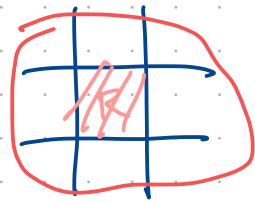


Double integral

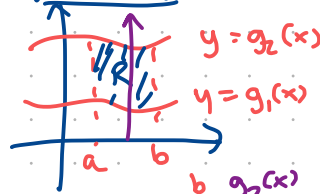


$$\iint_R f(x,y) dA$$

$$dx dy$$

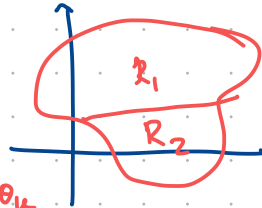
$$dy dx$$

Type 1 region



$$\iint_R f(x,y) dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

$$R = R_1 \cup R_2$$

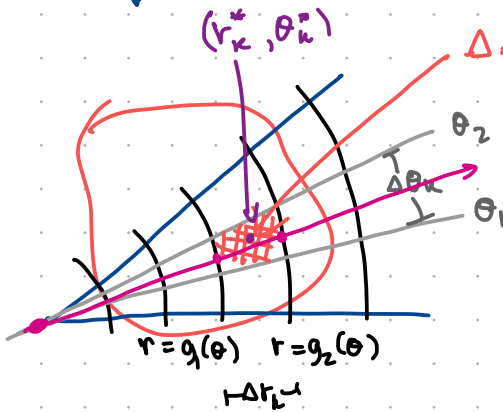


$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$$

Type 2 region



$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$



$$\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k$$

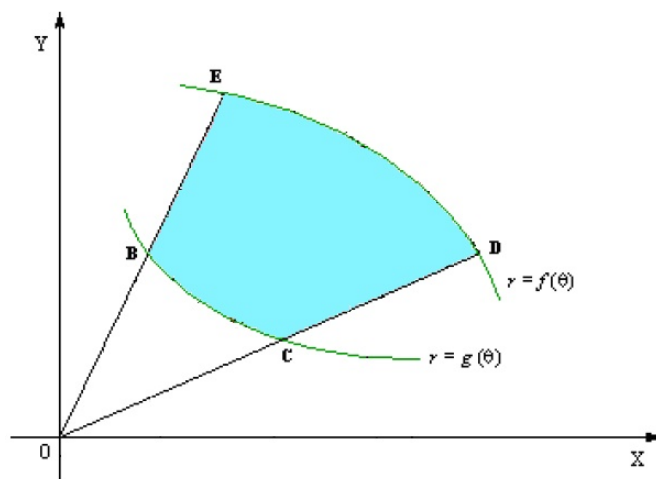
$$dA = r dr d\theta$$

$$V = \iint_R f(r,\theta) dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta$$

ตัวอย่าง 5.1.14. จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้ $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$

ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

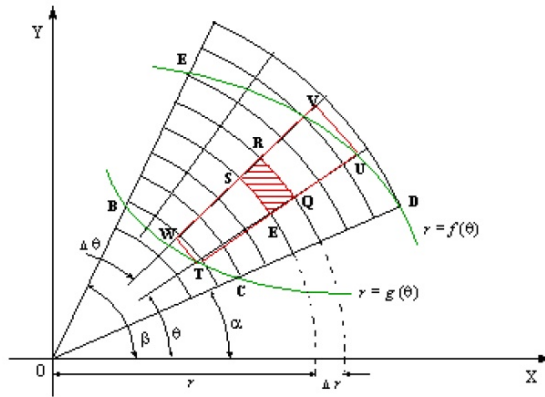
ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาปริพันธ์สองชั้นของ $f(x, y)$ เหนือบริเวณ R ที่เป็นบริเวณเชิงขั้ว โดยเราจะเริ่มพิจารณาจากบริเวณ $R = \{(r, \theta) / g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ ดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6: บริเวณเชิงขั้ว

เราสามารถหาค่าของ $\iint_R f(x, y) dA$ ได้โดยเริ่มต้นจากการแบ่งช่วงปิด $[C, D]$ ออกเป็น m ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[r_{i-1}, r_i]; 1 \leq i \leq m, r_0 = C, r_m = D$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\Delta r = \frac{D - C}{m}$

เท่าๆ กัน จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[\theta_{j-1}, \theta_j]; 1 \leq j \leq n, \theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$ ดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7: การแบ่งบริเวณเชิงขั้วออกเป็นสี่เหลี่ยมเล็กๆ ที่เท่ากันในด้านและมุม

