

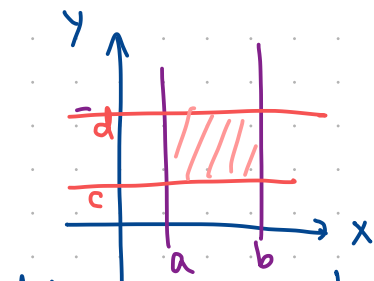
Double integral

$$z = f(x, y)$$

განვივიანო R

① $R = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_R f(x, y) dA$$

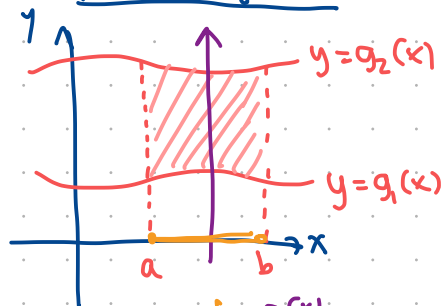


$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

(Fubini's Theorem)

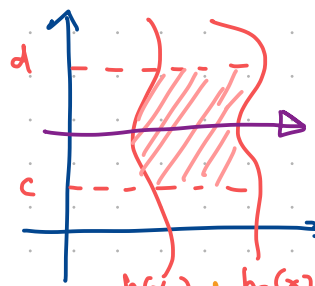
② განვივიანო R ზედაპირის $\square$

Type I - regions



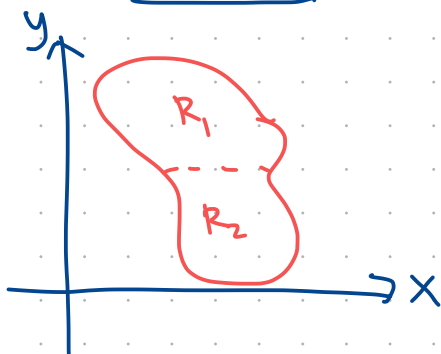
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Type II - regions



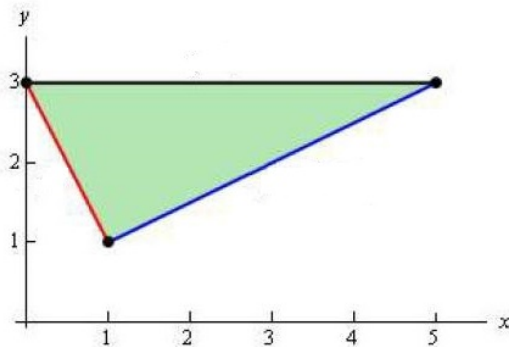
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

განვივიანო $R = R_1 \cup R_2$

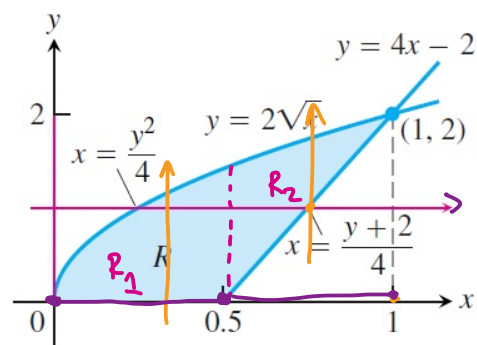
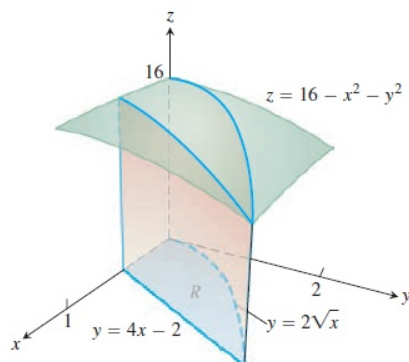


$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

ตัวอย่าง 5.1.9. จงหาค่าของ $\iint_R (6x^2 - 40y) dA$ เมื่อ R คือสามเหลี่ยมบนระนาบ XY ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 3)$, $(1, 1)$ และ $(5, 3)$



ตัวอย่าง 5.1.10. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16 - x^2 - y^2$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = 4x - 2$

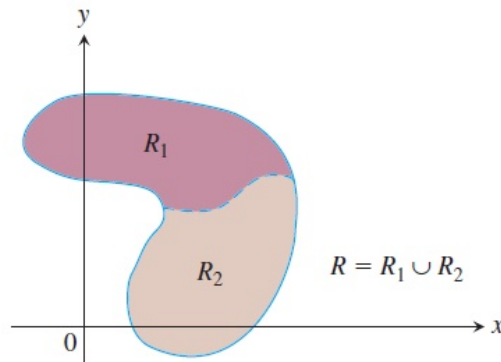


$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+2}{4}} (16 - x^2 - y^2) dx dy$$

