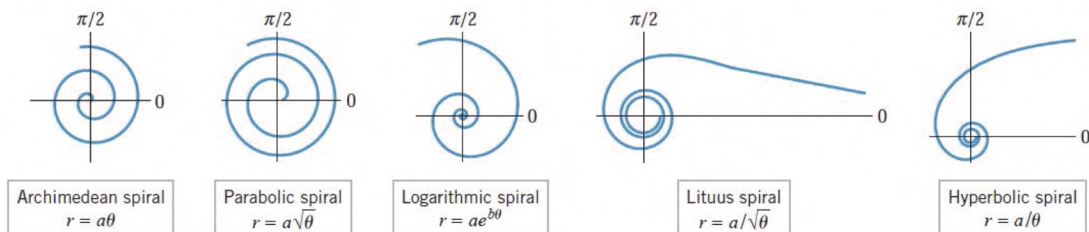


Check ការគណនាអនិច្ចកាល $r = f(\theta)$

- ① ឆ្លាតចរន្តបង្កបង្កើន x : ឆ្លាត θ ច្បាប់ $-\theta$ ត្រូវបានគេស្គាល់
- ② ឆ្លាតចរន្តបង្កបង្កើន y : ឆ្លាត θ ច្បាប់ $\pi - \theta$ ត្រូវបានគេស្គាល់
- ③ ឆ្លាតចរន្តបង្កបង្កើន z : ឆ្លាត θ ច្បាប់ $\pi + \theta$ ឬ $-\theta$ ត្រូវបានគេស្គាល់

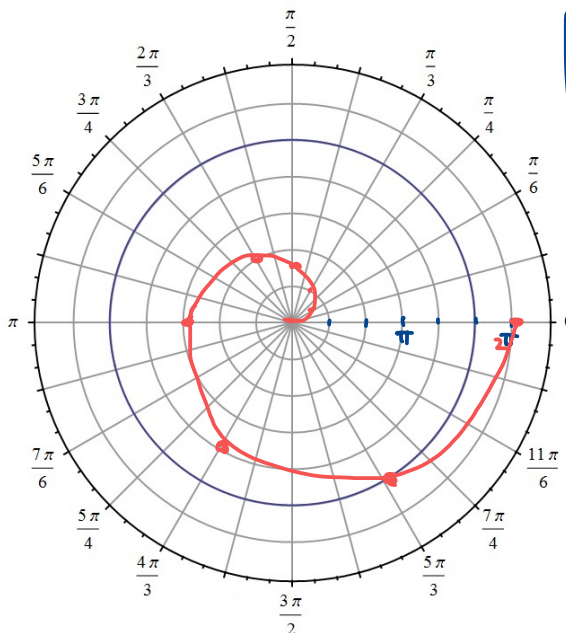
Families of Spirals

A *spiral* is a curve that coils around a central point. Spirals generally have left-hand and right-hand versions that coil in opposite directions, depending on the restrictions on the polar angle and the signs of constants that appear in their equations.



ตัวอย่าง 4.1.16. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเชิงขั้ว $r = \theta$ โดยที่ $\theta \geq 0$
วิธีทำ

θ	r
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
π	π
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
2π	2π
$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$
3π	3π
$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$
$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{4}$
4π	4π



Spiral

กราฟจากตัวอย่าง 4.1.16 เรียกว่า **เส้นเวียนก้นหอย (Spirals)** ซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$r = a\theta \quad \text{โดยที่ } \theta \geq 0 \text{ หรือ } \theta \leq 0$$

ตัวอย่าง 4.1.17. จงจับคู่กราฟของเส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้กับสมการที่กำหนดให้

