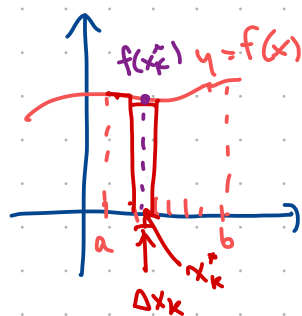


Double integral

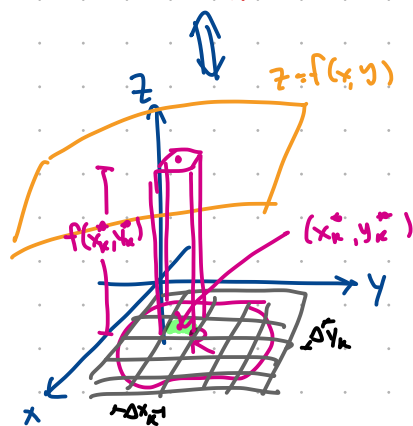
Net-signed area



$$\text{w.m. rectangle} = f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$\therefore \text{w.m. approximation} = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$\therefore \text{w.m. limit} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$



$$\text{w.m. rectangle} = f(x_k^*, y_k^*) \underbrace{\Delta x_k \Delta y_k}_{\Delta A_k}$$

$$\text{w.m. approximation} = \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k \Delta y_k$$

$$\iint_R f(x,y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \underbrace{\Delta x_k \Delta y_k}_{dA}$$

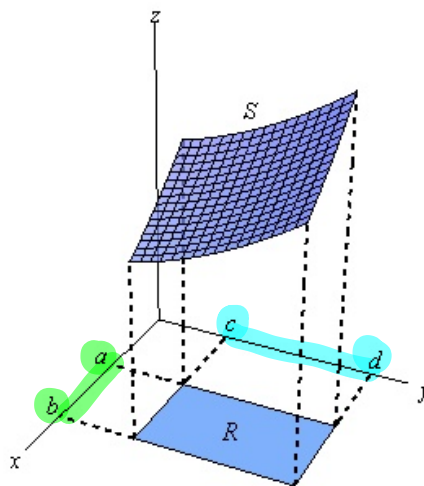
บทที่ 5

ปริพันธ์หลายชั้นและการประยุกต์ (Multiple integrals and applications)

5.1 ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว (Double integrals in rectangular and polar coordinates)

พิจารณาฟังก์ชันของสองตัวแปร $f(x, y)$ ที่นิยามเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



รูปที่ 5.1: กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีโดเมนเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สมมติว่า $f(x, y) \geq 0$ ให้ S เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R นั่นคือ

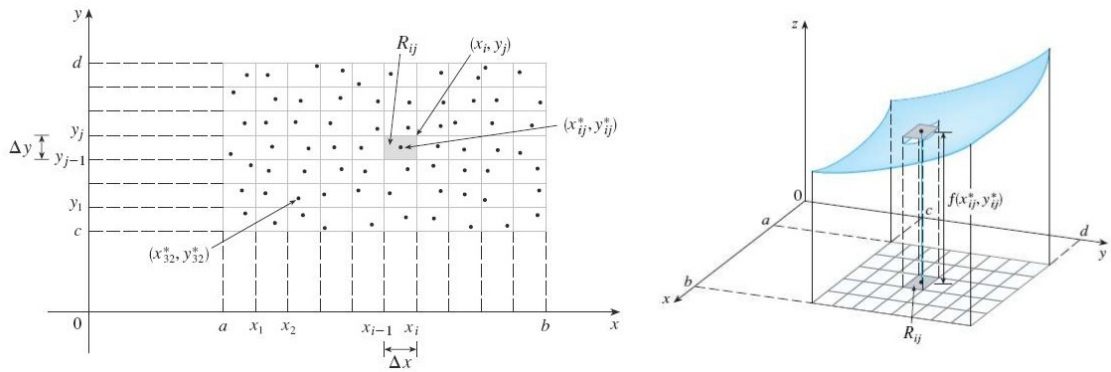
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

เราจะทำการหาปริมาตรของทรงตัน S โดยเริ่มต้นจากการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} ซึ่งได้จากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงแต่ละช่วงกว้าง $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ และแบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta y = \frac{d-c}{n}$