สลับลำดับการอินทิเกรตเป็น $dy dx$ เมื่อ $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA \\ &= \int_0^{0.5} \int_0^{2\sqrt{x}} (16 - x^2 - y^2) dy dx + \int_{0.5}^1 \int_{4x-2}^{2\sqrt{x}} (16 - x^2 - y^2) dy dx \end{aligned}$$

ถ้า $R = R_1 \cup R_2$ โดยที่ R_1 และ R_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนทับกัน ดังรูป



แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

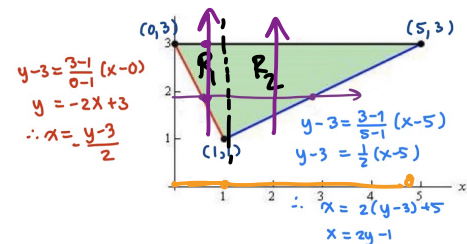
อินทิเกรต Type II

$$\int_1^3 \int_{\frac{3-y}{2}}^{2y-1} (6x^2 - 40y) dx dy$$

ตัวอย่าง 5.1.11. จากตัวอย่าง 5.1.9 จงเขียนปริพันธ์สองชั้น $\iint_R (6x^2 - 40y) dA$ โดยไม่ต้องคำนวณ

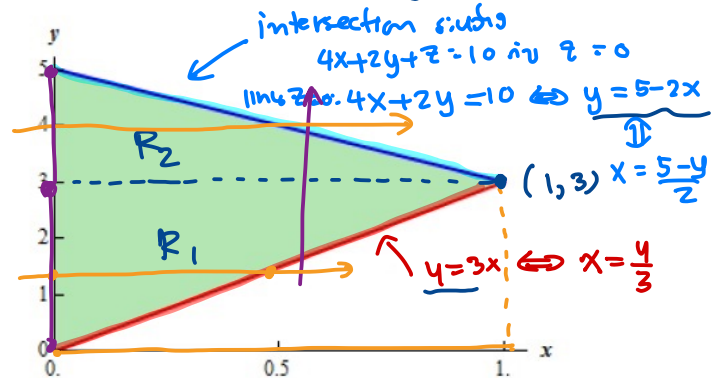
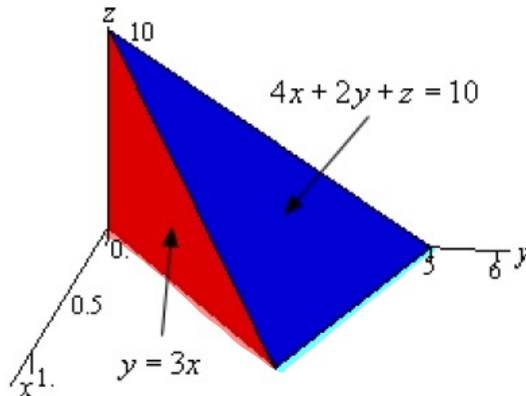
คำ เมื่อกำหนดให้พิจารณาบริเวณ R ในตัวอย่าง 5.1.9 เป็นบริเวณชนิดที่ 1

$$\begin{aligned} \iint_R (6x^2 - 40y) dA &= \iint_{R_1} (6x^2 - 40y) dA + \iint_{R_2} (6x^2 - 40y) dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2x+3}^3 (6x^2 - 40y) dy dx + \int_1^5 \int_{\frac{1}{2}(x-5)+3}^3 (6x^2 - 40y) dy dx \end{aligned}$$



ตัวอย่าง 5.1.12. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $4x + 2y + z = 10$, $y = 3x$, $z = 0$

และระนาบ $x = 0$



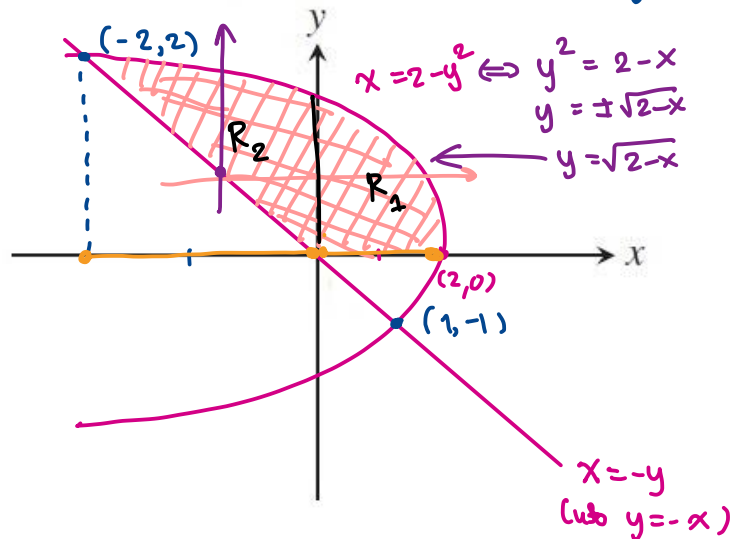
$$V = \iiint_R (10 - 4x - 2y) dA = \int_0^1 \int_{3x}^{5-2x} (10 - 4x - 2y) dy dx$$