(1) $r = \sqrt{\theta}, 0 \leq \theta \leq 16\pi$

(2) $r = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$

(3) $r = 1 + 2\cos\theta$

(4) $r = \theta^2, 0 \leq \theta \leq 16\pi$

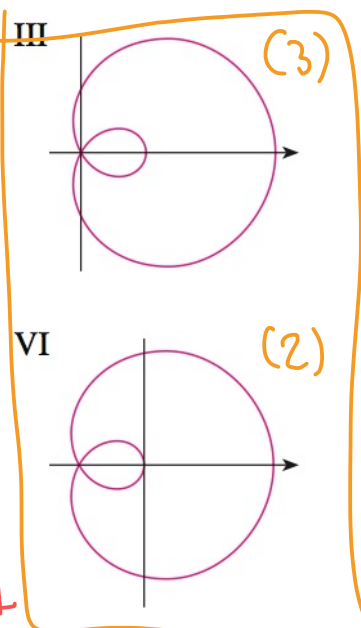
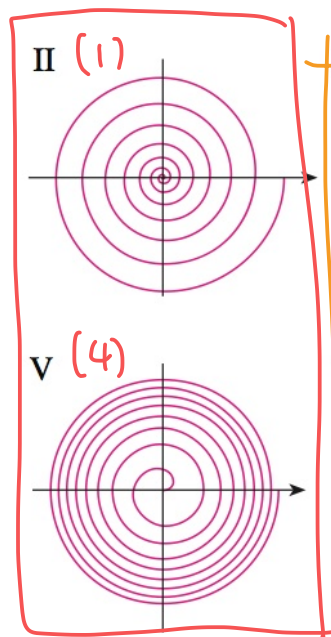
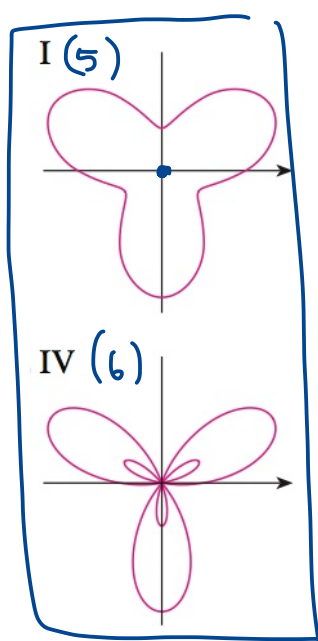
(5) $r = 2 + \sin 3\theta$

(6) $r = 1 + 2\sin 3\theta$

ข้อ ในบางที่
ทำให้ $r=0$

(5) $0 = 2 + \sin 3\theta$
 $-2 = \sin 3\theta$

(6) $0 = 1 + 2\sin 3\theta$
 $-1 = 2\sin 3\theta$
 $-\frac{1}{2} = \sin 3\theta$



4.2 กราฟในปริภูมิ 3 มิติ ระบบพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม (Graphs in three-dimensional rectangular, cylindrical and spherical coordinates)

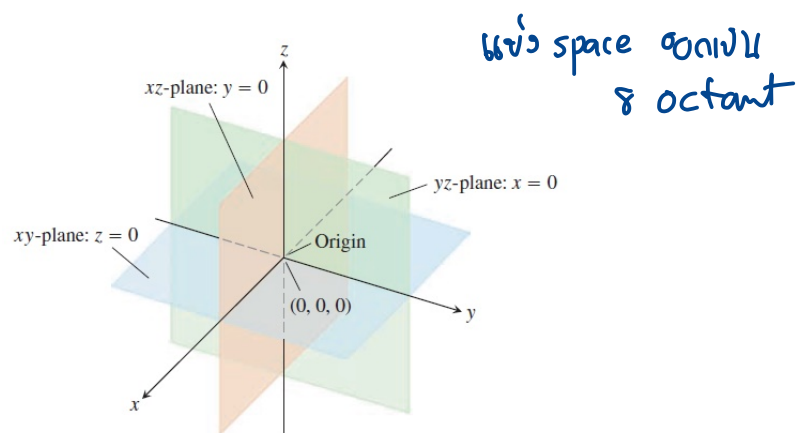
กราฟในปริภูมิ 3 มิติ

ระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ (rectangular coordinate) เกิดจากการที่แกน X แกน Y และแกน Z ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ทำให้เกิดระนาบขึ้น 3 ระนาบ ดังนี้

ระนาบ XY ซึ่งประกอบด้วยแกน X และแกน Y หรือเรียกว่าระนาบ $z = 0$

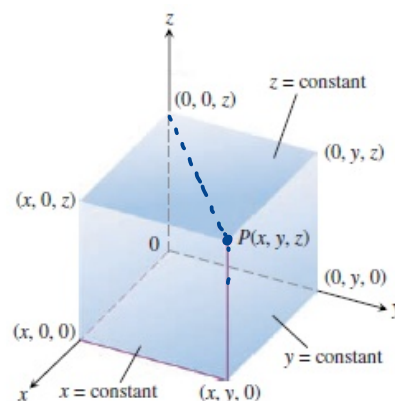
ระนาบ XZ ซึ่งประกอบด้วยแกน X และแกน Z หรือเรียกว่าระนาบ $y = 0$

