

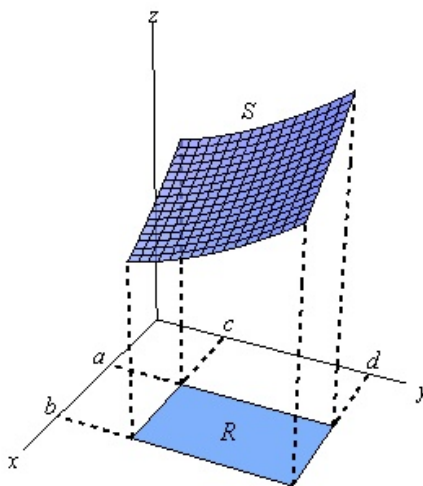
บทที่ 5

ปริพันธ์หลายชั้นและการประยุกต์ (Multiple integrals and applications)

5.1 ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว (Double integrals in rectangular and polar coordinates)

พิจารณาฟังก์ชันของสองตัวแปร $f(x, y)$ ที่นิยามเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



รูปที่ 5.1: กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีโดเมนเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สมมติว่า $f(x, y) \geq 0$ ให้ S เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R นั่นคือ

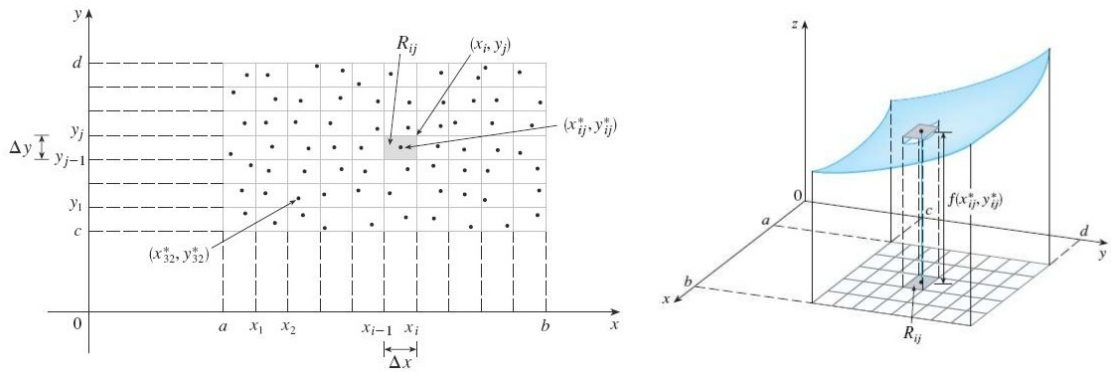
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

เราจะทำการหาปริมาตรของทรงตัน S โดยเริ่มต้นจากการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} ซึ่งได้จากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงแต่ละช่วงกว้าง $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ และแบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta y = \frac{d-c}{n}$

จากการแบ่งบริเวณ R ดังข้างต้น จะได้ว่าบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} แต่ละชั้นมีพื้นที่เป็น $\Delta A = \Delta x \Delta y$

ให้ (x_{ij}^*, y_{ij}^*) เป็นจุดบนบริเวณ R_{ij} ให้ S_{ij} เป็นแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหนือบริเวณ R_{ij} ที่มีความสูง $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ จะได้ว่า S_{ij} มีปริมาตรเป็น

$$V_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$



รูปที่ 5.2: การสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมย่อย

จะเห็นว่าถ้าให้ V แทนปริมาตรของทรงตัน S เราสามารถประมาณค่าของ V ได้โดย

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

การประมาณค่าของ V ข้างต้นจะใกล้เคียงค่าจริงมากขึ้นหากเราเลือก m และ n ให้มีค่ามากขึ้นด้วย ดังนั้น

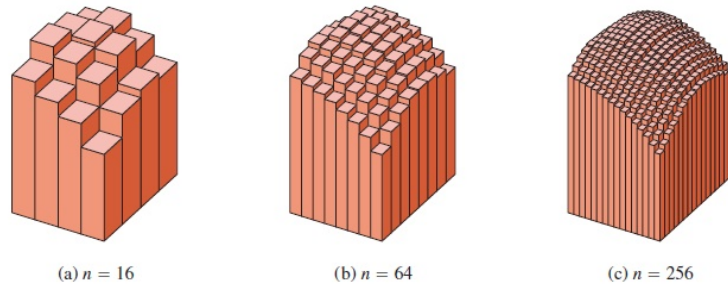
$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

บทนิยาม 5.1.1. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ปริพันธ์สองชั้นของ f เหนือบริเวณ R กำหนดโดย

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

จากนิยาม 5.1.1 เราจะได้ว่า ปริมาตร V ของทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R หาได้จาก

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$



รูปที่ 5.3: ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากผลรวมปริมาตรแท่งสี่เหลี่ยมเล็กๆ n แท่งต่างๆ กัน

สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

$$1. \iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

$$2. \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

การหาปริพันธ์สองชั้น (Iterated Integrals)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปร เหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [a, b] \times [c, d]$ เราให้สัญลักษณ์ $\int_c^d f(x, y) dy$ แทนการหาปริพันธ์ฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ โดยให้ตัวแปร x คงที่ เรียกการดังกล่าวว่า การหาปริพันธ์ย่อย (partial integration) ให้

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

เราจะได้ว่า

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

นั่นคือ $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ หมายถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ โดยให้ตัวแปร x คงที่ก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ ในทำนองเดียวกัน

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

หมายถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ โดยให้ตัวแปร y คงที่ก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$

ตัวอย่าง 5.1.2. จงหาปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$(1) \int_{-1}^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx$$

$$(2) \int_0^1 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+y^2} \, dx \, dy$$

$$(3) \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} \, dx \, dy$$

ทฤษฎีบท 5.1.3 (Fubini's Theorem). ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปรเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

ตัวอย่าง 5.1.4. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} dy dx$

ตัวอย่าง 5.1.5. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\iint_R xye^{x^2y} dA$ เมื่อ $R = [0, 1] \times [0, 2]$

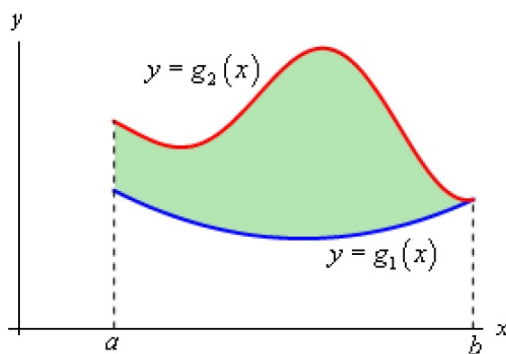
ตัวอย่าง 5.1.6. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวพาราโบลอยด์ $x^2 + 2y^2 + z = 16$, ระนาบ $x = 2$ และระนาบ $y = 2$ และระนาบพิกัดทั้งสาม

ปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่นิยามเหนือบริเวณ R ที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เราสามารถหาปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณ R , $\iint_R f(x, y) dA$ ได้โดยการจำแนก

บริเวณ R ออกเป็น 2 ชนิดดังต่อไปนี้

บริเวณชนิดที่ 1 (type I regions)