จากการแบ่งดังกล่าวทำให้เราสามารถแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าในเชิงขั้ว R_{ij} หลายๆ รูปที่เหมือนกัน จะเห็นว่า $R_{ij} = \{(r, \theta)/r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$ ให้

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \text{และ} \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

จะเห็นว่าจุด (r_i^*, θ_j^*) จะเป็นจุดบน R_{ij} และถ้าให้ ΔA_{ij} แทนพื้นที่ของ R_{ij} เราจะได้ว่า

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

ดังนั้น

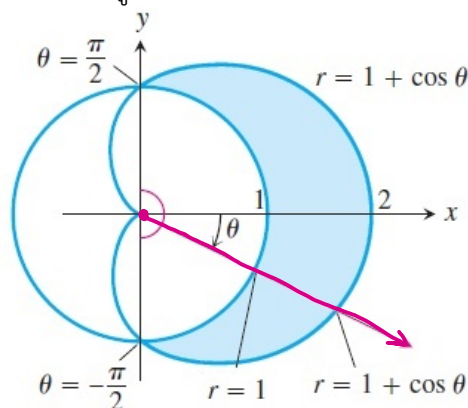
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \\ &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

นั่นคือถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเหนือบริเวณเชิงขั้ว $R = \{(r, \theta)/g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

ตัวอย่าง 5.1.15. จงเขียนปริพันธ์ $\iint_R f(r, \theta) dA$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อ R

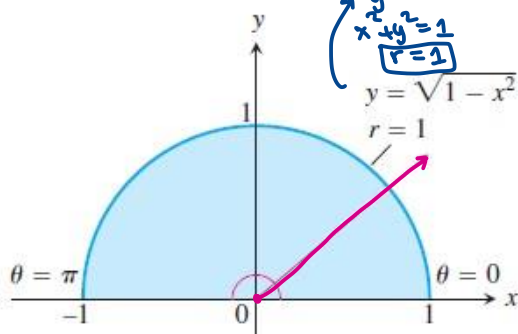
คือบริเวณที่อยู่ภายในคาร์ตอยด์ $r = 1 + \cos \theta$ และภายนอกวงกลม $r = 1$ ดังรูป



$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} f(r, \theta) r dr d\theta$$

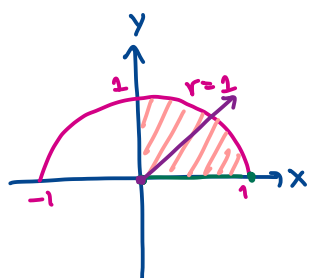
ตัวอย่าง 5.1.16. จงหาค่าของ $\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx$ เมื่อ R คือบริเวณที่ครึ่งวงกลมที่ปิดล้อมด้วยแกน X

และเส้นโค้ง $y = \sqrt{1-x^2}$



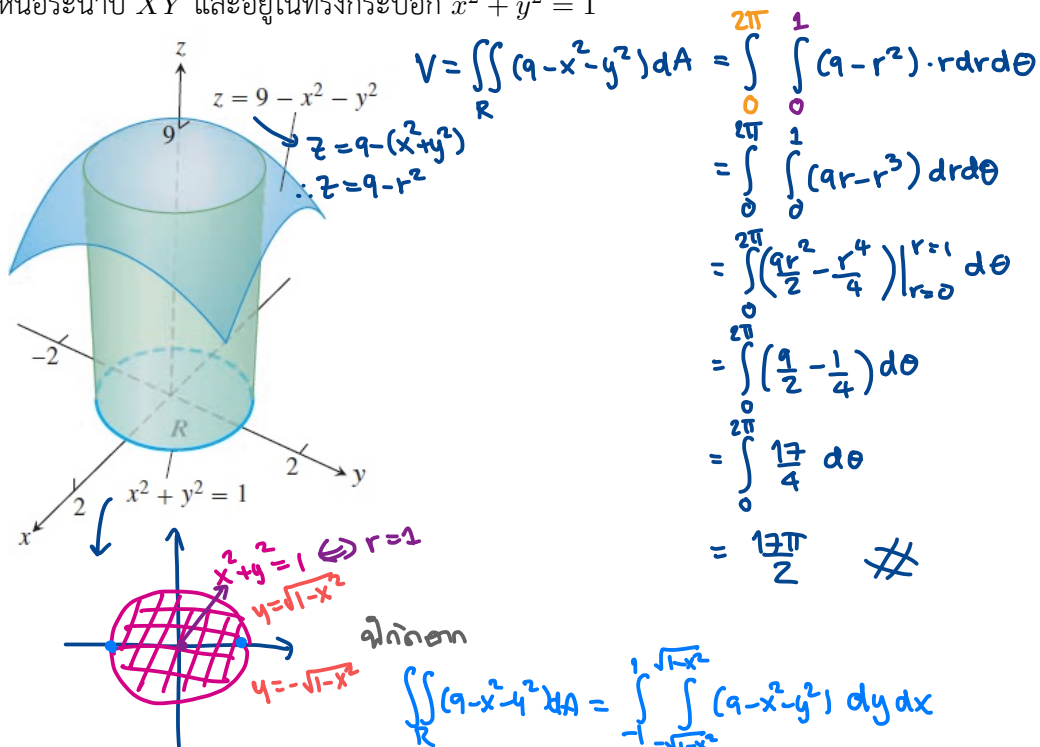
$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \quad \text{ให้ } u = r^2; du = 2r dr \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (e^1 - e^0) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (e - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \pi (e - 1) \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.17. จงหาค่าของ



