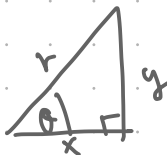
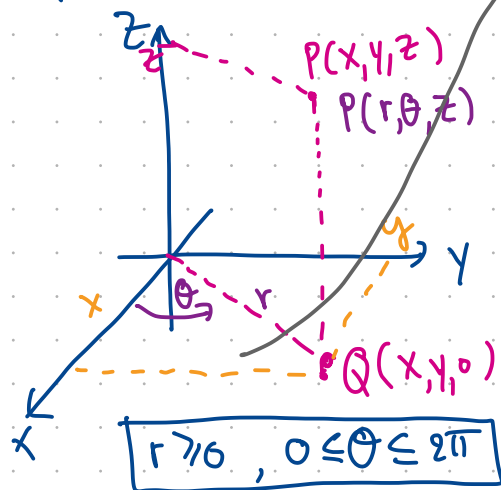


အချက်အလက်

① Cylindrical Coordinate



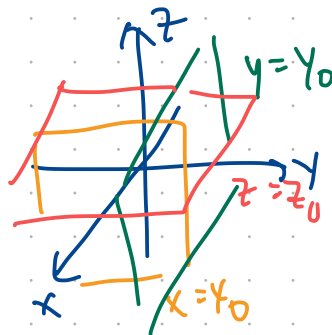
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

Constant surface

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0$$

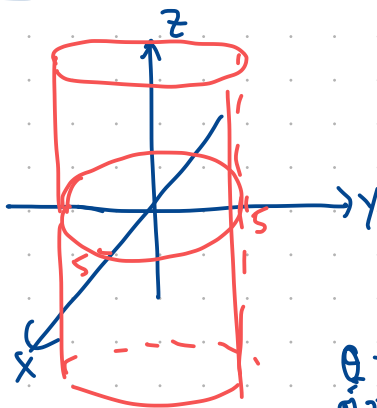


Constant surface လက်တွေ့အသုံးပြု

Ex ① $r = 5$

$$x^2 + y^2 = 25$$

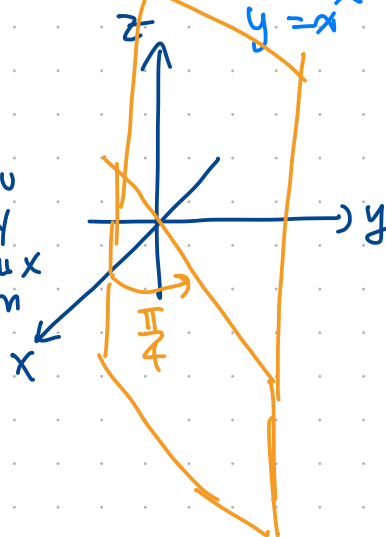
$r = r_0$ ပုံစံကားလေးလေး
ပုံစံကားလေး r_0
ပုံစံကားလေး z



(r, θ, z)

② $\theta = \frac{\pi}{4}$

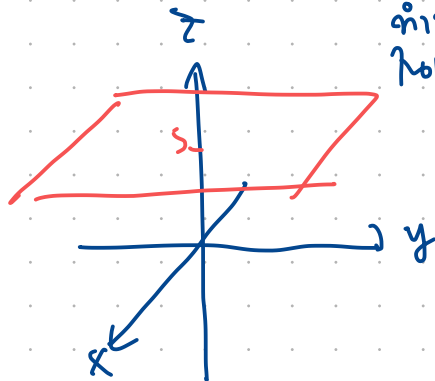
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \frac{y}{x}$$



$\theta = \theta_0$ ပုံစံကားလေး
ပုံစံကားလေး xy
ပုံစံကားလေး θ_0 ပုံစံကားလေး
ပုံစံကားလေး x

