

990912916

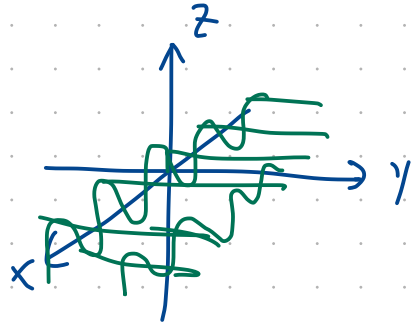
① ၇၅၅၇၅၅၅၅

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

② ၇၅၅၅၅၅၅၅

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$z = \sin x$$



Quadratic Surface

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

① Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

② paraboloid

บทที่ 4. กราฟในปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ

ตัวอย่าง 4.2.6. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $y^2 = x^2 + z^2$

Cone

กรวย -

กรวย +

$$y = -\sqrt{x^2 + z^2} \quad 25 \quad y \leq 0$$

$$y = \sqrt{x^2 + z^2} \quad ; \quad y \geq 0$$

$$y^2 = \sqrt{x^2 + z^2}$$

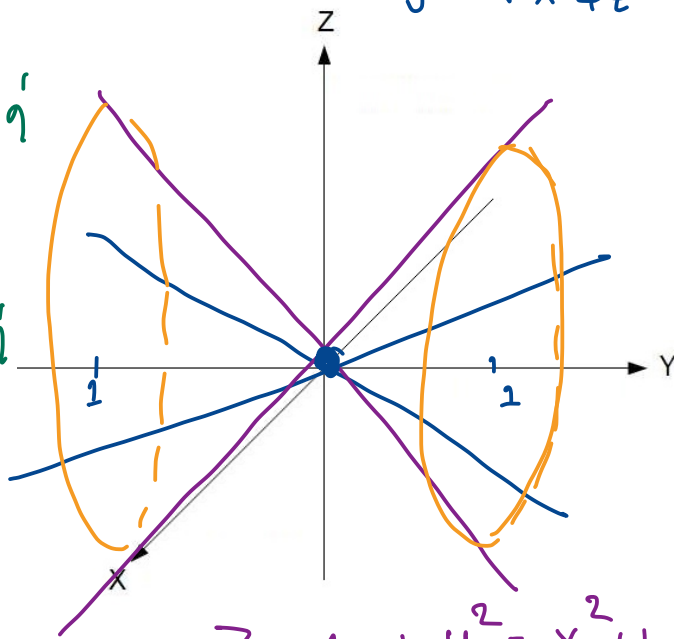
คำตอบ: เบลู

$[xy] (z=0) ; y^2 = x^2$
 $y^2 - x^2 = 0$ เส้นตรง
 $(y-x)(y+x) = 0$
 $\therefore y=x, y=-x$

$[yz] (x=0) ; y^2 = z^2$
 $y^2 - z^2 = 0$ เส้นตรง
 $(y-z)(y+z) = 0$
 $\therefore y=z, y=-z$

$[xz] (y=0) ; x^2 + z^2 = 0$ บั๊กต

ตัด $y = \pm 1 \quad 1 = x^2 + z^2$ วงกลม



$z=1 : y^2 = x^2 + 1$
 $y^2 - x^2 = 1$

ตัวอย่าง 4.2.7. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

hyperboloid one sheet
 "ruled surface"

คำตอบ: เบลู

$[xy] (z=0) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$[yz] (x=0) : y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ hyperbola

check parabol set $z=0$:

$y^2 = 1$
 $y = \pm 1$

$[xz] (y=0) : \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$

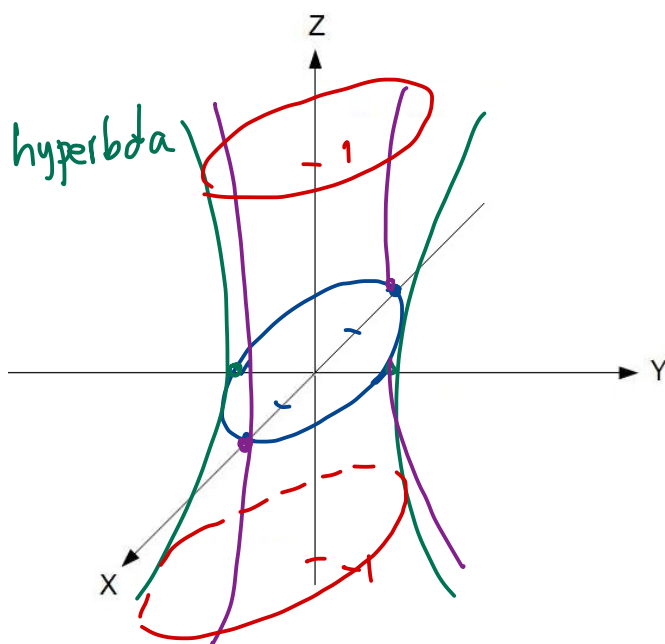
check parabol set $z=0$

$\frac{x^2}{4} = 1$
 $x = \pm 2$

$z = \pm 1$

$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{1}{4} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{5}{4}$
 $\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5/4} = 1$



บทที่ 4. กราฟในปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{y^2}{4} - x^2 - \frac{z^2}{2} = 1}$ 26

ตัวอย่าง 4.2.8. จงเขียนกราฟของพื้นผิว $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

hyperboloid two sheets.

ตัดตามระนาบ

$[XY] (z=0) \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ hyperbola
ตาม y

จุดบน Set $x=0 \Leftrightarrow y = \pm 2$

$[YZ] (x=0) \quad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$

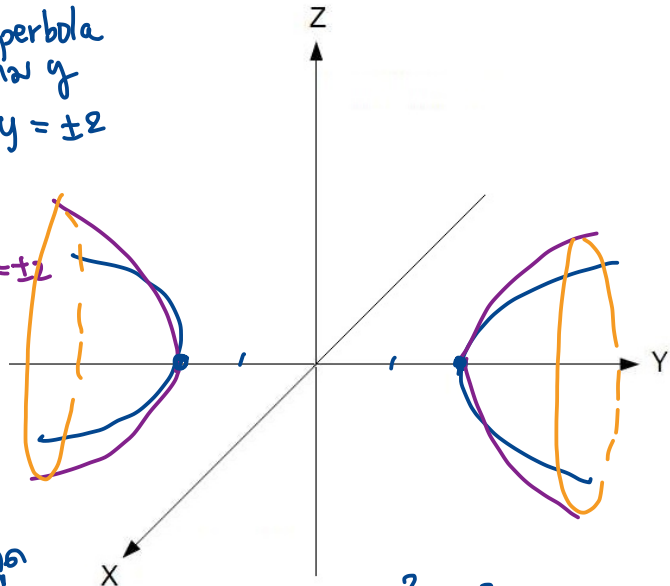
จุดบน Set $z=0 \Leftrightarrow y = \pm 2$

$[XZ] (y=0) \quad -x^2 - \frac{z^2}{2} = 1$
ไม่เกิดกราฟ

ตัด $y = \pm 2 : 1 - x^2 - \frac{z^2}{2} = 1$

$x^2 + \frac{z^2}{2} = 0$ จุด

$y = \pm 4 : 4 - x^2 - \frac{z^2}{2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{z^2}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{6} = 1$



ตัวอย่าง 4.2.9. จงวาดรูปและแรเงาทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยพื้นผิว $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ และ

ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z - (2 + \sqrt{3}) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

หดร
กรว

$z^2 = x^2 + y^2$

$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

กรวข้อนี้ จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0, 2 + \sqrt{3})$