วิธีลำดับการอินทิเกรต เป็น $dx dy$

$$V = \iint_R (10 - 4x - 2y) dx dy = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} (10 - 4x - 2y) dx dy + \int_3^7 \int_{\frac{y-5}{2}}^{\frac{y}{3}} (10 - 4x - 2y) dx dy$$

ตัวอย่าง 5.1.13. กำหนดให้ $F = \int_0^2 \int_{-y}^{2-y^2} f(x, y) dx dy$ เป็นอินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณปิด R

(i) จงเขียนกราฟและแรเงาบริเวณปิด R



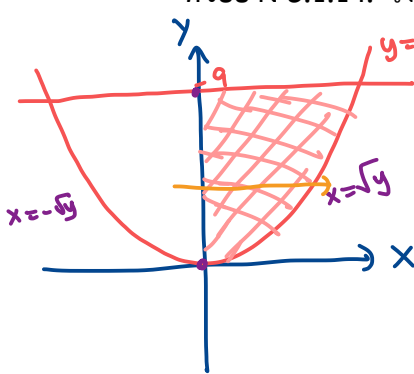
(ii) จงสลับลำดับการอินทิเกรตเป็น

$$F = \iint_R f(x, y) dy dx = \int_{-2}^0 \int_{-x}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy dx$$

(iii) จงหาค่าของ $F = \iint_{R_1} \frac{e^x}{\sqrt{2-x}} dA$ โดยที่ R_1 คือบริเวณปิด R ซึ่ง $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x}} \frac{e^x}{\sqrt{2-x}} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{e^x}{\sqrt{2-x}} \cdot y \right]_0^{\sqrt{2-x}} dx \\ &= \int_0^2 e^x dx \\ &= e^2 - e^0 = e^2 - 1 \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.14. จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้



$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$$

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$$

$$= \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3} dx dy$$

$$= \int_0^9 \left[\frac{x^4}{4} e^{y^3} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^9 \frac{(\sqrt{y})^4}{4} e^{y^3} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^9 y^2 e^{y^3} dy$$

$$= \frac{1}{12} [e^{y^3}]_{y=0}^{y=9}$$

$$= \frac{1}{12} [e^{9^3} - 1] \quad \neq$$

หาค่า

$$\int y^2 e^{y^3} dy$$

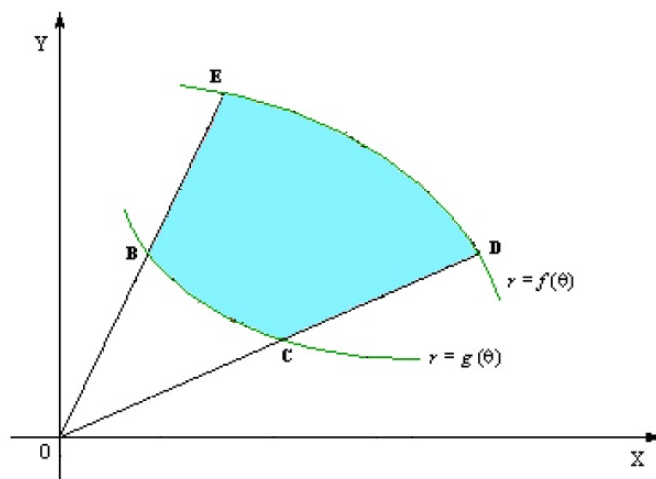
ให้ $u = y^3$; $du = 3y^2 dy$

$$\therefore \frac{1}{3} \int y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{3} e^u + C$$

ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาปริพันธ์สองชั้นของ $f(x, y)$ เหนือบริเวณ R ที่เป็นบริเวณเชิงขั้ว โดยเราจะเริ่มพิจารณาจากบริเวณ $R = \{(r, \theta) / g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ ดังรูปที่ 5.6

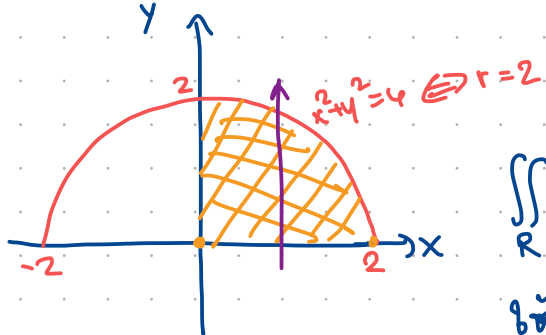


รูปที่ 5.6: บริเวณเชิงขั้ว

เราสามารถหาค่าของ $\iint_R f(x, y) dA$ ได้โดยเริ่มต้นจากการแบ่งช่วงปิด $[C, D]$ ออกเป็น m ช่วง เรียก

