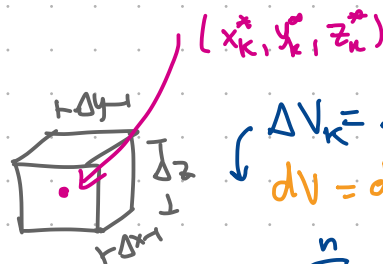
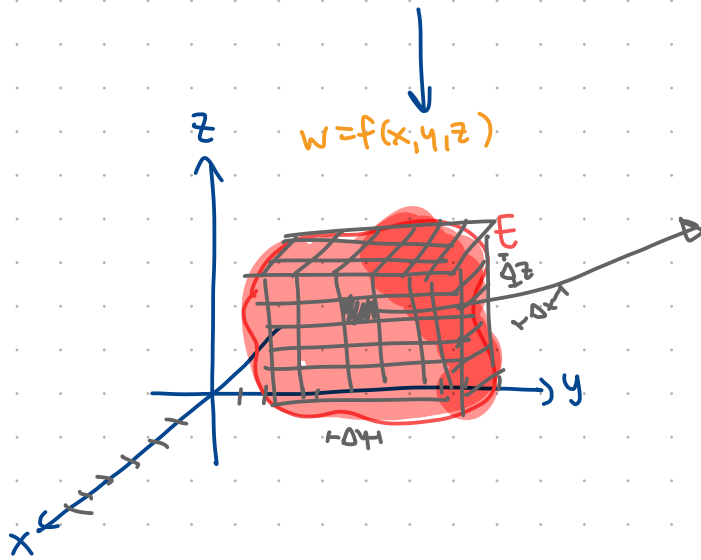
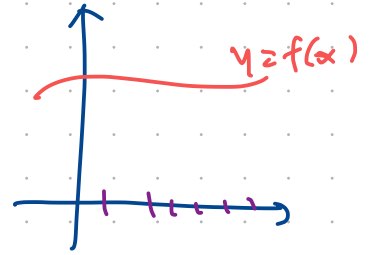
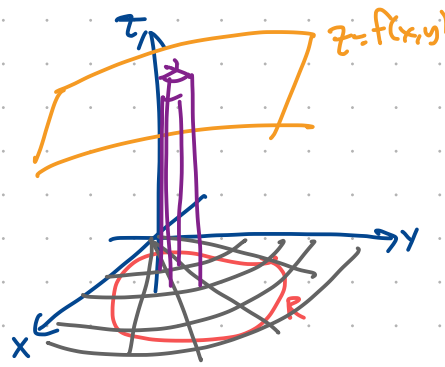
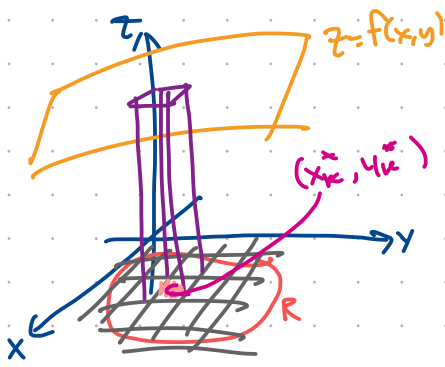


Triple Integral

Double Integral



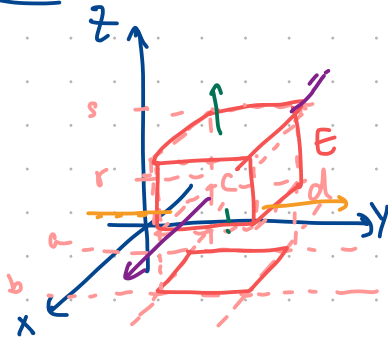
$$\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