รูปที่ 5.4: บริเวณชนิดที่ 1

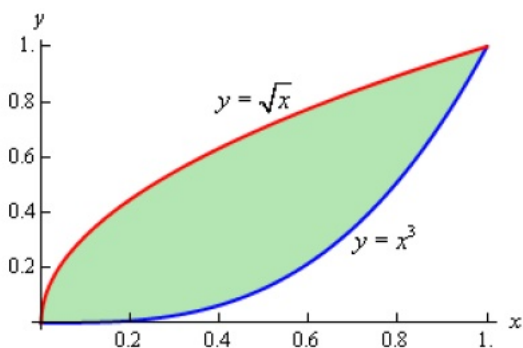
บริเวณชนิดนี้คือบริเวณที่ปิดล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $y = g_2(x)$ ปิดล้อมด้านล่างด้วยเส้นโค้ง $y = g_1(x)$ โดยที่ $g_1(x) \leq g_2(x)$ และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ นั่นคือ $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ดังรูปที่ 5.4

ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณชนิดที่ 1 หาค่าได้ดังนี้

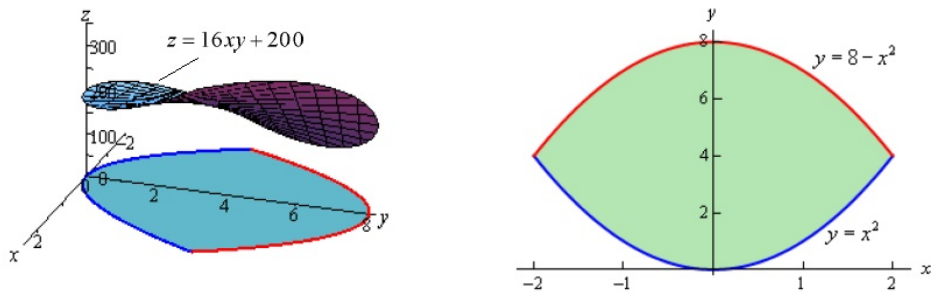
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

ตัวอย่าง 5.1.7. จงหาค่าของ $\iint_R (4xy - y^3) dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ

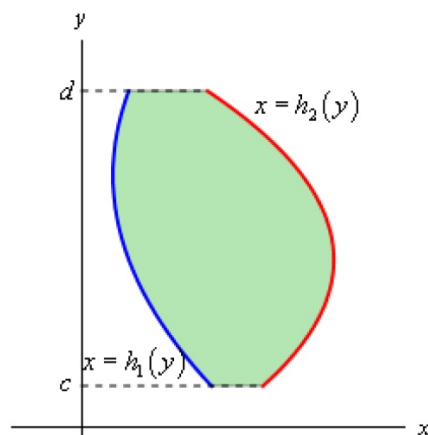
$$y = x^3$$



ตัวอย่าง 5.1.8. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16xy + 200$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ และ $y = 8 - x^2$



บริเวณชนิดที่ 2 (type II regions)

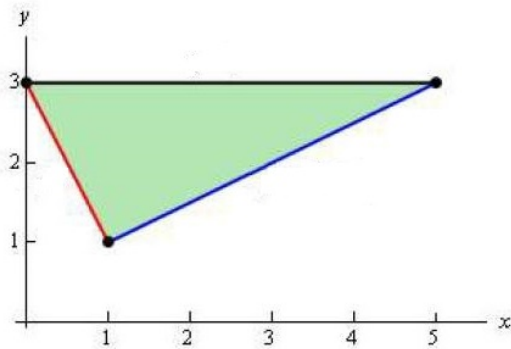


รูปที่ 5.5: บริเวณชนิดที่ 2

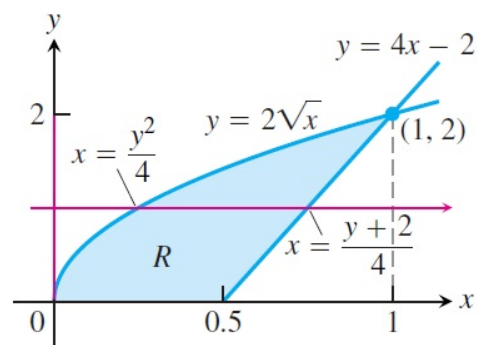
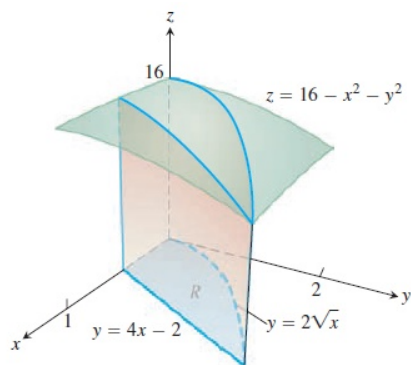
บริเวณชนิดนี้คือบริเวณที่ปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นโค้ง $x = h_1(y)$ และเส้นโค้ง $x = h_2(y)$ โดยที่ $h_1(y) \leq h_2(y)$ และปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยเส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ ตามลำดับ นั่นคือ $R = \{(x, y) / h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$ ดังรูปที่ 5.5
 ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณชนิดที่ 2 หาค่าได้ดังนี้

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

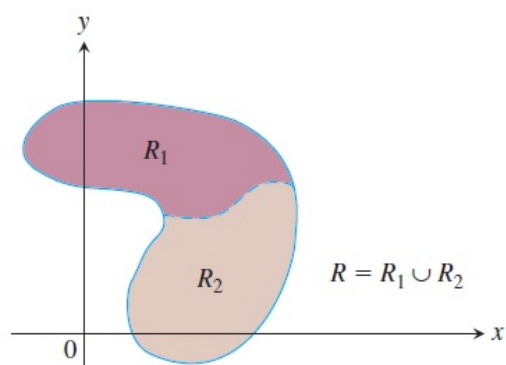
ตัวอย่าง 5.1.9. จงหาค่าของ $\iint_R (6x^2 - 40y) dA$ เมื่อ R คือสามเหลี่ยมบนระนาบ XY ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 3)$, $(1, 1)$ และ $(5, 3)$



ตัวอย่าง 5.1.10. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16 - x^2 - y^2$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = 4x - 2$



ถ้า $R = R_1 \cup R_2$ โดยที่ R_1 และ R_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนทับกัน ดังรูป



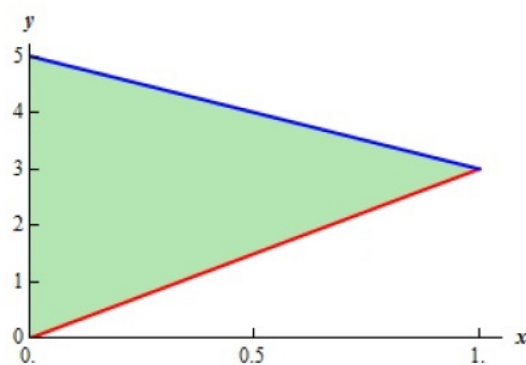
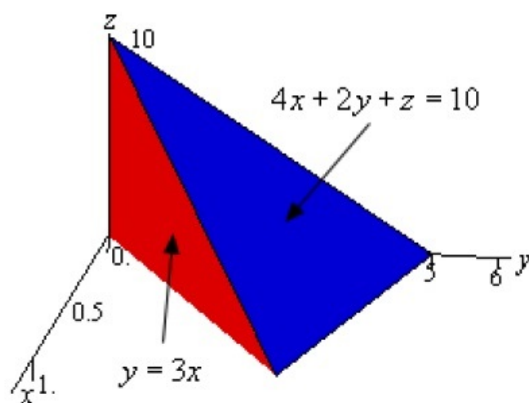
แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