ระนาบ YZ ซึ่งประกอบด้วยแกน Y และแกน Z หรือเรียกว่าระนาบ $x = 0$



รูปที่ 4.14: ระนาบ $x = 0, y = 0$ และ $z = 0$

ให้ P เป็นจุดใดๆ ในปริภูมิ 3 มิติ จะบอกตำแหน่งของ P ด้วยลำดับ (x, y, z) ดังรูปที่ 4.15



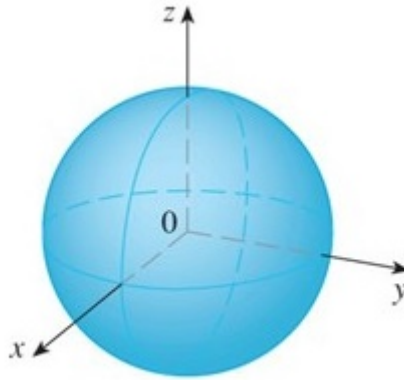
รูปที่ 4.15: จุด $P(x, y, z)$ ในระบบพิกัดฉาก

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร x, y และ z อาจเขียนได้ในรูป $z = f(x, y)$ หรือ $F(x, y, z) = 0$ เซตของจุด (x, y, z) ที่สอดคล้องกับสมการ $z = f(x, y)$ หรือ $F(x, y, z) = 0$ เรียกว่า พื้นผิว และเรียก $z = f(x, y)$ หรือ $F(x, y, z) = 0$ ว่า สมการพื้นผิว

surface

ในบทนี้เราจะศึกษาพื้นผิวในสามมิติ ดังต่อไปนี้

ทรงกลม (Spheres)



รูปที่ 4.16: ทรงกลม

โดยทั่วไปแล้วทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k, l) และมีรัศมี r จะมีสมการคือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

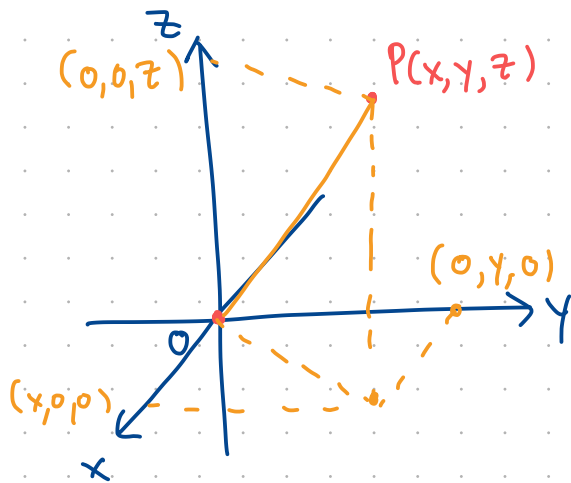
$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

ตัวอย่าง 4.2.1. จงพิจารณาว่าสมการ $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ เป็นสมการทรงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + (z^2 + 2z) &= -6 \\ (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) &= -6 + 4 + 9 + 1 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 &= 8 \\ \text{เป็นสมการทรงกลม จดก. ศูนย์ที่ } (-2, 3, -1) \\ \text{รัศมี} &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

#

8.5: ឆ្លើយ: ឧបករណ៍ កំណត់លក្ខណៈ គ្រប់គ្រង រូបភាព



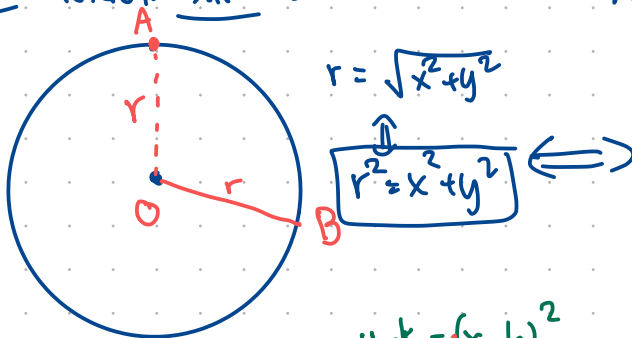
$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ឆ្លើយ: ឧបករណ៍ $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$