$$dV = dx dy dz, dy dz dx, \dots \text{ (all same)}$$

$$\text{Volume element} : \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

$$\text{Take limit: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

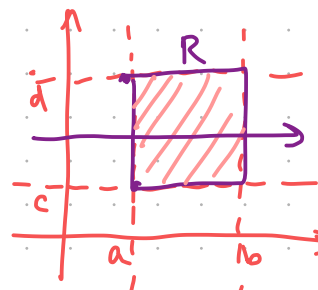
Case E is a rectangular box



Fubini's Theorem

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \\ &\vdots \end{aligned}$$

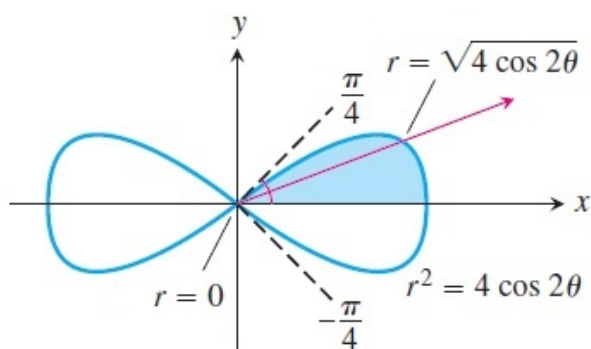
Double integral



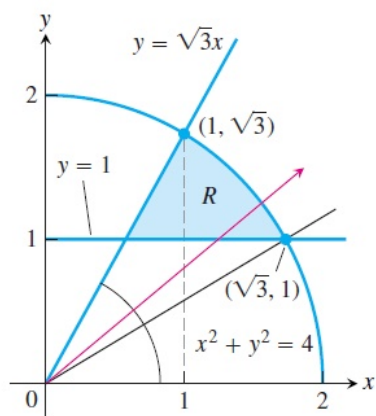
Fubini's Theorem

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งโคงเลมนิสเคต $r^2 = 4 \cos 2\theta$



ตัวอย่าง 5.2.4. จงหาพื้นที่ของบริเวณ R บนระนาบ ที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ เส้นตรง $y = 1$ และเส้นตรง $y = \sqrt{3}x$



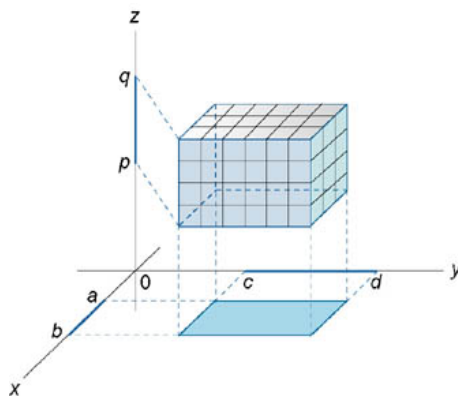
5.3 ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม (Triple integrals in rectangular cylindrical and spherical coordinates)

ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก

เราจะเริ่มจากการพิจารณากรณีที่ง่ายที่สุด ให้ f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y, z ที่นิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า B ที่กำหนดโดย

$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$$

ดังรูป



รูปที่ 5.8: กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบพิกัดฉากสามมิติ

เราจะแบ่ง B ออกเป็นกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ที่มีขนาดเท่ากัน โดยเริ่มจากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น l ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta x = \frac{b-a}{l}$ แบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น m ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ และแบ่งช่วงปิด $[p, q]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta z = \frac{q-p}{n}$ ดังนั้นเราจะได้กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ที่มีขนาดเท่ากันทั้งหมด lmn กล่อง แต่ละกล่องมีปริมาตรเป็น $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ สร้างผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

เมื่อ $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ คือจุดบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย B_{ijk} เรานิยาม **ปริพันธ์สามชั้น (triple integral)** ของฟังก์ชัน f เหนือกล่อง B ดังนี้

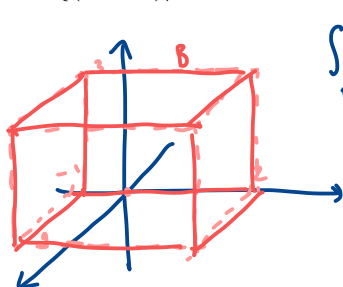
$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

ทฤษฎีบท 5.3.1 (Fubini's Theorem). ให้ f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y, z ที่นิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ แล้ว