แต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[r_{i-1}, r_i]$; $1 \leq i \leq m$, $r_0 = C$, $r_m = D$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\Delta r = \frac{D - C}{m}$

Ex ใหั R เป็นบริเวณที่ปกคลุมด้วย $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$; $0 \leq x \leq 2$



$$y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 4-x^2 \\ x^2 + y^2 = 4$$

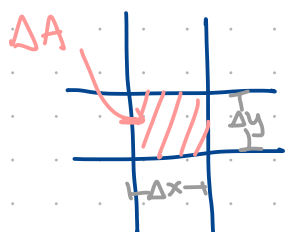
$$\iint_R f(x,y) dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy dx$$

ถ้า $f(x,y) = 1$

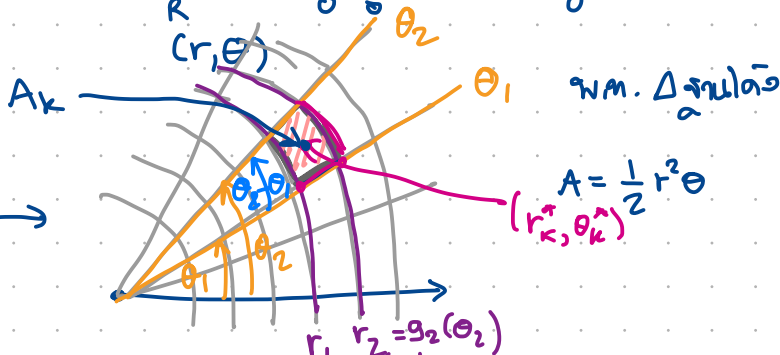
$$\iint_R dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$u = 2 \sin \theta \\ du = 2 \cos \theta d\theta$$

พิจารณาขนาดของ



$$\Delta A = \Delta x \Delta y \\ dA = dx dy \\ \iint_R f(x,y) dA$$



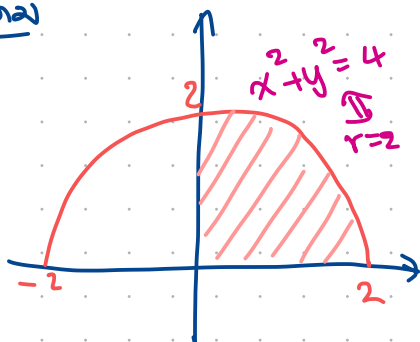
$$\Delta A_k = \frac{1}{2} r_2^2 (\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} r_1^2 (\theta_2 - \theta_1) \\ = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) (\theta_2 - \theta_1) \\ = \frac{1}{2} (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) (\theta_2 - \theta_1) \\ = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\Delta r_k} \underbrace{(\theta_2 - \theta_1)}_{\Delta \theta_k}$$

$$\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k \Leftrightarrow dA = r dr d\theta$$

$$\iint_R f(r,\theta) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \underbrace{r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k}_{dA}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta$$

Ex ต่อมา



$$x^2 + y^2 = r^2$$

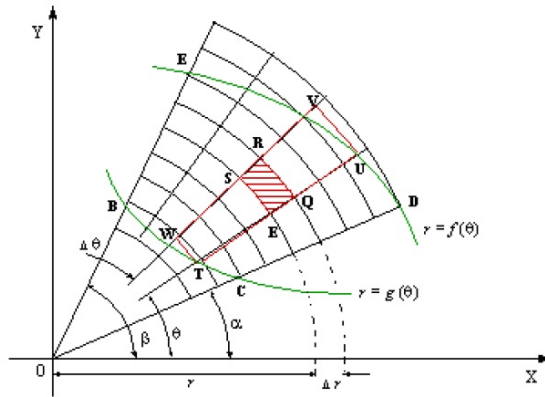
$$\iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{2} d\theta$$

$$= 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

เท่าๆ กัน จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[\theta_{j-1}, \theta_j]; 1 \leq j \leq n, \theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$ ดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7: การแบ่งบริเวณเชิงขั้วออกเป็นสี่เหลี่ยมเล็กๆ ที่เท่ากันในด้านและมุม

จากการแบ่งดังกล่าวทำให้เราสามารถแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าในเชิงขั้ว R_{ij} หลายๆ รูปที่เหมือนกัน จะเห็นว่า $R_{ij} = \{(r, \theta)/r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$ ให้

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \text{และ} \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

จะเห็นว่าจุด (r_i^*, θ_j^*) จะเป็นจุดบน R_{ij} และถ้าให้ ΔA_{ij} แทนพื้นที่ของ R_{ij} เราจะได้ว่า

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \\ &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

นั่นคือถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเหนือบริเวณเชิงขั้ว $R = \{(r, \theta)/g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$