③ $z = 5$

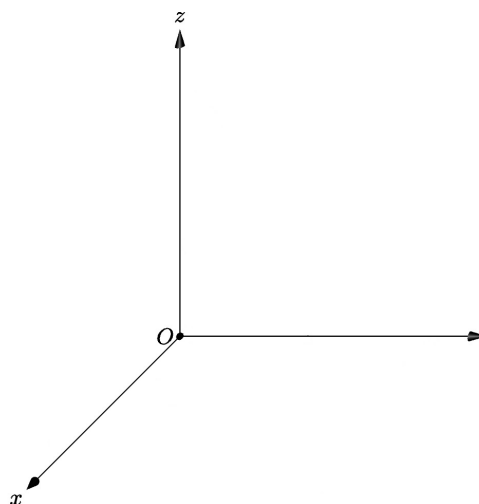
$z = z_0$ ပုံစံကားလေး
ပုံစံကားလေး xy



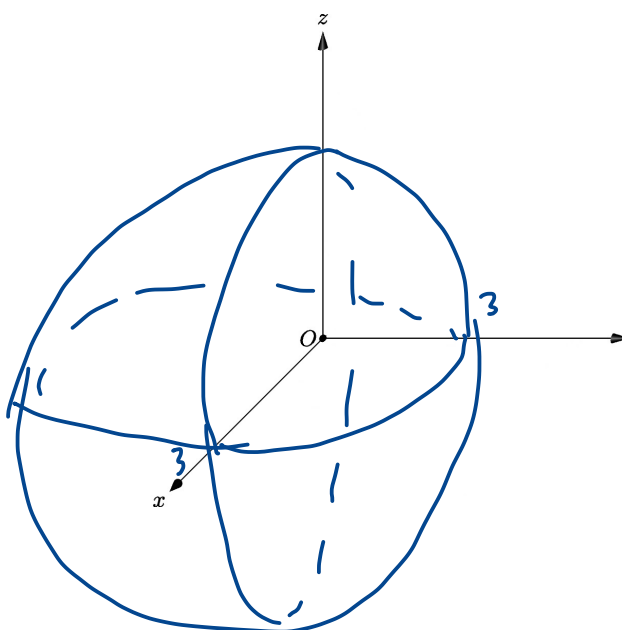
(2) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(3, -3, -7)$ ให้เป็นพิกัดทรงกระบอก

ตัวอย่าง 4.2.12. จงเขียนกราฟของพื้นผิวต่อไปนี้ในพิกัดทรงกระบอก

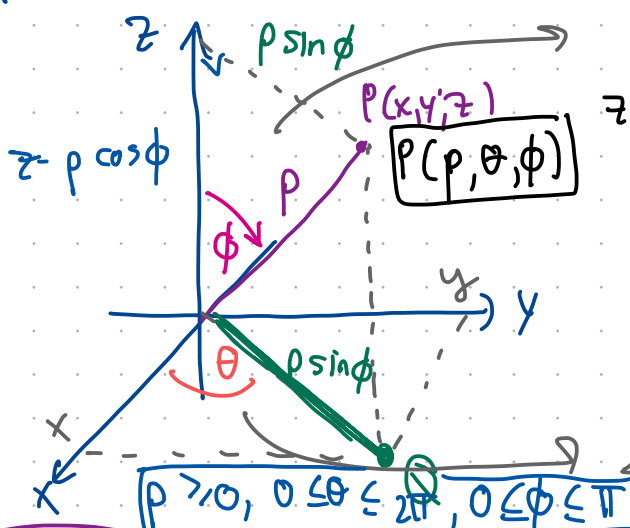
(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$



(2) $r^2 + z^2 = 9$
 $\text{ทก } x^2 + y^2 = r^2$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 9$



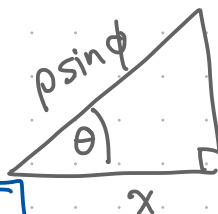
Spherical Coordinate : (ρ, θ, ϕ)



$$z = \rho \cos \phi$$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$



$$\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < \pi$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$z = \rho \cos \phi \Leftrightarrow \frac{z}{\rho} = \cos \phi$$

$$\therefore \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \cos \phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

အသုံးပြု

အသုံးပြုရန် အသုံးပြုရန် အသုံးပြုရန်

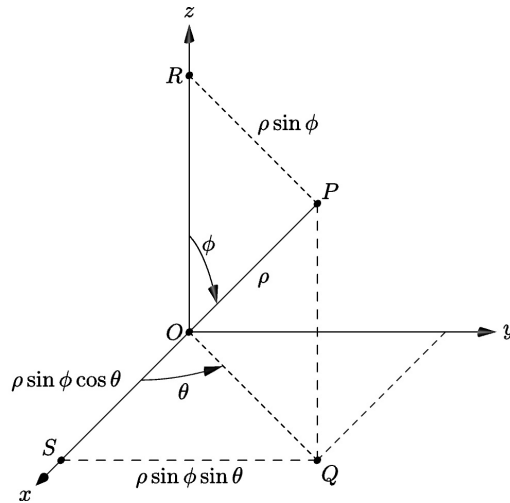
$$r = \rho \sin \theta, \theta = \theta, z = \rho \cos \phi$$

พิกัดทรงกลม (Spherical coordinates)

นอกเหนือจากพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอกแล้ว เรายังสามารถบอกตำแหน่งของจุดใน 3 มิติด้วยพิกัดทรงกลมได้อีกด้วย