ตัวอย่าง 5.1.11. จากตัวอย่าง 5.1.9 จงเขียนปริพันธ์สองชั้น $\iint_R (6x^2 - 40y) dA$ โดยไม่ต้องคำนวณ

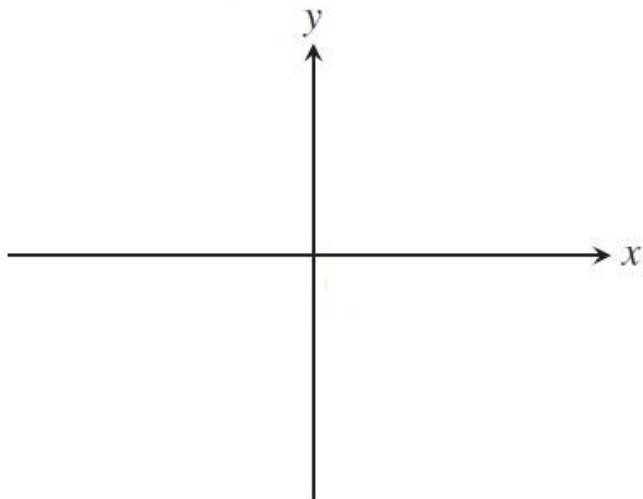
คำ เมื่อกำหนดให้พิจารณาบริเวณ R ในตัวอย่าง 5.1.9 เป็นบริเวณชนิดที่ 1

ตัวอย่าง 5.1.12. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $4x + 2y + z = 10$, $y = 3x$, $z = 0$ และระนาบ $x = 0$



ตัวอย่าง 5.1.13. กำหนดให้ $F = \int_0^2 \int_{-y}^{2-y^2} f(x, y) dx dy$ เป็นอินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณปิด R

(i) จงเขียนกราฟและแรเงาบริเวณปิด R



(ii) จงสลับลำดับการอินทิเกรตเป็น

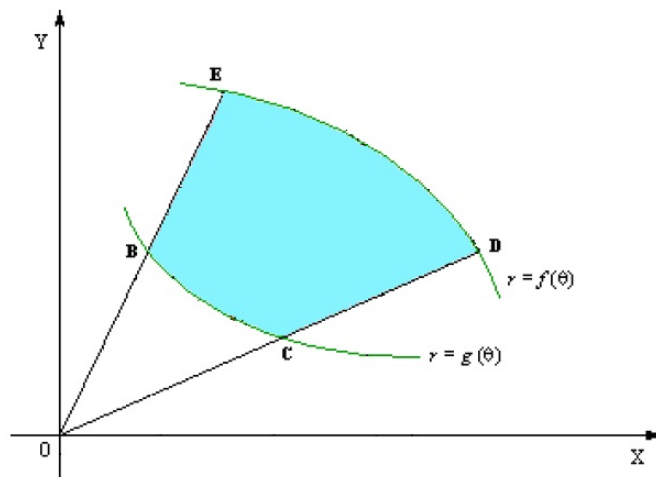
$$F = \iint_R f(x, y) dy dx = \dots\dots\dots$$

(iii) จงหาค่าของ $F = \iint_{R_1} \frac{e^x}{\sqrt{2-x}} dA$ โดยที่ R_1 คือบริเวณปิด R ซึ่ง $x \geq 0$

ตัวอย่าง 5.1.14. จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้ $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$

ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

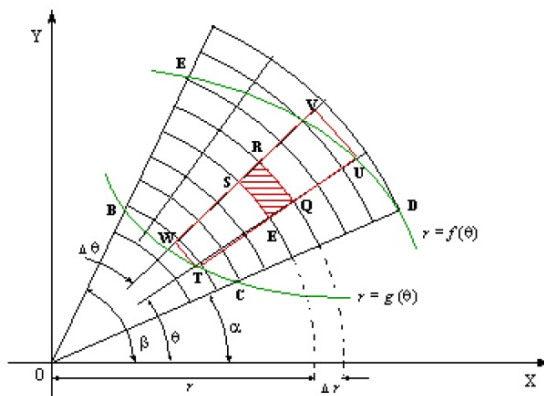
ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาปริพันธ์สองชั้นของ $f(x, y)$ เหนือบริเวณ R ที่เป็นบริเวณเชิงขั้ว โดยเราจะเริ่มพิจารณาจากบริเวณ $R = \{(r, \theta)/g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ ดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6: บริเวณเชิงขั้ว

เราสามารถหาค่าของ $\iint_R f(x, y) dA$ ได้โดยเริ่มต้นจากการแบ่งช่วงปิด $[C, D]$ ออกเป็น m ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[r_{i-1}, r_i]; 1 \leq i \leq m, r_0 = C, r_m = D$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\Delta r = \frac{D - C}{m}$

เท่าๆ กัน จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[\theta_{j-1}, \theta_j]; 1 \leq j \leq n, \theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$ ดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7: การแบ่งบริเวณเชิงขั้วออกเป็นสี่เหลี่ยมเล็กๆ ที่เท่ากันในด้านและมุม

จากการแบ่งดังกล่าวทำให้เราสามารถแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าในเชิงขั้ว R_{ij} หลายๆ รูปที่เหมือนกัน จะเห็นว่า $R_{ij} = \{(r, \theta)/r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$ ให้

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \text{และ} \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

จะเห็นว่าจุด (r_i^*, θ_j^*) จะเป็นจุดบน R_{ij} และถ้าให้ ΔA_{ij} แทนพื้นที่ของ R_{ij} เราจะได้ว่า

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

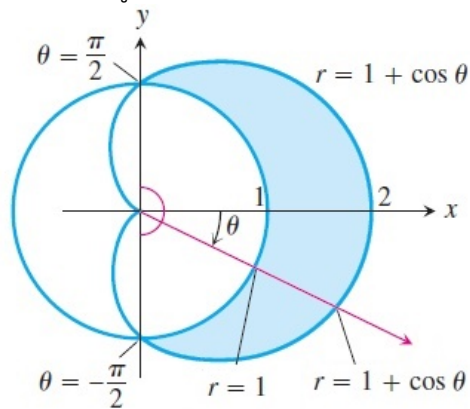
ดังนั้น

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \\ &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

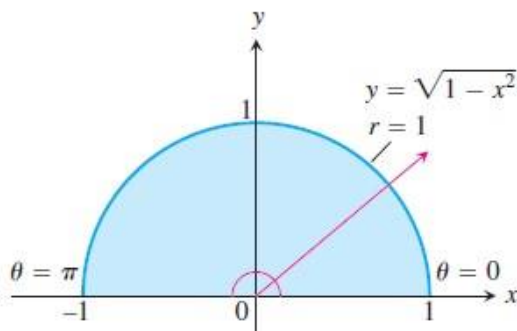
นั่นคือถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเหนือบริเวณเชิงขั้ว $R = \{(r, \theta)/g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