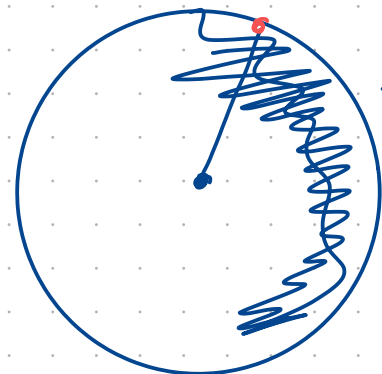
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



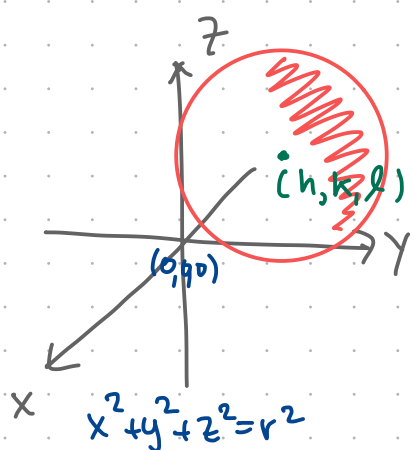
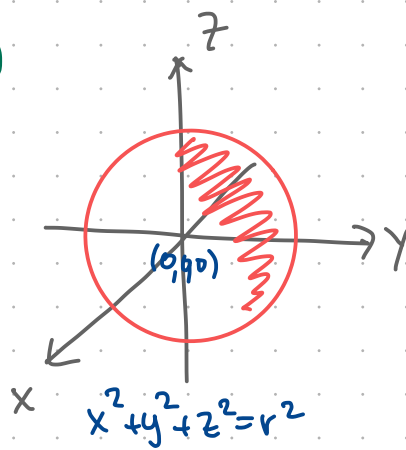
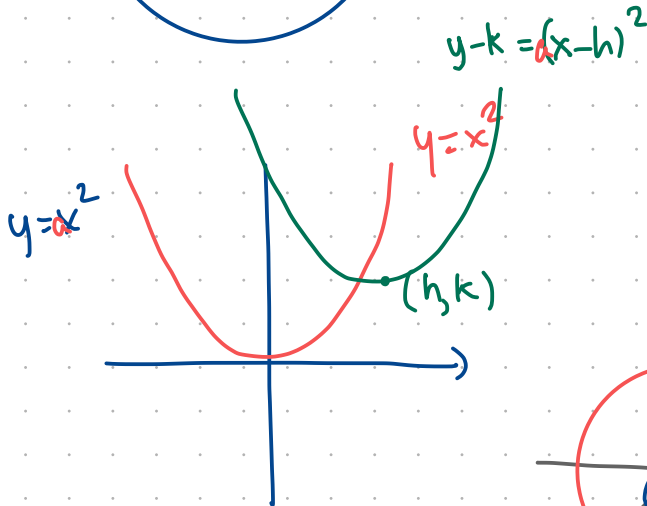
ឆ្លើយ: ឧបករណ៍ គ្រប់គ្រង រូបភាព



ឆ្លើយ: ឧបករណ៍ គ្រប់គ្រង (sphere)



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



$$\Downarrow$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

พื้นผิวเชิงทรงกระบอก (Cylindrical surfaces)

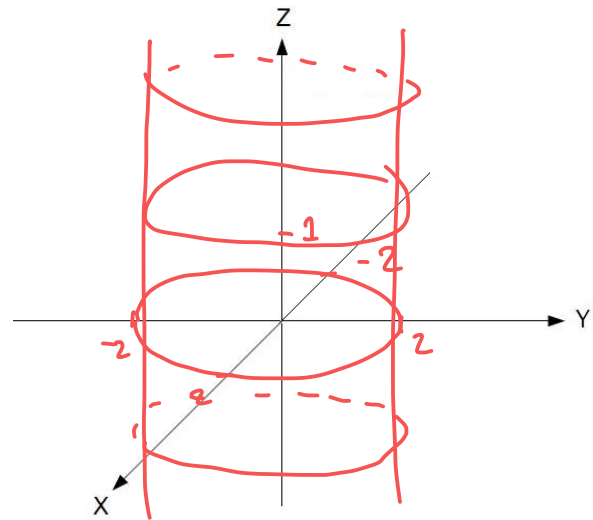
พื้นผิวเชิงทรงกระบอก คือพื้นผิวที่เกิดจากการเลื่อนเส้นโค้งบนระนาบหนึ่ง ขนานไปกับเส้นคงที่เส้นหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า เส้นก่อกำเนิด *generating line*