จากการแบ่งบริเวณ R ดังข้างต้น จะได้ว่าบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} แต่ละชั้นมีพื้นที่เป็น $\Delta A = \Delta x \Delta y$

ให้ (x_{ij}^*, y_{ij}^*) เป็นจุดบนบริเวณ R_{ij} ให้ S_{ij} เป็นแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหนือบริเวณ R_{ij} ที่มีความสูง $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ จะได้ว่า S_{ij} มีปริมาตรเป็น

$$V_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$



รูปที่ 5.2: การสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมย่อย

จะเห็นว่าถ้าให้ V แทนปริมาตรของทรงตัน S เราสามารถประมาณค่าของ V ได้โดย

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

การประมาณค่าของ V ข้างต้นจะใกล้เคียงค่าจริงมากขึ้นหากเราเลือก m และ n ให้มีค่ามากขึ้นด้วย ดังนั้น

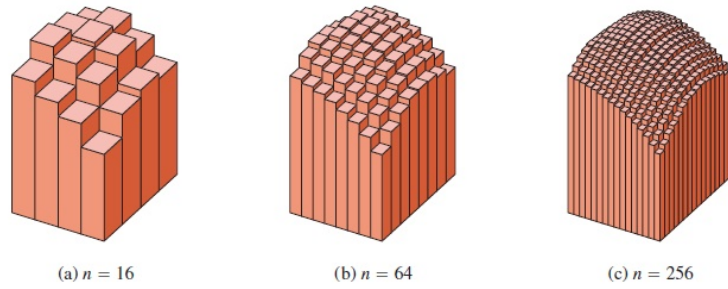
$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

บทนิยาม 5.1.1. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ปริพันธ์สองชั้นของ f เหนือบริเวณ R กำหนดโดย

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

จากนิยาม 5.1.1 เราจะได้ว่า ปริมาตร V ของทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R หาได้จาก

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$



รูปที่ 5.3: ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากผลรวมปริมาตรแท่งสี่เหลี่ยมเล็กๆ n แท่งต่างๆ กัน

สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

$$1. \iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

$$2. \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

การหาปริพันธ์สองชั้น (Iterated Integrals)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปร เหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [a, b] \times [c, d]$ เราให้สัญลักษณ์ $\int_c^d f(x, y) dy$ แทนการหาปริพันธ์ฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ โดยให้ตัวแปร x คงที่ เรียกการดังกล่าวว่า การหาปริพันธ์ย่อย (partial integration) ให้

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

เราจะได้ว่า

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

นั่นคือ $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ หมายถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ โดยให้ตัวแปร x คงที่ก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ ในทำนองเดียวกัน

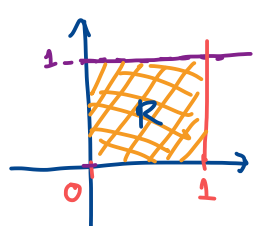
$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

หมายถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ โดยให้ตัวแปร y คงที่ก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$

ตัวอย่าง 5.1.2. จงหาปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 (1) \int_{-1}^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx &= \int_{-1}^2 x [-\cos y] \Big|_{y=0}^{y=\pi/2} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left[-x \cos \frac{\pi}{2} + x \cos 0 \right] dx \\
 &= \int_{-1}^2 x \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^{x=2} \\
 &= \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \\
 &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq
 \end{aligned}$$

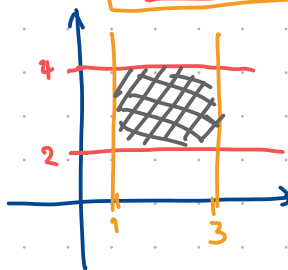
$$\begin{aligned}
 (2) \int_0^1 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+y^2} \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\frac{1}{1+y^2} \int_0^1 (1+x^2) \, dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) dy \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\
 &= \frac{4}{3} [\arctan 1 - \arctan 0] \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{3} \neq
 \end{aligned}$$