ตัวอย่าง 5.1.15. จงเขียนปริพันธ์ $\iint_R f(r, \theta) dA$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อ R คือบริเวณที่อยู่ภายในคาร์ตอยด์ $r = 1 + \cos \theta$ และภายนอกวงกลม $r = 1$ ดังรูป



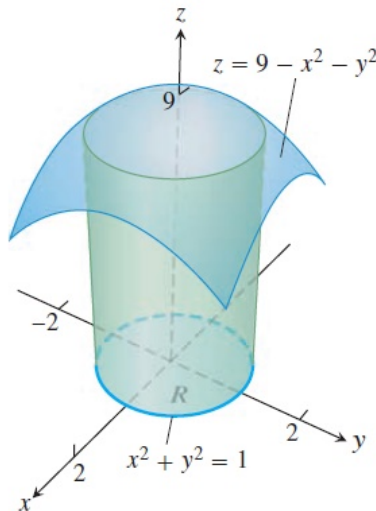
ตัวอย่าง 5.1.16. จงหาค่าของ $\iint_R e^{x^2+y^2} dydx$ เมื่อ R คือบริเวณที่ครึ่งวงกลมที่ปิดล้อมด้วยแกน X และเส้นโค้ง $y = \sqrt{1-x^2}$



ตัวอย่าง 5.1.17. จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

ตัวอย่าง 5.1.18. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพาราโบลอยด์ $z = 9 - x^2 - y^2$ อยู่เหนือระนาบ XY และอยู่ในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$



5.2 การประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น (Applications of double integrals)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น คือการหาพื้นที่ของบริเวณในสองมิติ พิจารณาทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ $z = f(x, y) = 1$ และอยู่เหนือบริเวณ R เราสามารถหาปริมาตรของทรงตันดังกล่าวได้โดย

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R 1 dA = \iint_R dA$$

แต่

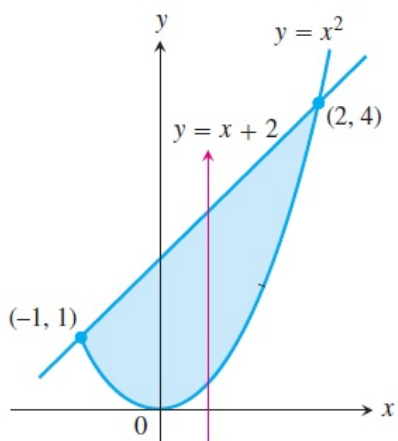
$$V = \text{ความสูง} \times \text{พื้นที่ฐาน} = 1 \times \text{พื้นที่ฐาน}$$

ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R หาได้โดย

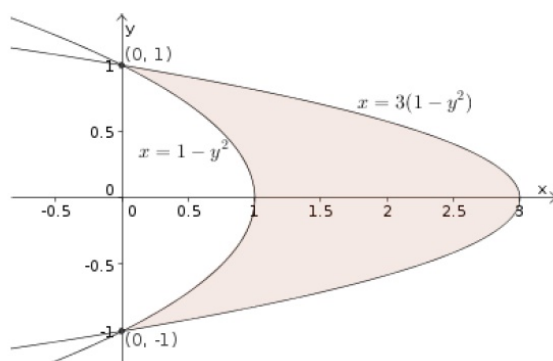
$$A = \iint_R dA$$

ตัวอย่าง 5.2.1. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นคำนวณพื้นที่ของบริเวณดังรูปต่อไปนี้

(1)

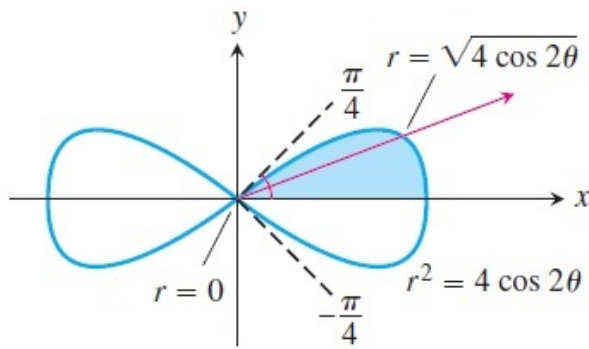


(2)

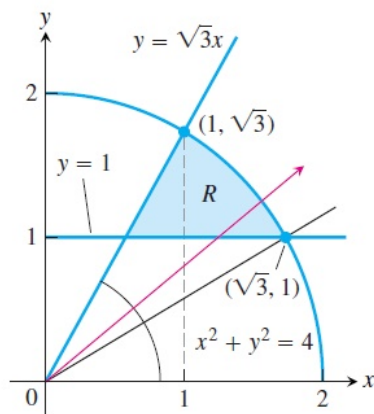


ตัวอย่าง 5.2.2. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นคำนวณพื้นที่ของบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x$, $y = \frac{x}{3}$ และ $y = 2$

ตัวอย่าง 5.2.3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งโคงเลมนิสเคต $r^2 = 4 \cos 2\theta$



ตัวอย่าง 5.2.4. จงหาพื้นที่ของบริเวณ R บนระนาบ ที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ เส้นตรง $y = 1$ และเส้นตรง $y = \sqrt{3}x$



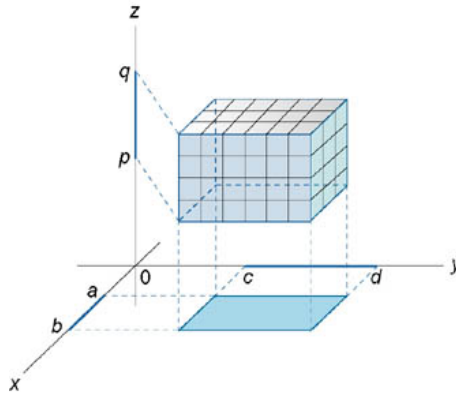
5.3 ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม (Triple integrals in rectangular cylindrical and spherical coordinates)

ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก

เราจะเริ่มจากการพิจารณากรณีที่ง่ายที่สุด ให้ f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y, z ที่นิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า B ที่กำหนดโดย

$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$$

ดังรูป



รูปที่ 5.8: กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบพิกัดฉากสามมิติ

เราจะแบ่ง B ออกเป็นกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ที่มีขนาดเท่ากัน โดยเริ่มจากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น l ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta x = \frac{b-a}{l}$ แบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น m ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ และแบ่งช่วงปิด $[p, q]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta z = \frac{q-p}{n}$ ดังนั้นเราจะได้กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ที่มีขนาดเท่ากันทั้งหมด lmn กล่อง แต่ละกล่องมีปริมาตรเป็น $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ สร้างผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

เมื่อ $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ คือจุดบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย B_{ijk} เรานิยาม **ปริพันธ์สามชั้น (triple integral)** ของฟังก์ชัน f เหนือกล่อง B ดังนี้

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

ทฤษฎีบท 5.3.1 (Fubini's Theorem). ให้ f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y, z ที่นิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ แล้ว