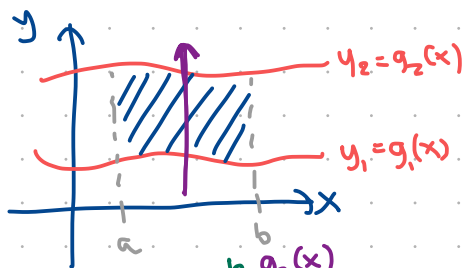
$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

ตัวอย่าง 5.3.2. จงหาค่าของ $\iiint_B xyz^2 dV$ เมื่อ B คือกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดโดย $B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$



$$\begin{aligned} \iiint_B xyz^2 dV &= \int_{-1}^2 \int_0^3 \int_0^1 xyz^2 dx dz dy \\ &= \int_{-1}^2 \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} y z^2 \right]_{x=0}^{x=1} dz dy = \int_{-1}^2 \int_0^3 \frac{1}{2} y z^2 dz dy \\ &= \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{2} \cdot y \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3} dy = \int_{-1}^2 \frac{27}{6} y dy \\ &= \left[\frac{27}{6} \frac{y^2}{2} \right]_{y=-1}^{y=2} = \frac{27}{6} \left[\frac{4}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right] = \frac{27}{6} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{27}{4} \neq \end{aligned}$$

Type 1 - region



$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

Type 2 - region



$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

Type 1 solid
Type 2 solid
Type 3 solid.

ข้อสังเกต การหาปริพันธ์ในลำดับการอินทิเกรตอื่นๆ จะให้ค่าที่เท่ากัน

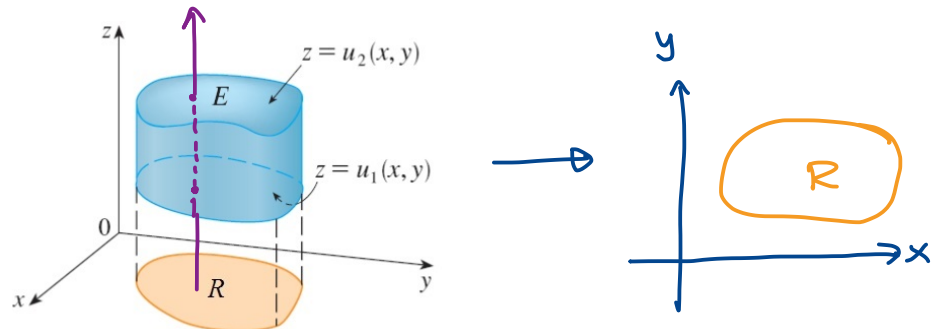
ต่อไปเราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตันปิด E ใดๆ โดยเราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็นกรณีต่างๆ ตามชนิดของทรงตันดังนี้

ทรงตันปิดชนิดที่ 1 (type I solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจกชัน E ลงบนระนาบ XY รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 1