ตัวอย่าง 4.2.2. จงเขียนกราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 4$ ในสามมิติ

$$\boxed{z=0} \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$\boxed{z=1} \quad x^2 + y^2 = 4$$

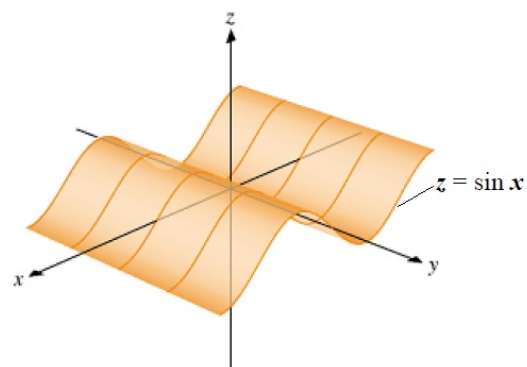
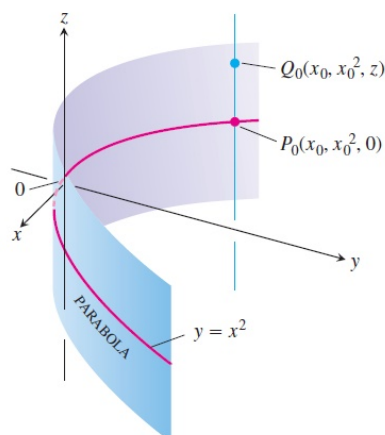
ทรงกระบอกกลม แกน z
บนภาคินพหุภาค.



ข้อสังเกต

- (1) สมการพื้นผิวเชิงทรงกระบอกจะมีตัวแปรเพียง 2 ตัวแปรจากตัวแปร x, y, z
- (2) เส้นก่อกำเนิดของพื้นผิวคือแกนของตัวแปรที่ไม่ปรากฏในสมการ หรือเป็นเส้นตรงที่ขนานไปกับแกนของตัวแปรดังกล่าว

รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของพื้นผิวเชิงทรงกระบอกอื่นๆ

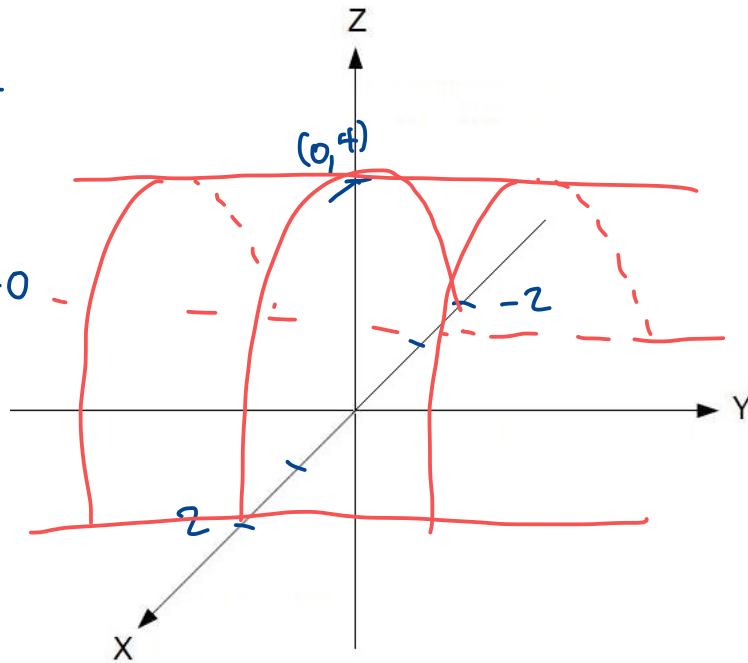


รูปที่ 4.17: พื้นผิวเชิงทรงกระบอก

ตัวอย่าง 4.2.3. จงเขียนกราฟของสมการพื้นผิวเชิงทรงกระบอกต่อไป ในสามมิติ

(i) $z = 4 - x^2$

$y=0$ $z = 4 - x^2$
 $z - 4 = -x^2$
 จุดยอด $(0, 4)$
 ในระนาบ xz
 → ตัดแกน $x \Rightarrow$ ให้ $z=0$
 $0 = 4 - x^2$
 $x^2 - 4 = 0$
 $x = \pm 2$