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

ตัวอย่าง 5.3.2. จงหาค่าของ $\iiint_B xyz^2 dV$ เมื่อ B คือกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดโดย $B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

ข้อสังเกต การหาปริพันธ์ในลำดับการอินทิเกรตอื่นๆ จะให้ค่าที่เท่ากัน

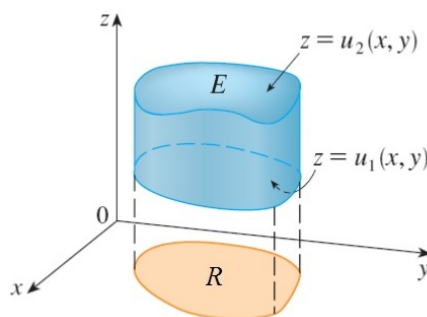
ต่อไปเราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตันปิด E ใดๆ โดยเราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็นกรณีต่างๆ ตามชนิดของทรงตันดังนี้

ทรงตันปิดชนิดที่ 1 (type I solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจกชัน E ลงบนระนาบ XY รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 1

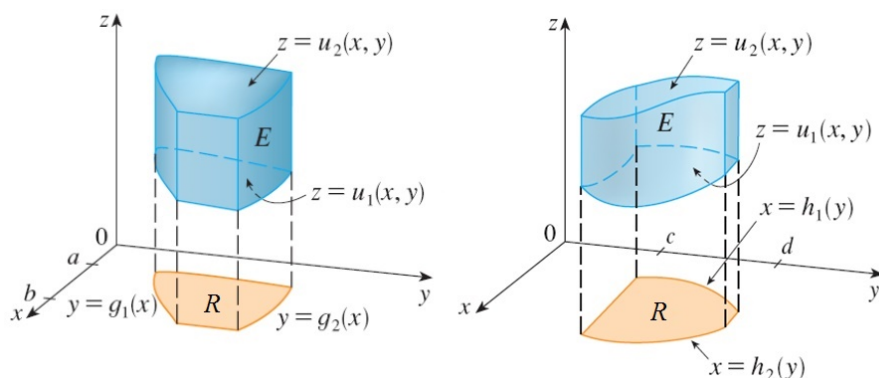


รูปที่ 5.9: ทรงตันปิดชนิดที่ 1

การหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

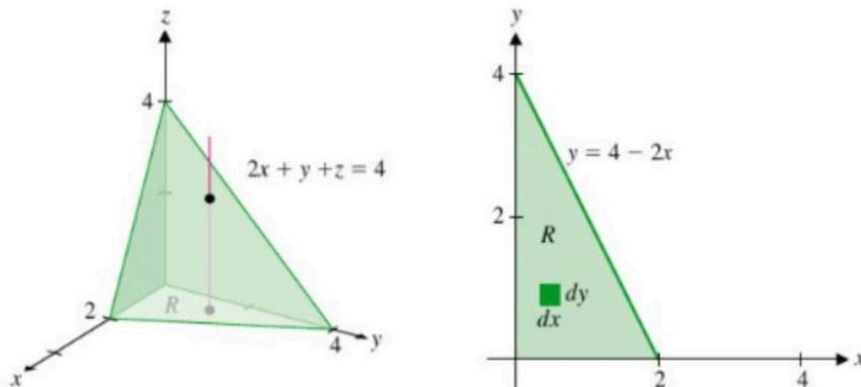
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

การหาปริพันธ์ในวงเล็บสามารถทำได้โดยการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร z โดยให้ตัวแปร x และ y เป็นตัวคงค่า ผลที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของ x และ y จากนั้นจึงนำไปหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณ R ซึ่งอาจเป็นบริเวณชนิดที่ 1 หรือ 2 ก็ได้ตามที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้ในหัวข้อก่อนหน้านี้

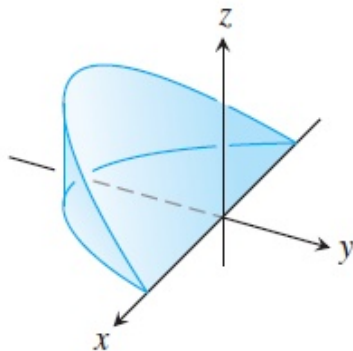


รูปที่ 5.10: ทรงตันปิดชนิดที่ 1 ที่มี R เป็นบริเวณชนิดที่ 1 (ซ้าย) และ 2 (ขวา)

ตัวอย่าง 5.3.3. จงหาค่าของ $\iiint_E 6xy \, dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 0, y = 0, z = 0$ และ $2x + y + z = 4$ ดังรูป



ตัวอย่าง 5.3.4. จงเขียน $\iiint_E x^2 e^y \, dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวเชิงทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ระนาบ $z = -y$ และระนาบ $z = 0$ ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

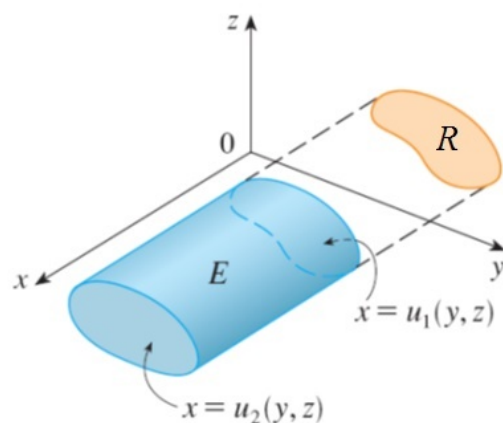


ทรงตันปิดชนิดที่ 2 (type II solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z), (y, z) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจกชัน E ลงบนระนาบ YZ รูป 5.11 แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 2

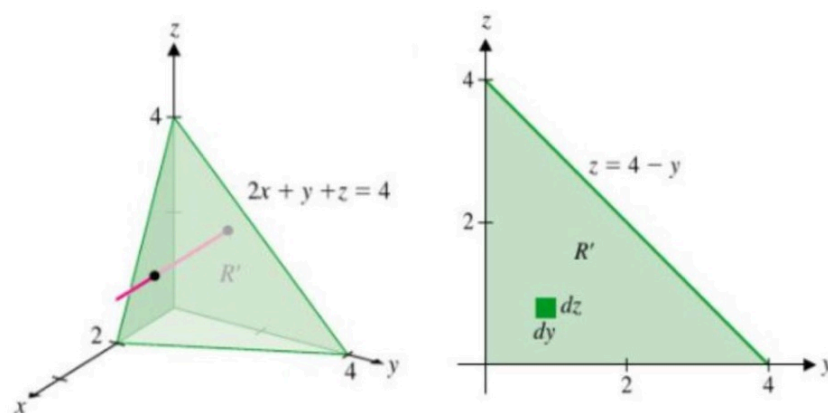


รูปที่ 5.11: ทรงตันปิดชนิดที่ 2

การหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dA$$

ตัวอย่าง 5.3.5. จงเขียน $\iiint_E f(x, y, z) dV$ เมื่อ E คือทรงตันในตัวอย่าง 5.3.3 ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่า) และให้หาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x ก่อน