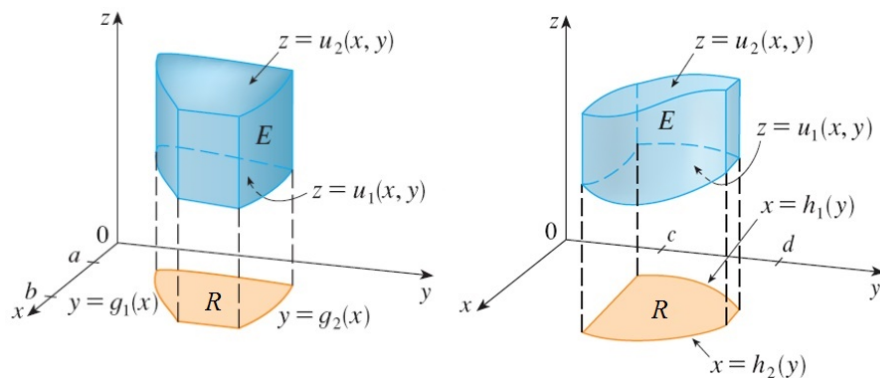


รูปที่ 5.9: ทรงตันปิดชนิดที่ 1

การหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

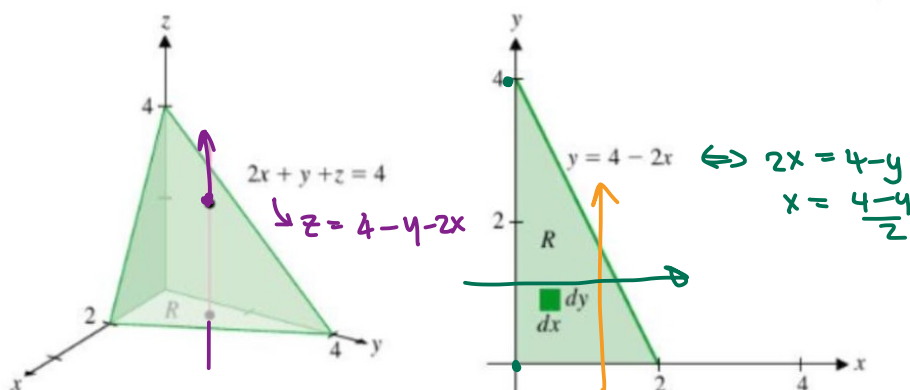
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

การหาปริพันธ์ในวงเล็บสามารถทำได้โดยการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร z โดยให้ตัวแปร x และ y เป็นตัวคงค่า ผลที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของ x และ y จากนั้นจึงนำไปหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณ R ซึ่งอาจเป็นบริเวณชนิดที่ 1 หรือ 2 ก็ได้ตามที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้ในหัวข้อก่อนหน้านี้



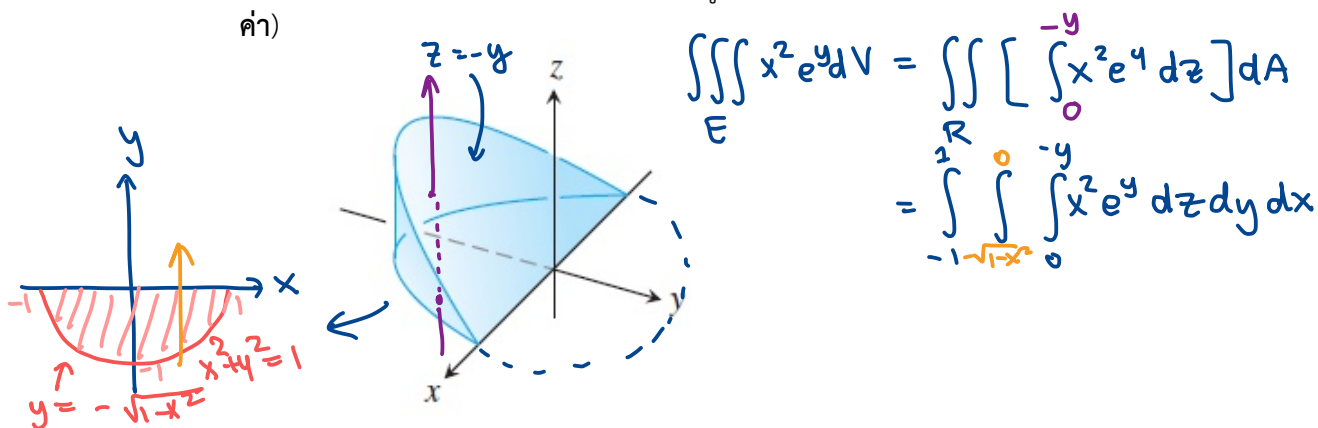
รูปที่ 5.10: ทรงตันปิดชนิดที่ 1 ที่มี R เป็นบริเวณชนิดที่ 1 (ซ้าย) และ 2 (ขวา)

ตัวอย่าง 5.3.3. จงหาค่าของ $\iiint_E 6xy dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 0, y = 0, z = 0$ และ $2x + y + z = 4$ ดังรูป



$$\begin{aligned} \iiint_E 6xy dV &= \iiint_E \left[\int_{4-2x}^{4-y-2x} 6xy dz \right] dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-y-2x} 6xy dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{4-2x} 6xy (4-y-2x) dy dx \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.4. จงเขียน $\iiint_E x^2 e^y dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวเชิงทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ระนาบ $z = -y$ และระนาบ $z = 0$ ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)