$R = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{y}{1+xy} \, dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \ln|1+xy| \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= \int_0^1 [\ln(1+y) - \ln 1] dy \\
 &= \int_0^1 \ln(1+y) dy \quad \xrightarrow{\text{วิธีอื่น}} \int \ln(1+y) dy \text{ by-parts} \\
 &= y \ln(1+y) - y + \ln(1+y) \Big|_{y=0}^{y=1} \quad \begin{array}{l} \text{ให้ } u = \ln(1+y) ; dv = dy \\ du = \frac{1}{1+y} dy ; v = y \end{array} \\
 &= [\ln 2 - 1 + \ln 2] - (0 - 0 + 0) \quad \therefore \int \ln(1+y) dy = y \ln(1+y) - \int \frac{y}{1+y} dy \\
 &= 2\ln 2 - 1 \quad \# \quad \begin{array}{l} = y \ln(1+y) - \int \frac{1+y-1}{1+y} dy + \int \frac{1}{1+y} dy \\ = y \ln(1+y) - y + \ln|1+y| + C \end{array}
 \end{aligned}$$

Ex



$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx = \int_1^3 (40y - xy^2) \Big|_{y=2}^{y=4} dx$$

$$= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)] dx$$

$$= \int_1^3 [80 - 12x] dx$$

$$= 80x - 6x^2 \Big|_{x=1}^{x=3}$$

(HW)

$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy = ?$$

alternan

$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy = \int_2^4 (40x - \frac{2x^2y}{2}) \Big|_{x=1}^{x=3} dy$$

$$= \int_2^4 [(120 - 9y) - (40 - y)] dy$$

$$= \int_2^4 [80 - 8y] dy$$

$$= 80y - \frac{8y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=4}$$

$$= [(320 - 64) - (160 - 16)]$$

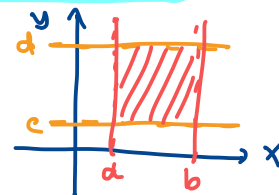
$$= [160 - 48]$$

$$= 112$$

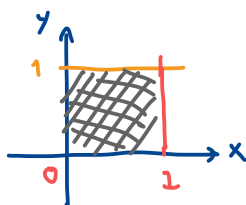
#

ทฤษฎีบท 5.1.3 (Fubini's Theorem). ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปรเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$



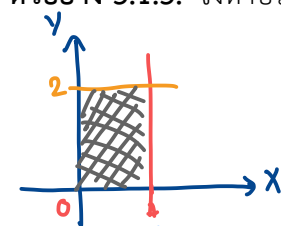
ตัวอย่าง 5.1.4. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} dy dx$



$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} dx dy = 2 \ln 2 - 1 \quad \#$$

(จาก Ex 5.1.2 ข้อ 3)

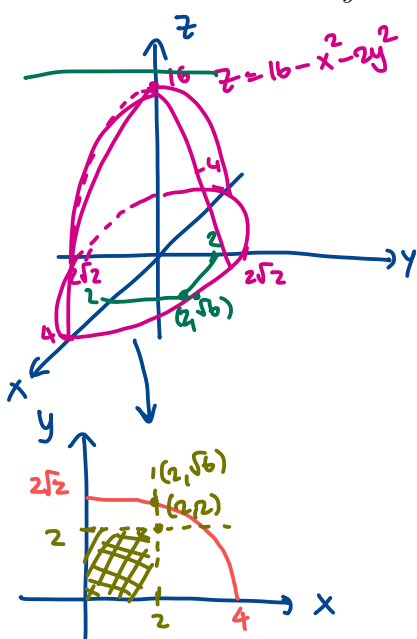
ตัวอย่าง 5.1.5. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\iint_R xy e^{x^2 y} dA$ เมื่อ $R = [0, 1] \times [0, 2]$



หาค่า $\int xy e^{x^2 y} dx$
 ให้ $u = x^2 y$; $du = 2xy dx$
 $\therefore \frac{1}{2} \int xy e^{x^2 y} dx = \frac{1}{2} \int e^u du$
 $= \frac{1}{2} e^{x^2 y} + C$

$$\begin{aligned} \iint_R xy e^{x^2 y} dA &= \int_0^2 \int_0^1 xy e^{x^2 y} dy dx = \int_0^2 \int_0^1 xy e^{x^2 y} dx dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} e^{x^2 y} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 [e^y - 1] dy \\ &= \frac{1}{2} [e^y - y]_{y=0}^{y=2} \\ &= \frac{1}{2} [e^2 - 2 - (1 - 0)] \\ &= \frac{1}{2} [e^2 - 3] \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.6. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวพาราโบลอยด์ $x^2 + 2y^2 + z = 16$, ระนาบ $x = 2$ และระนาบ $y = 2$ และระนาบพิกัดทั้งสาม