(ii) $z^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow z^2 - y^2 = 1$ hyperbola

ตรวจสอบระนาบ x

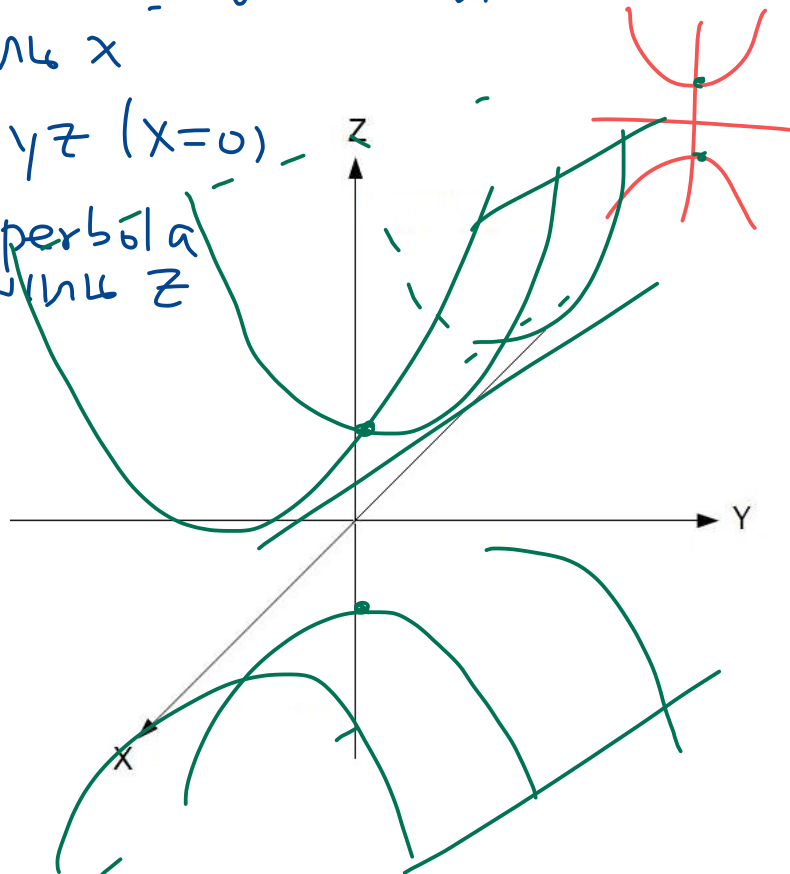
พิจารณาในระนาบ yz ($x=0$)

$z^2 - y^2 = 1$ hyperbola
 ตัดแกน z

Set ให้ $y=0$

$z^2 = 1$

$z = \pm 1$



พื้นผิวกำลังสอง (Quadric surfaces)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาลักษณะของกราฟของสมการกำลังสองของสามตัวแปร x, y, z ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \underbrace{Dxy + Exz + Fyz}_{\text{ถ้าเจอ 3 ตัวนี้ } \Rightarrow \text{หมุน}} + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

พื้นผิวกำลังสองที่สำคัญมีดังนี้

$$\underline{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0}$$

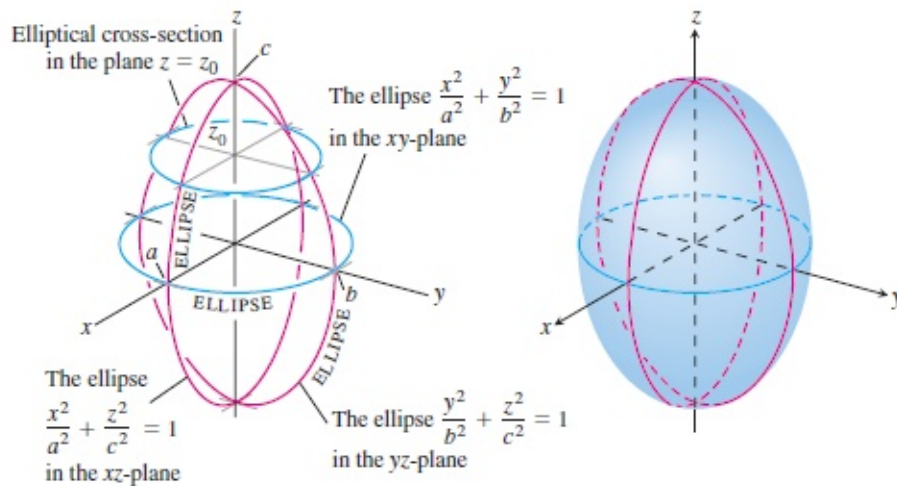
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