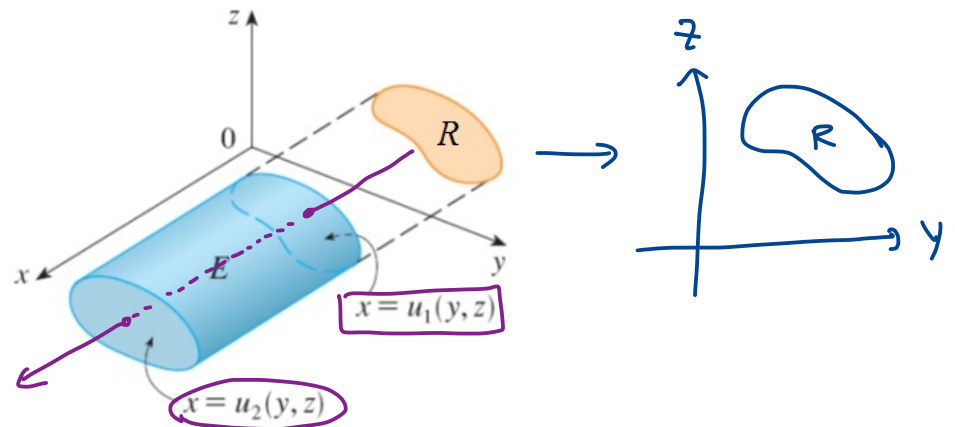
$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 e^y dV &= \iiint_E \left[\int_0^{-y} x^2 e^y dz \right] dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x^2 e^y dy dx \end{aligned}$$

ทรงตันปิดชนิดที่ 2 (type II solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z), (y, z) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจกชัน E ลงบนระนาบ YZ รูป 5.11 แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 2



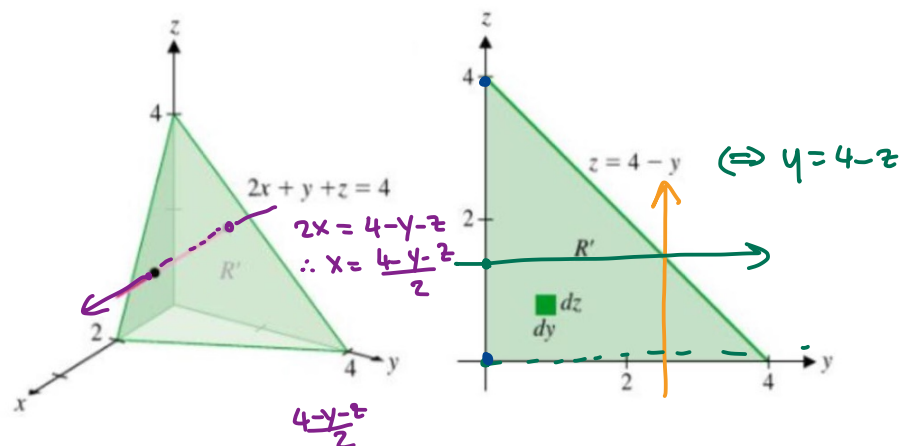
รูปที่ 5.11: ทรงตันปิดชนิดที่ 2

การหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dA$$

ตัวอย่าง 5.3.5. จงเขียน $\iiint_E f(x, y, z) dV$ เมื่อ E คือทรงตันในตัวอย่าง 5.3.3 ในรูปของปริพันธ์สาม

ชั้นในระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่า) และให้หาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x ก่อน