$$\begin{aligned} V &= \iiint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[16y - x^2 y - \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 \left[32 - 2x^2 - \frac{16}{3} \right] dx \\ &= \left[32x - \frac{2x^3}{3} - \frac{16x}{3} \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} \\ &= 64 - \frac{48}{3} \\ &= 64 - 16 = 48 \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 16 - x^2 - 2y^2 \\ \text{Set } z &= 0, 16 = x^2 + 2y^2 \\ 1 &= \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} \\ \text{พิกัดแกน } z &= 0, x = 2 \\ 1 &= \frac{4}{16} + \frac{y^2}{8} \\ 1 - \frac{1}{4} &= \frac{y^2}{8} \\ \frac{3}{4} &= \frac{y^2}{8} \\ y^2 &= 6 \\ y &= \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

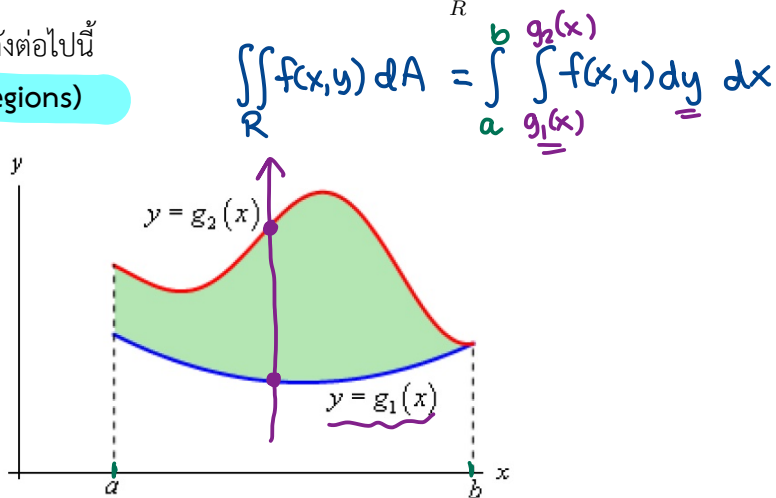
ปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่นิยามเหนือบริเวณ R ที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เราสามารถหาปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณ R , $\iint_R f(x, y) dA$ ได้โดยการจำแนก

บริเวณ R ออกเป็น 2 ชนิดดังต่อไปนี้

บริเวณชนิดที่ 1 (type I regions)



รูปที่ 5.4: บริเวณชนิดที่ 1

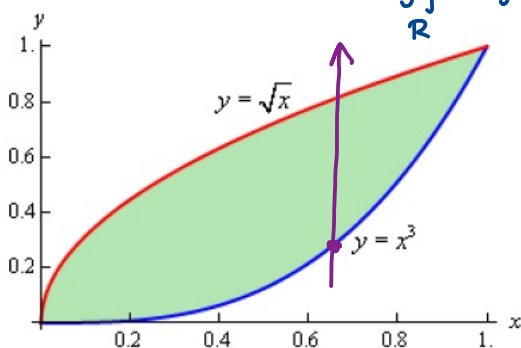
บริเวณชนิดนี้คือบริเวณที่ปิดล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $y = g_2(x)$ ปิดล้อมด้านล่างด้วยเส้นโค้ง $y = g_1(x)$ โดยที่ $g_1(x) \leq g_2(x)$ และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ นั่นคือ $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ดังรูปที่ 5.4

ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณชนิดที่ 1 หาค่าได้ดังนี้

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

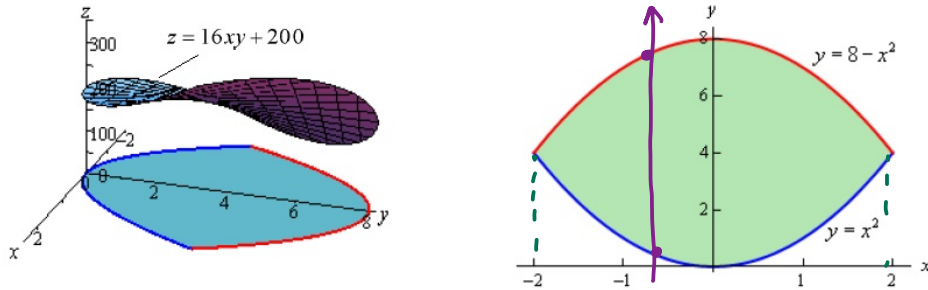
ตัวอย่าง 5.1.7. จงหาค่าของ $\iint_R (4xy - y^3) dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ

$$y = x^3$$



$$\begin{aligned} \iint_R (4xy - y^3) dA &= \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4xy - y^3) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left[\left(2x \cdot x - \frac{x^2}{4} \right) - \left(2x \cdot x^6 - \frac{x^{12}}{4} \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{7x^2}{4} - 2x^7 + \frac{x^{12}}{4} \right] dx \\ &= \left. \frac{7x^3}{12} - \frac{2x^8}{8} + \frac{x^{13}}{52} \right|_{x=0}^{x=1} \\ &= \left[\frac{7}{12} - \frac{2}{8} + \frac{1}{52} \right] \\ &= \frac{14-6}{24} + \frac{1}{52} \\ &= \frac{8}{24} + \frac{1}{52} \end{aligned}$$

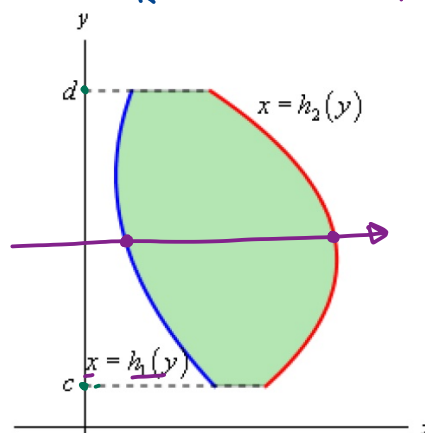
ตัวอย่าง 5.1.8. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16xy + 200$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ และ $y = 8 - x^2$



$$V = \iint_R f(x,y) dA = \iint_R (16xy + 200) dA = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200) dy dx$$

บริเวณชนิดที่ 2 (type II regions)

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

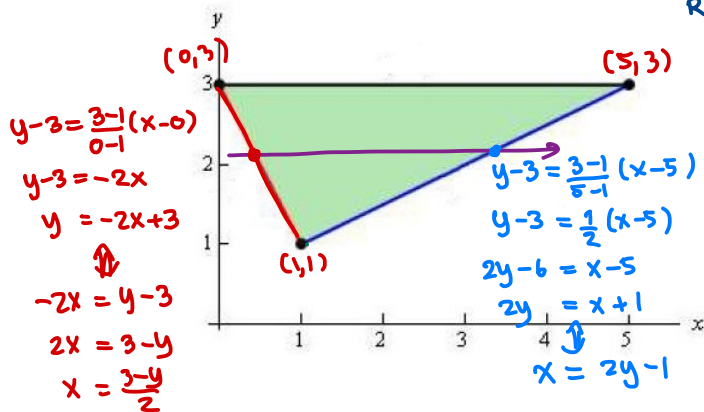


รูปที่ 5.5: บริเวณชนิดที่ 2

บริเวณชนิดนี้คือบริเวณที่ปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นโค้ง $x = h_1(y)$ และเส้นโค้ง $x = h_2(y)$ โดยที่ $h_1(y) \leq h_2(y)$ และปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยเส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ ตามลำดับ นั่นคือ $R = \{(x,y)/h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$ ดังรูปที่ 5.5
ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y)$ เหนือบริเวณชนิดที่ 2 หาค่าได้ดังนี้

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

ตัวอย่าง 5.1.9. จงหาค่าของ $\iint_R (6x^2 - 40y) dA$ เมื่อ R คือสามเหลี่ยมบนระนาบ XY ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 3)$, $(1, 1)$ และ $(5, 3)$



$$\iint_R (6x^2 - 40y) dA = \int_1^3 \int_{\frac{3-y}{2}}^{2y-1} (6x^2 - 40y) dx dy$$

ตัวอย่าง 5.1.10. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16 - x^2 - y^2$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = 4x - 2$