Control กรว $z=0$

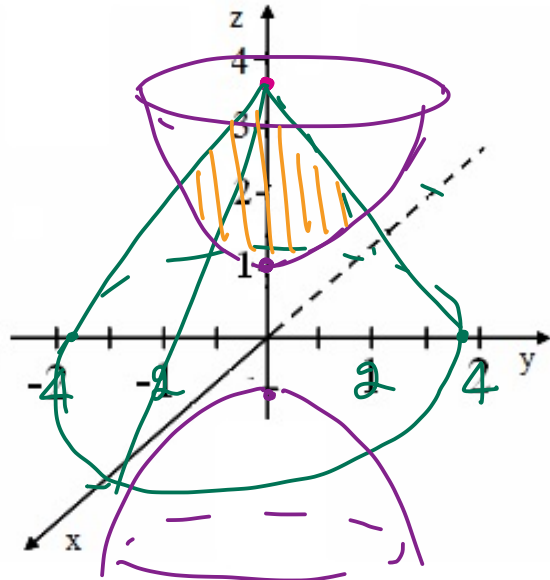
$\therefore -(2 + \sqrt{3}) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 = (2 + \sqrt{3})^2$

ปิดล้อมด้านล่าง

กรว $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ hyperboloid
2 sheet

Set $x, y = 0$ แล้ว $z = \pm 1$



Ex Given $z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$

5: find xy in $z=0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 0$

$$\left(\frac{y}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{y}{2} + \frac{x}{3}\right) = 0$$

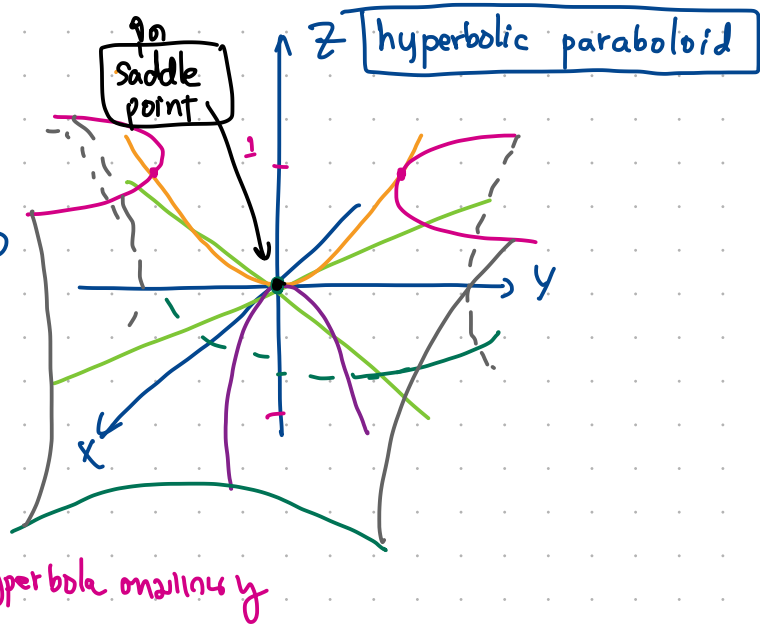
$$\frac{y}{2} = \frac{x}{3}, \frac{y}{2} = -\frac{x}{3}$$

yz in $x=0$; $z = \frac{y^2}{4}$

xz in $y=0$; $z = -\frac{x^2}{9}$

z=1 then $1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$

z=-1 then $-1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$
 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$