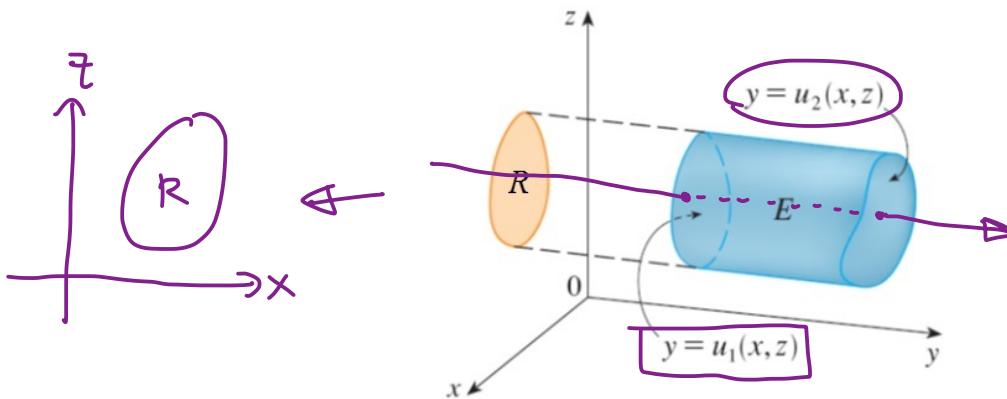
$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \iint_{R'} \left[\int_0^{4-y-z} f(x, y, z) dx \right] dA \\ &= \int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{4-y-z} f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_0^{4-y-z} f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

ทรงตันปิดชนิดที่ 3 (type III solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z), (x, z) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจกชัน E ลงบนระนาบ XZ รูปที่ 5.12 แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 3



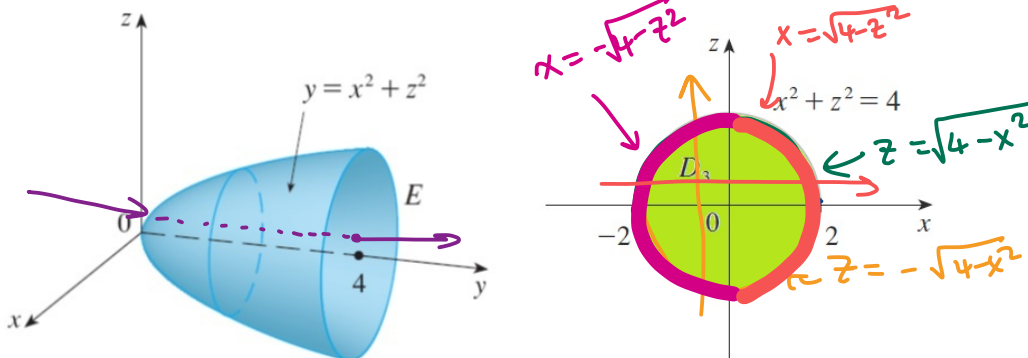
รูปที่ 5.12: ทรงตันปิดชนิดที่ 3 [4]

การหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA$$

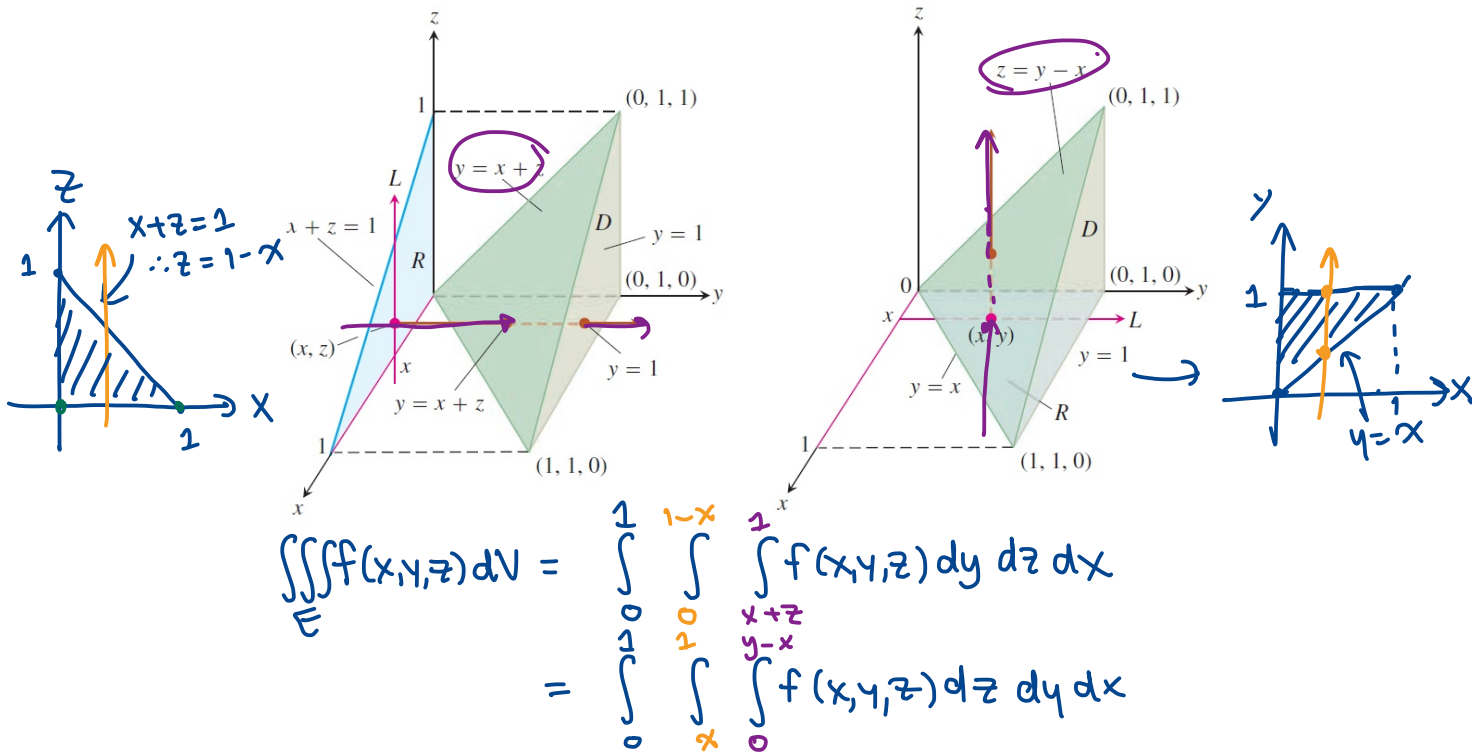
ตัวอย่าง 5.3.6. จงเขียน $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV$ ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก โดยไม่ต้อง

คำนวณค่า เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $y = x^2 + z^2$ และ ระนาบ $y = 4$ ดังรูป