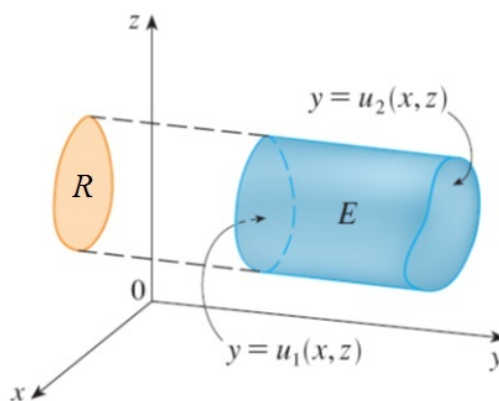


ทรงตันปิดชนิดที่ 3 (type III solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z), (x, z) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจกชัน E ลงบนระนาบ XZ รูปที่ 5.12 แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 3



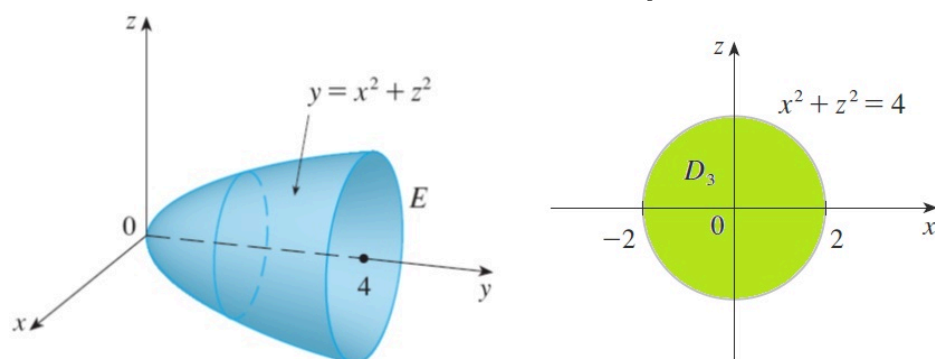
รูปที่ 5.12: ทรงตันปิดชนิดที่ 3 [4]

การหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

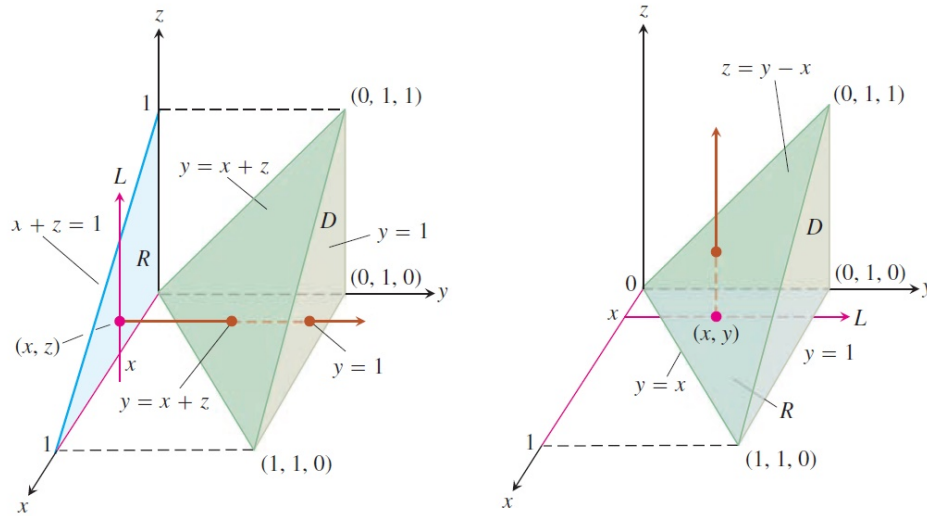
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA$$

ตัวอย่าง 5.3.6. จงเขียน $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV$ ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก **โดยไม่ต้อง**

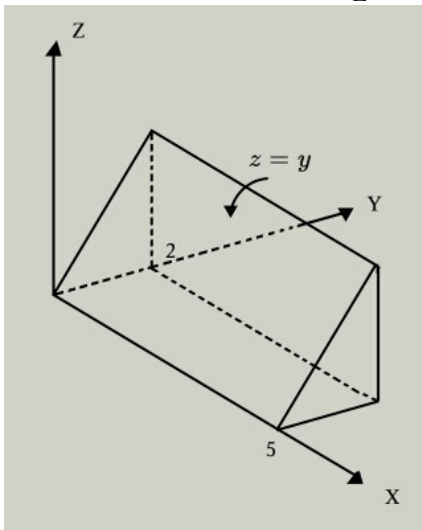
คำนวณค่า เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2 + z^2$ และ ระนาบ $y = 4$ ดังรูป



ตัวอย่าง 5.3.7. จงเขียนปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉากของ $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E ที่กำหนดให้ ดังรูป ในลำดับการหาปริพันธ์ $dydzdx$ และ $dzdydx$ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

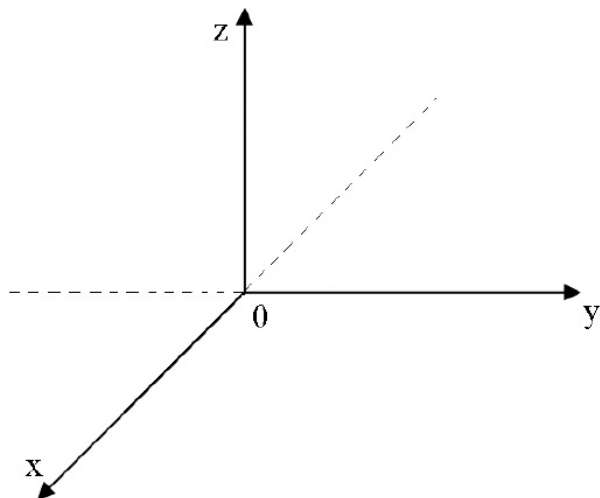


ตัวอย่าง 5.3.8. จงหาค่าของ $\iiint_E xze^{y^3} dV$ เมื่อ E คือทรงตันดังรูปข้างล่าง

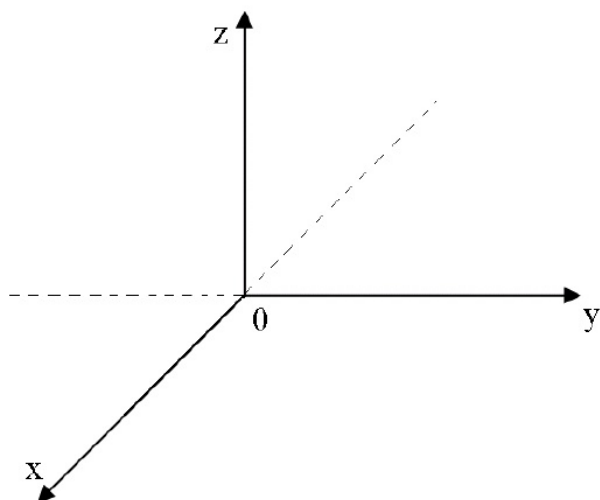


ตัวอย่าง 5.3.9. จงเขียนรูปทรงตันที่สอดคล้องกับปริพันธ์สามชั้นที่กำหนดให้ และจงเขียนปริพันธ์สามชั้นของ $f(x, y, z)$ เหนือทรงตันที่เขียนได้ ในลำดับการทึเกอร์อื่นๆ ที่เหลืออีก 5 ลำดับ