เราสามารถเขียนแทน $P(x, y, z)$ ได้ด้วยพิกัดทรงกลม $P(\rho, \theta, \phi)$ เมื่อ ρ คือ ขนาดของเส้นตรง OP ที่เชื่อมระหว่าง P และจุดกำเนิด O

θ คือ มุมที่เส้นตรงที่เกิดจากการโปรเจกชันเส้นตรง OP ลงบนระนาบ XY ทำกับแกน X ในทิศวนเข็มนาฬิกา, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ และ ϕ คือ มุมที่เส้นตรง OP ทำกับแกน Z บวก, $0 \leq \phi \leq \pi$



รูปที่ 4.24: พิกัดทรงกลม

จากรูปที่ 4.24 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y, z) และ (ρ, θ, ϕ) ดังนี้

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

และ

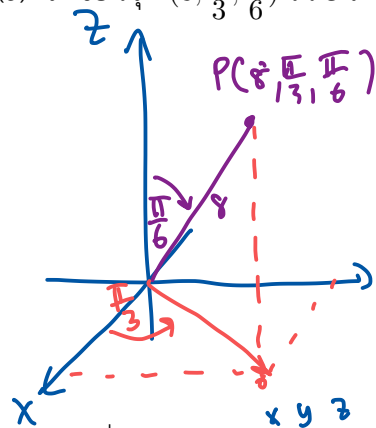
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทรงกระบอก $P(r, \theta, z)$ และพิกัดทรงกลม $P(\rho, \theta, \phi)$ ได้ดังนี้

$$r = \rho \sin \theta \quad \theta = \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

ตัวอย่าง 4.2.13.

(a) จงเขียนจุด $(8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ ใน 3 มิติพร้อมทั้งเปลี่ยนให้เป็นพิกัดฉาก



$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \Leftrightarrow x = 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \Leftrightarrow y = 8 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ z &= \rho \cos \phi \Leftrightarrow z = 8 \cos \frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore (8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ คือ $(2, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ ในระบบฉาก. #

(b) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(1, 1, \sqrt{2})$ ให้เป็นพิกัดทรงกลม

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \\ 1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2 &= \rho^2 \\ \rho^2 &= 4 \\ \rho &= 2 \end{aligned}$$

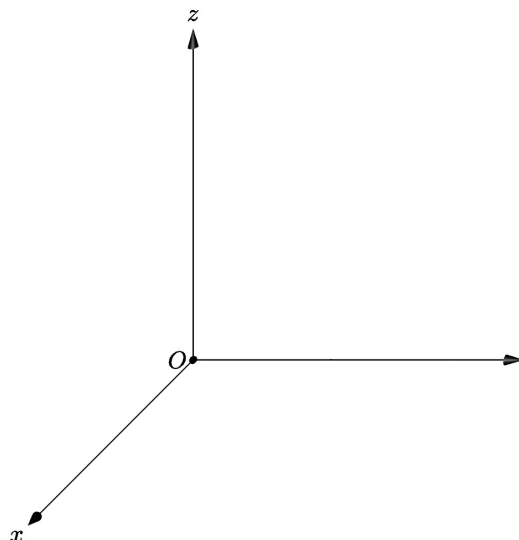
$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \tan \theta &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad z &= \rho \cos \phi \\ \sqrt{2} &= 2 \cos \phi \\ \cos \phi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$\therefore (1, 1, \sqrt{2})$ คือ $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ในระบบพิกัดทรงกลม #

ตัวอย่าง 4.2.14. จงเขียนกราฟของพื้นผิวต่อไปนี้ในพิกัดทรงกลม

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$

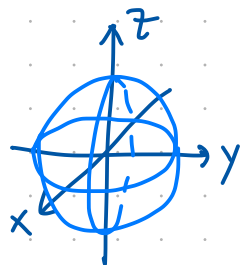


Constant surface ในระบบพิกัดทรงกลม (ρ, θ, ϕ)

① $\rho = 5$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$\rho = \rho_0$ คือทรงกลมรัศมี ρ_0
ที่น. อยุ่ที่ $(0,0,0)$



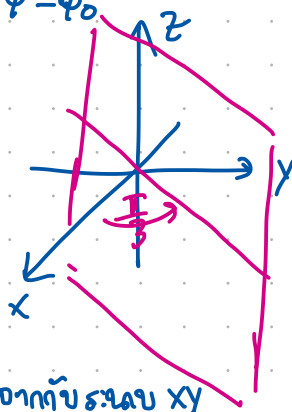
② $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{3}x$$