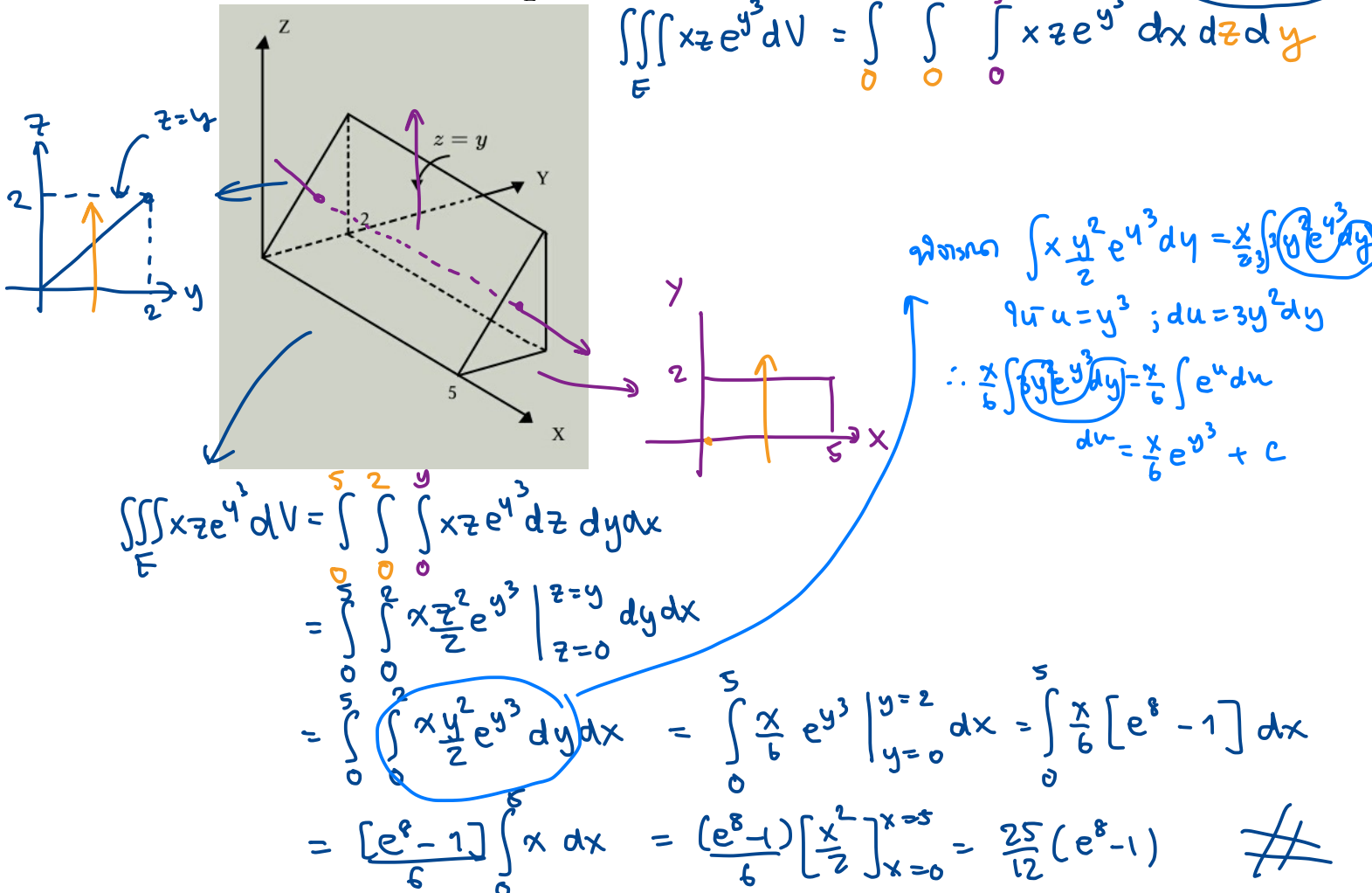
$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV &= \iint_R \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy \right] dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy dz dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy dx dz \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.7. จงเขียนปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉากของ $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E ที่กำหนดให้ ดังรูป ในลำดับการหาปริพันธ์ $dydzdx$ และ $dzdydx$ โดยไม่ต้องคำนวณค่า



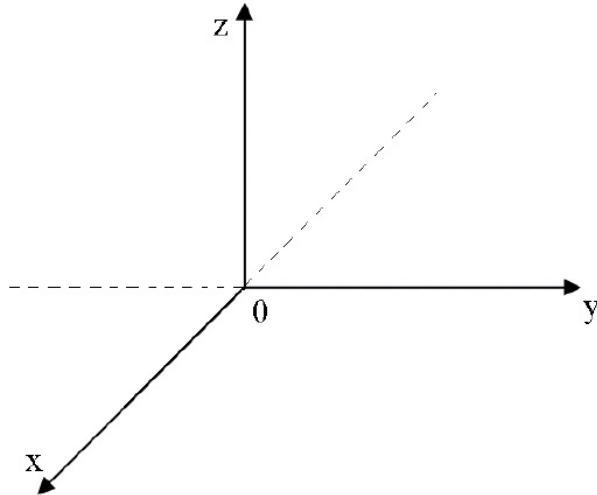
ตัวอย่าง 5.3.8. จงหาค่าของ $\iiint_E xze^{y^3} dV$ เมื่อ E คือทรงตันดังรูปข้างล่าง

$dz dy dx$



ตัวอย่าง 5.3.9. จงเขียนรูปทรงตันที่สอดคล้องกับปริพันธ์สามชั้นที่กำหนดให้ และจงเขียนปริพันธ์สามชั้นของ $f(x, y, z)$ เหนือทรงตันที่เขียนได้ ในลำดับการทึเกอร์อื่นๆ ที่เหลืออีก 5 ลำดับ

$$(1) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$



$$(2) \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dz dx$$