$$(1) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$



$$(2) \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dz dx$$



ปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบอก

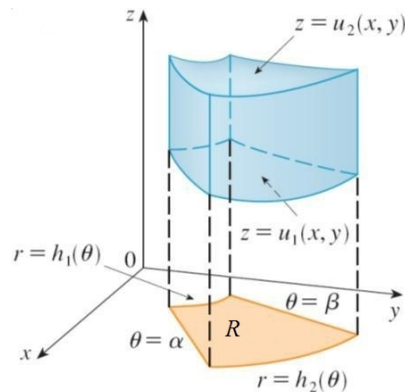
ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นของ $f(x, y, z)$ ที่นิยามบนทรงตัน E ซึ่งกำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z) / u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณเชิงขั้ว นั่นคือ

$$R = \{(r, \theta) / h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

ดังรูป



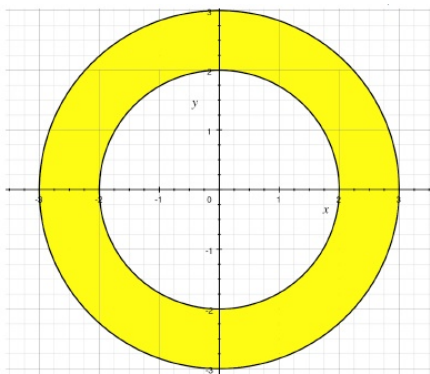
รูปที่ 5.13: ทรงตันที่มีภาพฉายเป็นบริเวณเชิงขั้ว

เราจะได้ว่าปริพันธ์สามชั้นของ $f(x, y, z)$ บนทรงตัน E สามารถหาค่าได้โดย

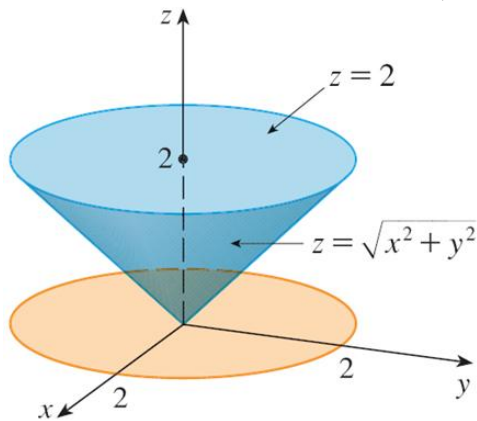
$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \iint_R \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) r dz dr d\theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.10. จงหาค่าของ $\iiint_E y dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = x + 3$ อยู่

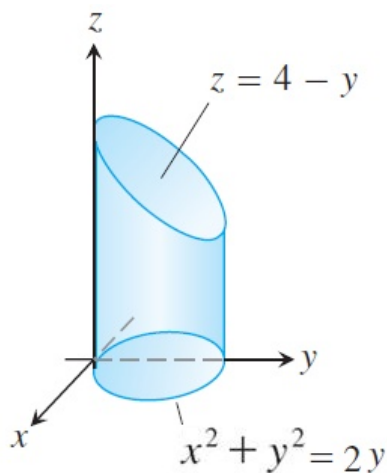
เหนือระนาบ XY และอยู่ระหว่างทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 = 9$



ตัวอย่าง 5.3.11. จงหาค่าของ $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$



ตัวอย่าง 5.3.12. จงเขียน $\iiint_E f(x, y, z) dV$ ในรูปปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = 4 - y$ และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 2y$



ปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลม

พิจารณาทรงตัน E ที่อธิบายด้วยพิกัดทรงกลม

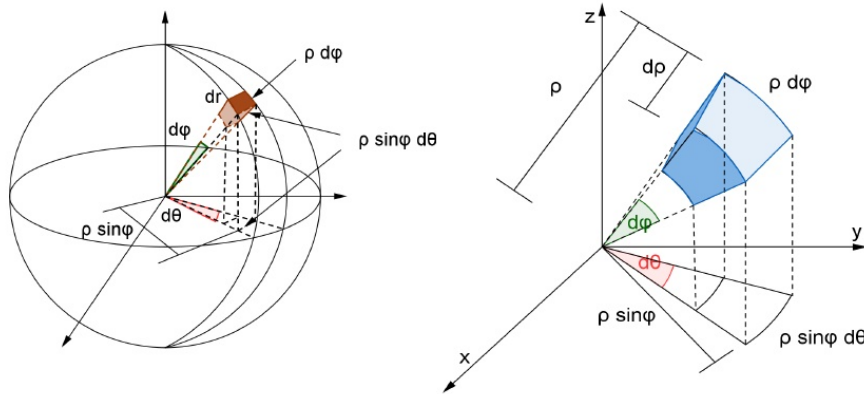
$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

เมื่อ $a \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi$ และ $d - c \leq \pi$ เราจะหาค่าของ $\iiint_E f(x, y, z) dV$ โดยเริ่มจากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น l ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\rho = \frac{b-a}{l}$ จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น m ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{m}$ และสุดท้ายแบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\phi = \frac{d-c}{n}$ จากการแบ่งดังกล่าวเราจะได้กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัดทรงกลม lmn กล่อง โดยแต่ละกล่องมีปริมาตร

เท่ากัน ถ้าให้ ΔV_{ijk} แทนปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้ากล่องที่ ijk จะได้ว่า

$$\Delta V_{ijk} = \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$$

ดังรูป



รูปที่ 5.14: กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัดทรงกลม

เรานิยาม $\iiint_E f(x, y, z) dV$ ในรูปของผลบวกรีมันน์ดังนี้

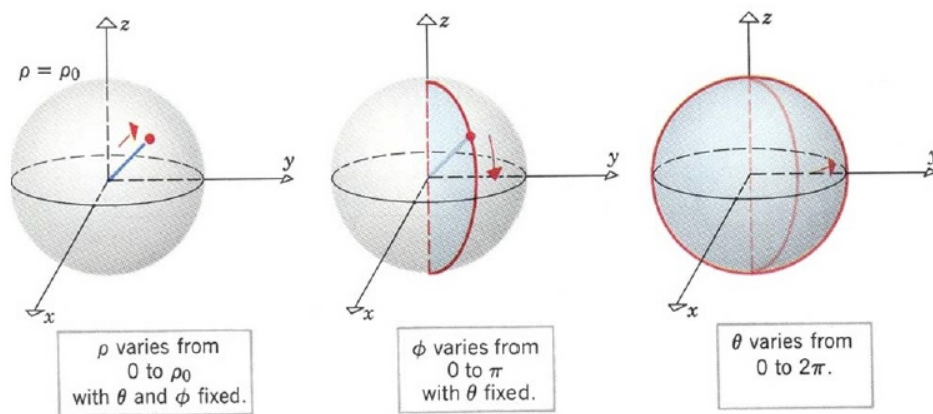
$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\rho_i \sin \phi_k \cos \theta_j, \rho_i \sin \phi_k \sin \theta_j, \rho_i \cos \phi_k) \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta \end{aligned}$$