$\theta = \theta_0$ คือระนาบที่ตัดจากกับระนาบ xy
ทำมุม θ_0 กับแกน x ตามเข็มนาฬิกา



③ $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

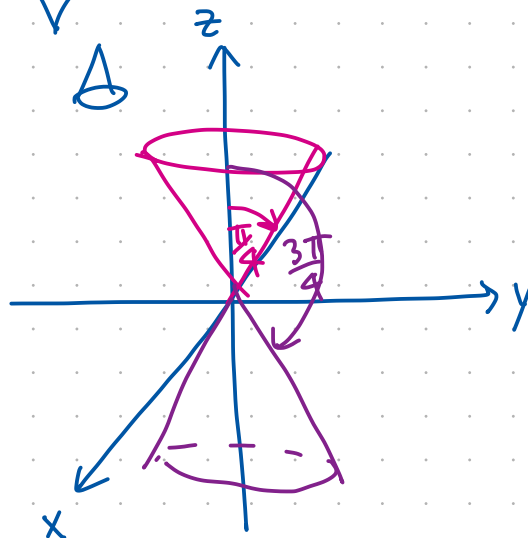
ถ้า $\phi = \frac{\pi}{4}$: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $z \geq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = z^2$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$



$$\phi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

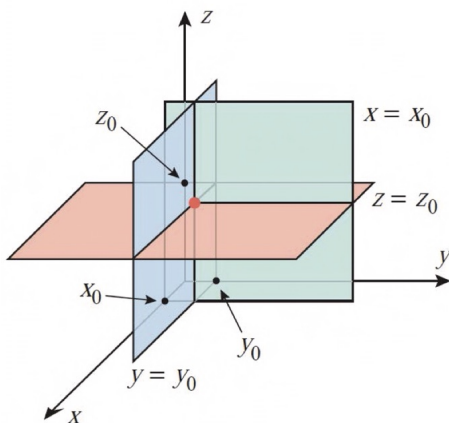
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \underline{z \leq 0}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = z^2$$

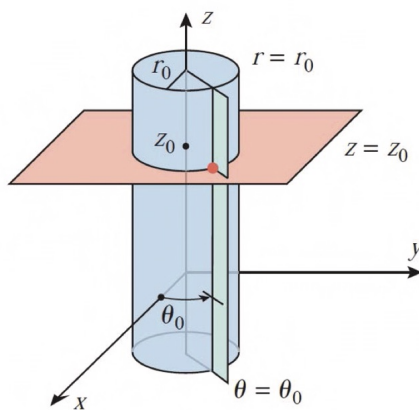
$$\therefore z^2 = x^2 + y^2$$

$\phi = \phi_0$ คือ ทรงกรวยที่ตัดจากระนาบ xy
ทำมุม ϕ_0 ตามแกน z ขวบน

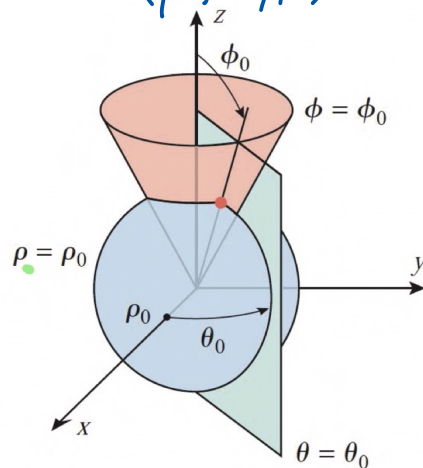
(x, y, z)



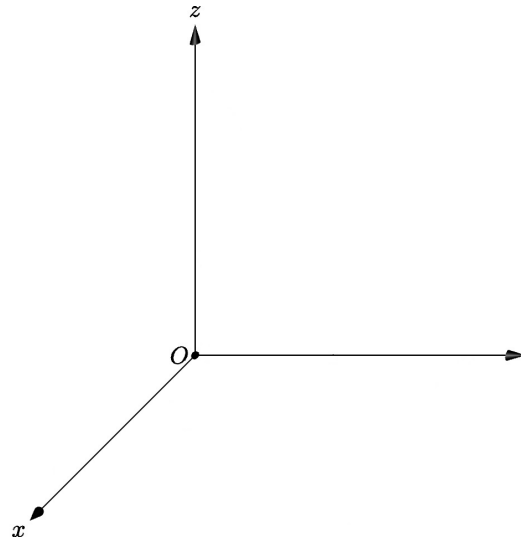
(r, θ, z)