ตัวอย่าง 4.2.10. จงจับคู่กราฟของพื้นผิวในสามมิติต่อไปนี้กับสมการที่กำหนดให้

(A) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

(C) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

(E) $y = 2x^2 + z^2$

(G) $x^2 + 2z^2 = 1$

(I) $z = 2x^2$

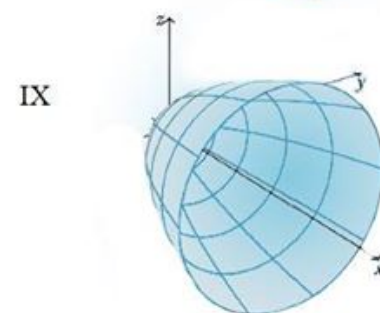
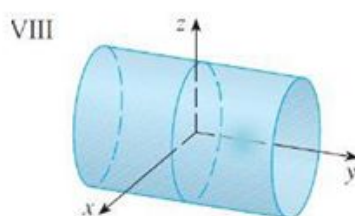
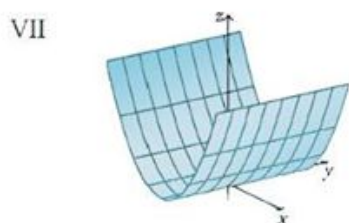
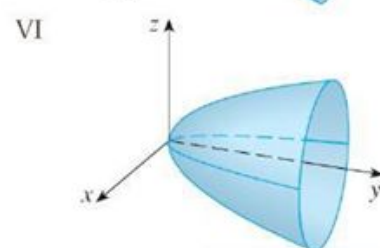
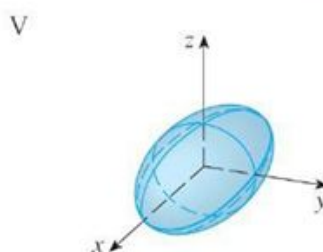
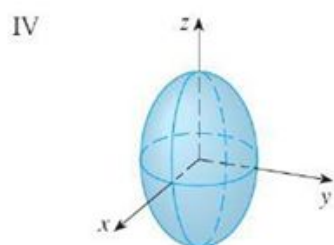
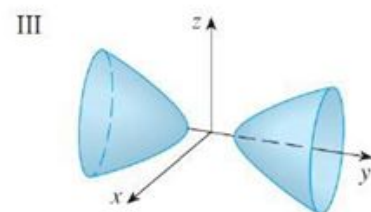
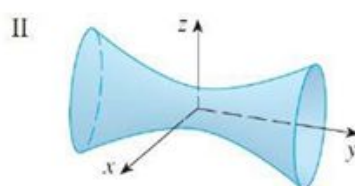
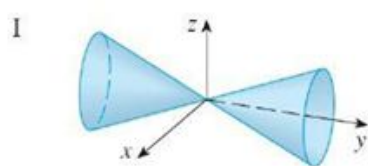
(B) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

(D) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(F) $y^2 = x^2 + 2z^2$

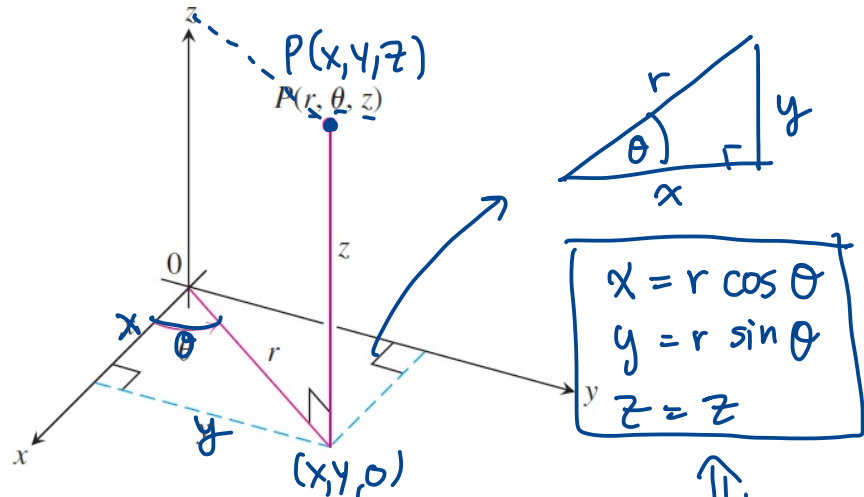
(H) $y = x^2 - z^2$

(K) $\frac{x}{4} = y^2 + z^2$



พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinates)