ดังนั้นการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E ในพิกัดทรงกลมสามารถทำได้ดังนี้

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

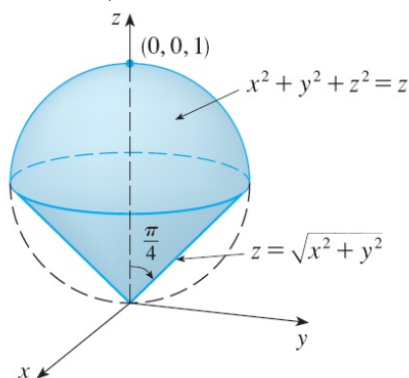
ตัวอย่าง 5.3.13. จงใช้พีทัดทรงกลมหาค่าของ $\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ เมื่อ E เป็นทรงกลมรัศมี 1 หน่วย

รูปต่อไปนี้แสดงการเกิดทรงตันในตัวอย่าง 5.3.13

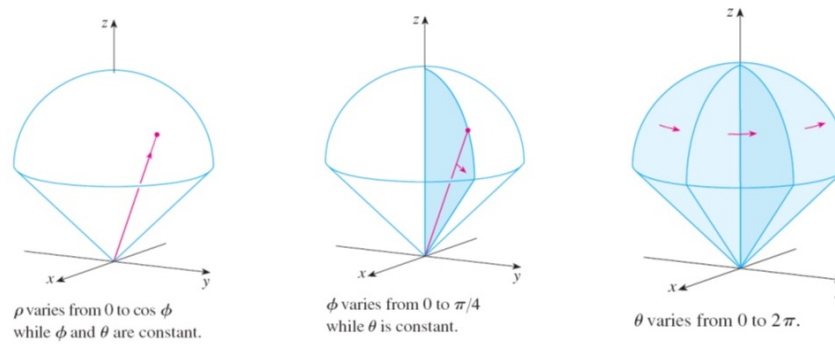


รูปที่ 5.15: การเกิดทรงกลมรัศมี ρ_0

ตัวอย่าง 5.3.14. จงใช้พีทัดทรงกลมหาค่าของ $\iiint_E 3dV$ เมื่อ E เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และปิดล้อมด้านบนด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ดังรูป



รูปต่อไปนี้แสดงการเกิดทรงตันในตัวอย่าง 5.3.14



รูปที่ 5.16: การเกิดทรงตันในตัวอย่าง 5.3.14

ตัวอย่าง 5.3.15. กำหนดปริพันธ์สามชั้นในพิกัดฉาก

$$I = \int_{-3}^0 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3+\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$$

จงเขียนปริพันธ์นี้ ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในพิกัดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

(1) พิกัดทรงกระบอก

(2) พิกัดทรงกลม

ตัวอย่าง 5.3.16. จงเลือกใช้พิกัดทรงกระบอกหรือทรงกลม (ที่เหมาะสม) เพื่อหาค่าต่อไปนี้

1. $\iiint_E e^z dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $z = 1 + x^2 + y^2$ ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 5$ และระนาบ XY

2. $\iiint_E x^2 dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ และ $y = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

ตัวอย่าง 5.3.17. กำหนดปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

จงเขียนปริพันธ์นี้ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า

5.4 การประยุกต์ของปริพันธ์สามชั้น (Applications of triple integrals)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการประยุกต์ของปริพันธ์สามชั้น คือการหาปริมาตรของทรงตันในสามมิติ ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนทรงตัน E จากนิยามผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

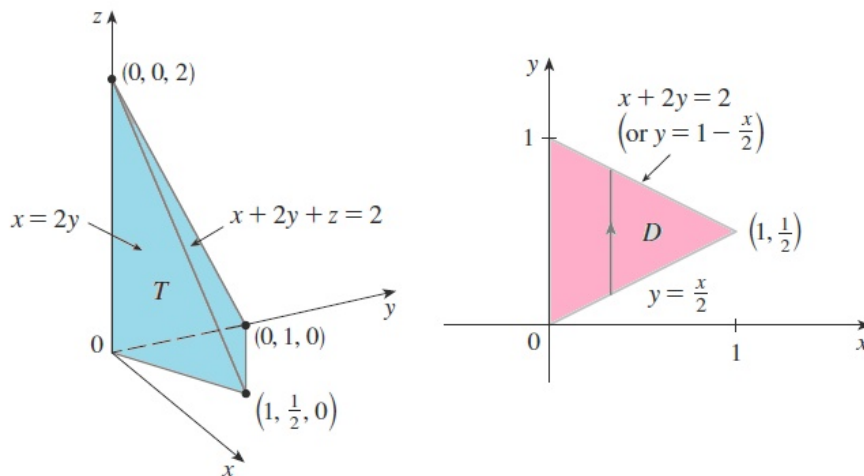
ถ้า f คือฟังก์ชันค่าคงที่ $f(x, y, z) = 1$ จะได้ว่า

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_E dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \Delta V = V$$

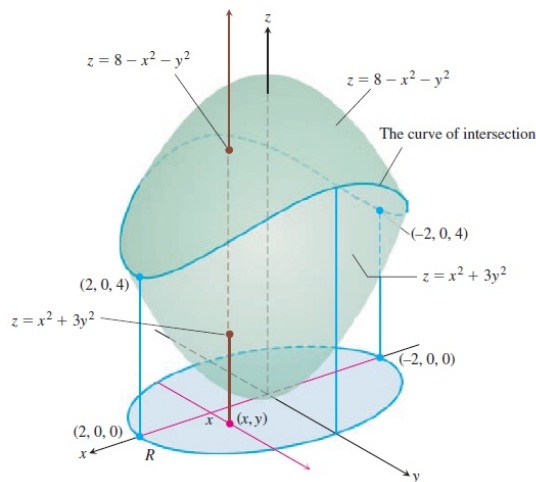
เมื่อ V คือปริมาตรของทรงตัน E นั่นคือ

$$V = \iiint_E dV$$

ตัวอย่าง 5.4.1. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของ E เมื่อ E คือทรงตันดังรูป

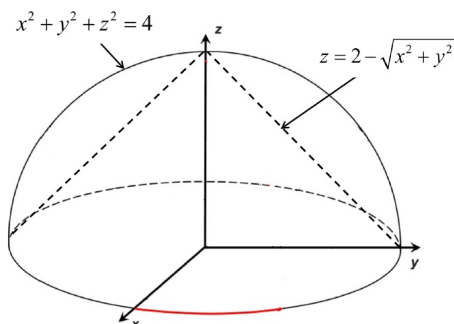


ตัวอย่าง 5.4.2. จงเขียนปริมาตร (V) ของทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = x^2 + 3y^2$ และ $z = 8 - x^2 - y^2$ (ดังรูป) ในรูปปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก โดยไม่ต้องคำนวณค่า



ตัวอย่าง 5.4.3. จงเขียนปริมาตรของทรงตันต่อไปนี้ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม โดยไม่ต้องคำนวณค่า

- (1) ทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และข้างล่างด้วยพื้นผิวกรวย $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ดังรูป



- (2) ทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ด้านบนด้วยระนาบ $z = 4$ และด้านข้างด้วยกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ดังรูป