$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.18. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพาราโบลอยด์ $z = 9 - x^2 - y^2$ อยู่เหนือระนาบ XY และอยู่ในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$



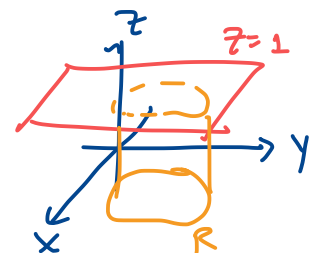
5.2 การประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น (Applications of double integrals)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น คือการหาพื้นที่ของบริเวณในสองมิติ
พิจารณาทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ $z = f(x, y) = 1$ และอยู่เหนือบริเวณ R เราสามารถหาปริมาตรของทรงตันดังกล่าวได้โดย

$$V = \iiint_R f(x, y) dA = \iint_R 1 dA = \iint_R dA$$

แต่

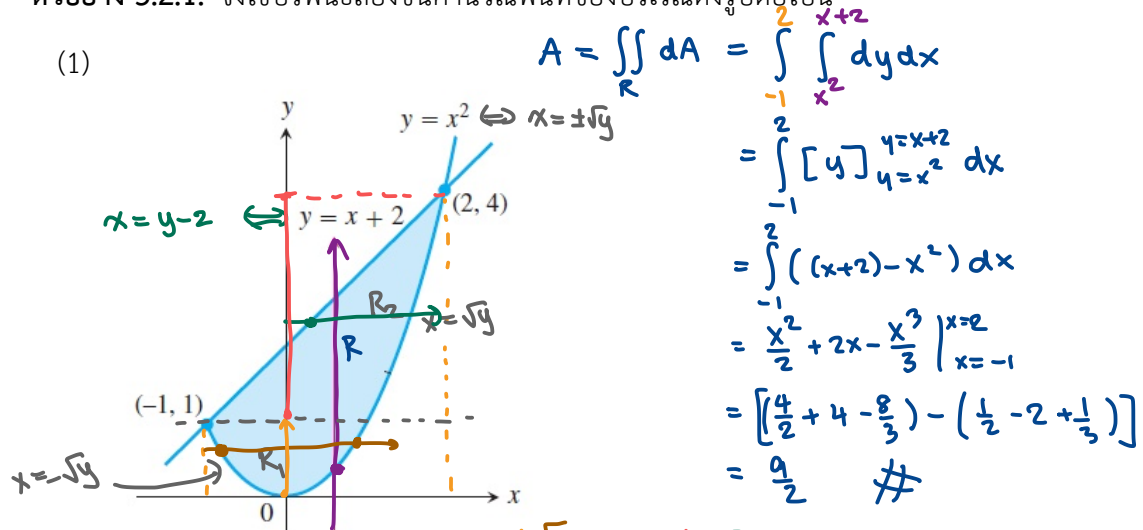
$$V = \text{ความสูง} \times \text{พื้นที่ฐาน} = 1 \times \text{พื้นที่ฐาน}$$



ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R หาได้โดย

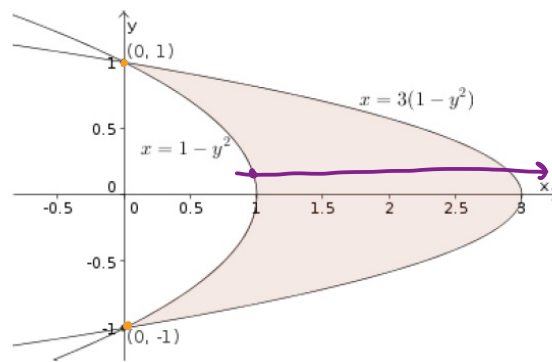
$$A = \iint_R dA$$

ตัวอย่าง 5.2.1. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นคำนวณพื้นที่ของบริเวณดังรูปต่อไปนี้



ลำดับ $dx dy$: $\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy$

(2)



$$A = \iint_R dA = \int_{-1}^1 \int_{1-y^2}^{3(1-y^2)} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 [3(1-y^2) - (1-y^2)] dy$$

$$= \int_{-1}^1 2(1-y^2) dy$$

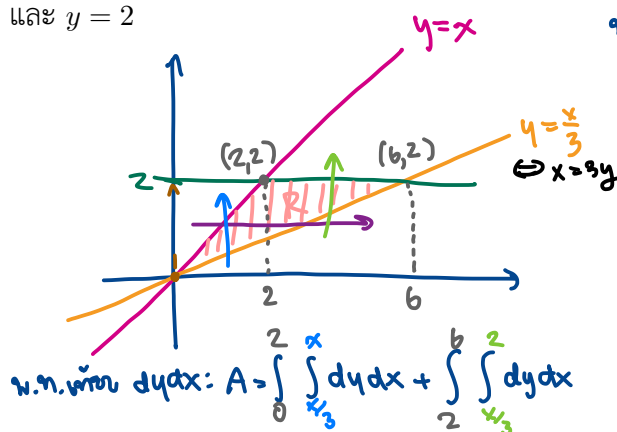
$$= 2 \int_{-1}^1 (1-y^2) dy$$

$$= 2 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=1}$$

$$= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = 2 \left[2 - \frac{2}{3} \right]$$

$$= \frac{8}{3} \quad \#$$

ตัวอย่าง 5.2.2. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นคำนวณพื้นที่ของบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x$, $y = \frac{x}{3}$ และ $y = 2$



พ.ท.พื้นที่ $dx dy$: $A = \int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^y dx dy$

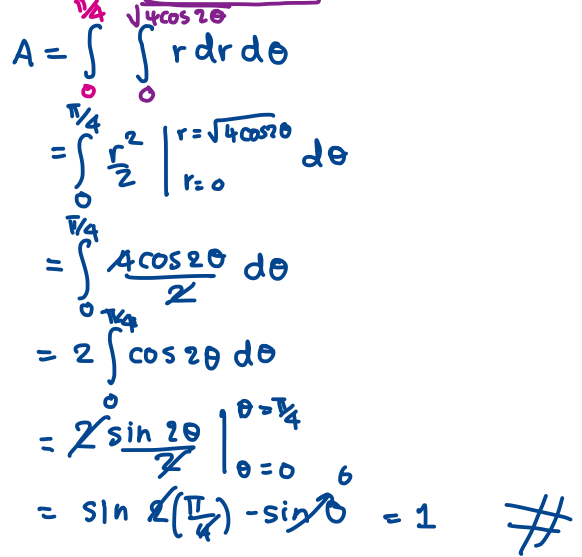
$$= \int_0^2 [xy - y] dy$$

$$= \int_0^2 2y dy$$

$$= \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= 4 \quad \#$$

บทที่ 5. ปริพันธ์หลายชั้นและการประยุกต์



และเส้นตรง $y = \sqrt{3}x$

$x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 4$
 $x^2 + 3x^2 = 4$
 $4x^2 = 4$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$

$x^2 + 1 = 4$
 $x^2 = 3$
 $x = \pm\sqrt{3}$

$A = \iint_R r dr$

$y = \sqrt{3}x$

$\tan \theta = \sqrt{3}$
 $\theta = \frac{\pi}{3}$

$r = \csc \theta$

$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\theta = \frac{\pi}{6}$

$x^2 + y^2 = 4$
 $\therefore r^2 = 4$
 $r = 2$

$y = 1$

$y = 1$

$y = \sqrt{3}x$

R

$(1, \sqrt{3})$

$(\sqrt{3}, 1)$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$y = 1$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$
 $1 = r \sin \theta$
 $\therefore r = \csc \theta$

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=\csc \theta}^2 r dr d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=\csc \theta}^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (4 - \csc^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[4\theta + \cot \theta \right]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(4\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) - \left(4\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}-3}{3} \right] \quad \neq
 \end{aligned}$$

ดังรูป