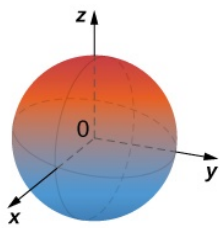
(ρ, θ, ϕ)



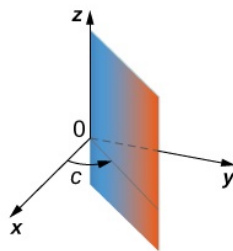
$$(2) \phi = \frac{\pi}{4}, \quad \phi = \frac{3\pi}{4}$$



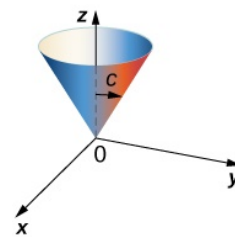
ตัวอย่างอื่นๆ ของกราฟในระบบพิกัดทรงกลม



Sphere $\rho = c$ (constant)

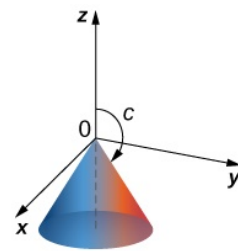


Half plane $\theta = c$ (constant)



$$0 < c < \frac{\pi}{2}$$

Half cone $\phi = c$ (constant)



$$\frac{\pi}{2} < c < \pi$$

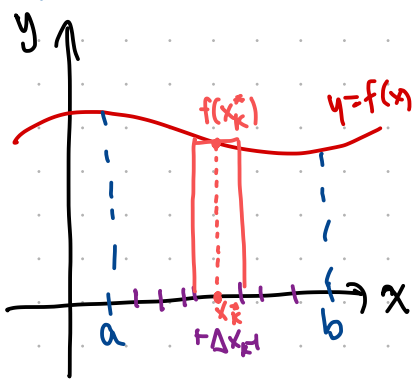
รูปที่ 4.25: กราฟในระบบพิกัดทรงกลม

ឧទាហរណ៍ 5 បំរើដំណើរការបង្កើន

អានអោយ concept រួច integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{Net-signed area}$$

"Riemann's Sum"



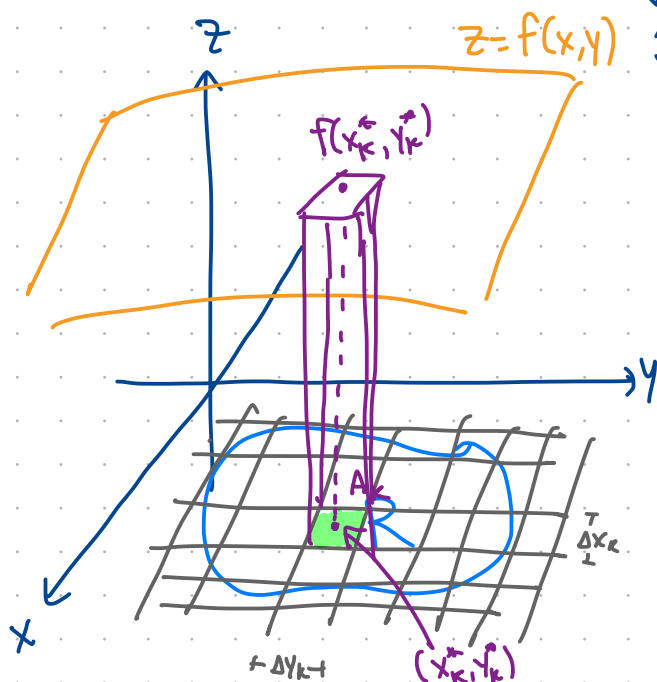
$$\text{width } \Delta x = f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$\therefore \text{area of rectangle } [a, b] =$$

Riemann's Sum

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area} \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$



$$\text{volume of 1 block} = f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k \Delta y_k$$

$$\text{volume of all blocks in } R = \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k \Delta y_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \underbrace{\Delta x_k \Delta y_k}_{\Delta A_k}$$

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

$$\text{Ex } \iint_R 5x^2 dx dy$$

បំរើការបំរើការបំរើការ

Ex

$$\int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx = \left. \frac{xy^2}{2} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 xy^2 dy = \left. \frac{xy^3}{3} \right|_{y=0}^{y=1} = \frac{x}{3}$$

បំរើការបំរើការបំរើការ 2

Iterated double integral

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Ex $\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx = \int_1^3 (40y - xy^2) \Big|_{y=2}^{y=4} dx$

$$= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)] dx$$

$$= \int_1^3 [80 - 12x] dx$$

$$= 80x - 6x^2 \Big|_{x=1}^{x=3}$$

(HW) $\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy = ?$ = 112 #