• ทรงรี (ellipsoids)

มีรูปแบบสมการคือ

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}}$$

ตัดแกน X แกน Y และ แกน Z ที่จุด $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ และ $(0, 0, \pm c)$ ตามลำดับ มีรอยตัดบนระนาบ XY , XZ และ YZ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ และ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.18: ทรงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

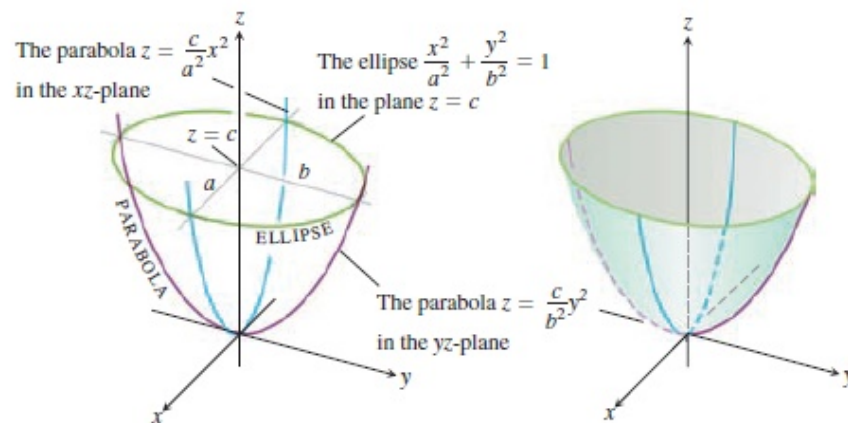
• พาราโบลอยด์เชิงวงรี (elliptic paraboloid)

มีรูปแบบสมการคือ

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

ตัดแกน Z ที่จุด $(0, 0, 0)$ มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นโค้งพาราโบลา $z = \frac{c}{a^2}x^2$

และ $z = \frac{c}{b^2}y^2$ ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ $z = c$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



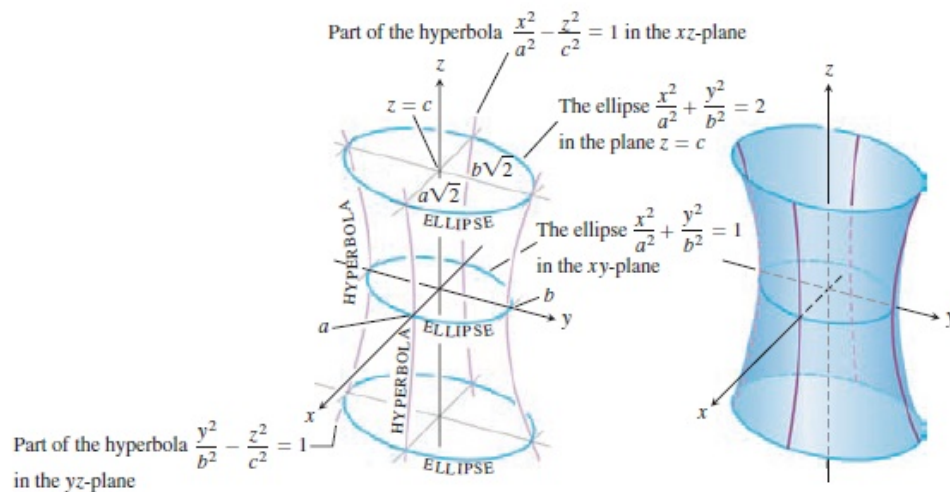
รูปที่ 4.19: พาราโบลอยด์เชิงวงรี $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

• ไฮเพอร์โบลอยด์เชื่อมโยง (one sheeted hyperboloid)

มีรูปแบบสมการคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นโค้งไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ และ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ XY และระนาบ $z = c$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ ตามลำดับ

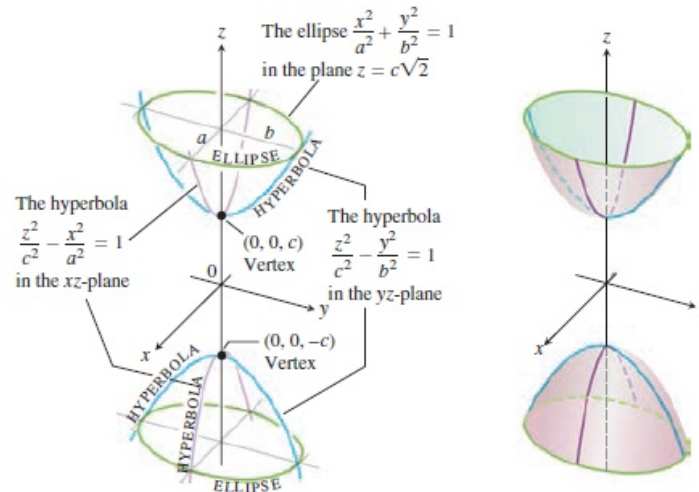


รูปที่ 4.20: ไฮเพอร์โบลอยด์เชื่อมโยง $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

• ไฮเพอร์โบลอยด์แยกส่วน (two sheeted hyperboloid)

มีรูปแบบสมการคือ
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

ตัดแกน Z ที่จุด $(0, 0, \pm c)$ มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นโค้งไฮเพอร์โบล่า $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ และ $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ $z = c\sqrt{2}$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

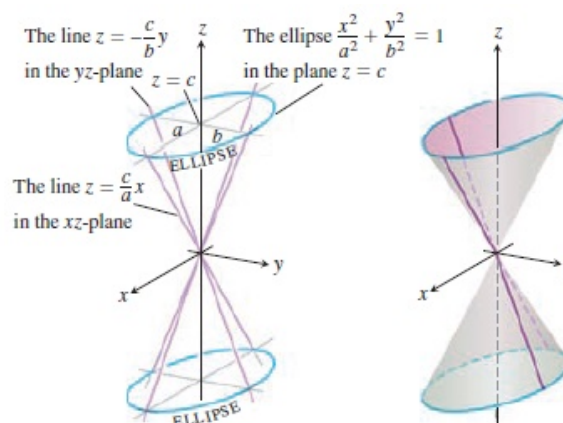


รูปที่ 4.21: ไฮเพอร์โบลอยด์แยกส่วน $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

• กรวยเชิงวงรี (elliptic cone)

มีรูปแบบสมการคือ
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

ตัดแกน Z ที่จุด $(0, 0, 0)$ มีรอยตัดบนระนาบ XZ และ YZ เป็นเส้นตรง $z = \frac{c}{a}x$ และ $z = -\frac{c}{b}y$ ตามลำดับ ส่วนรอยตัดบนระนาบ $z = c$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



รูปที่ 4.22: กรวยเชิงวงรี $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

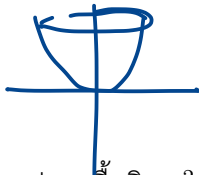
ตัวอย่าง 4.2.4. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$

รอยตัด ตาจร.แนว xy ($z=0$)
 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

ตาจร.แนว yz ($x=0$)
 $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$

ตาจร.แนว xz ($y=0$)
 $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{81} = 1$

$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



ตัวอย่าง 4.2.5. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $x^2 + 4z^2 - y = 0$

รอยตัด xy ($z=0$)
 $x^2 = y \leftarrow \text{parabola}$

รอยตัด yz ($x=0$)
 $4z^2 = y \leftarrow \text{parabola}$

รอยตัด xz ($y=0$)
 $x^2 + 4z^2 = 0 \leftarrow \text{เกิดจุด}$

รอยตัด $yz=-1$ $x^2 + 4z^2 + 1 = 0$
 $x^2 + 4z^2 = -1$ impossible
 ไม่เกิดแนว x

$y=1$
 $x^2 + 4z^2 - 1 = 0$
 $x^2 + 4z^2 = 1$
 $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 1$ ออริส

$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} + \frac{(z+5)^2}{81} = 1$
 จุด $(1, -2, -5)$