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใน 3 มิติ นอกเหนือจากพิกัดฉาก (x, y, z) เรายังสามารถบอกตำแหน่งของ P ได้ด้วยพิกัด $P(r, \theta, z)$ เมื่อ r และ θ คือพิกัดเชิงขั้วของจุดที่ได้จากการโปรเจกชันจุด P ลงบนระนาบ XY ดังรูป



รูปที่ 4.23: พิกัดทรงกระบอก

ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y, z) และ (r, θ, z) ดังนี้

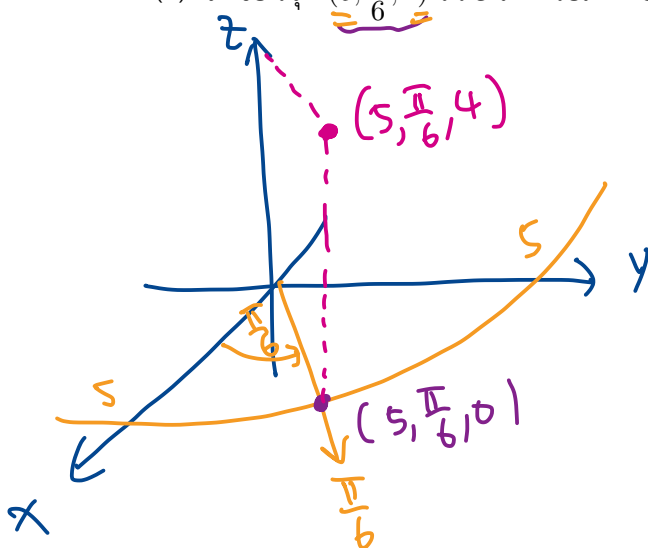
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

ในทางกลับกัน เราจะได้ว่า

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$

ตัวอย่าง 4.2.11. r, θ, z

- (1) จงเขียนจุด $(5, \frac{\pi}{6}, 4)$ ใน 3 มิติพร้อมทั้งเปลี่ยนให้เป็นพิกัดฉาก



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \quad (\Leftarrow) \quad x = 5 \cos \frac{\pi}{6} = 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= r \sin \theta \quad (\Leftarrow) \quad y = 5 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2} \\ z &= z \quad (\Leftarrow) \quad z = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{จุดในฉาก} \quad \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}, 4 \right)$$

บทที่ 4. กราฟในปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ

(2) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(3, -3, -7)$ ให้เป็นพิกัดทรงกระบอก

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = (3)^2 + (-3)^2$$

$$r^2 = 9 + 9 = 18$$

$$r = \pm \sqrt{18}$$

$$\tan \theta = \frac{-3}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

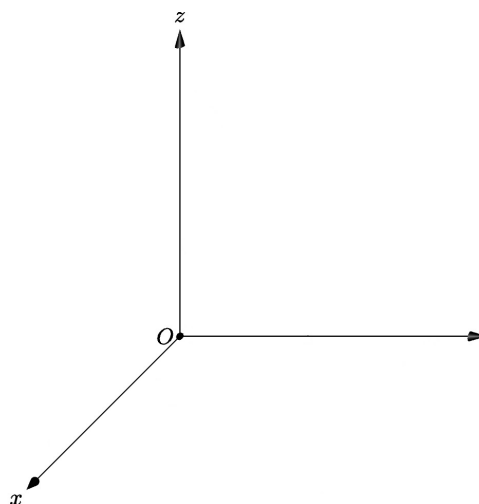
เลือก $r = \sqrt{18}$ จากค่าบวกได้

คำตอบคือ $\frac{3\pi}{4}$

$$(x, y, z) = (3, -3, -7) = \left(\sqrt{18}, \frac{3\pi}{4}, -7 \right) = \left(-\sqrt{18}, \frac{5\pi}{4}, -7 \right)$$

ตัวอย่าง 4.2.12. จงเขียนกราฟของพื้นผิวต่อไปนี้ในพิกัดทรงกระบอก

(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$



(2) $r^2 + z^2 = 9$

