

2. ถ้า k เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็น 0 และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่ออกแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่ออกด้วย



แบบฝึกหัด 4.1(ก)

ในข้อ 1-6 จงหาผลบวกย่อย S_n และใช้ผลบวกย่อยนี้หาผลบวกของอนุกรมด้วย ถ้าอนุกรมที่กำหนดให้ลู่ออก

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \dots$
2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \dots + \frac{9}{100^n} + \dots$
3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$
4. $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} + \dots$
5. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$
6. $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{5}{n(n+1)} + \dots$

ในข้อ 7-12 จงหาผลบวกของอนุกรมที่กำหนดให้ โดยใช้ความเป็นอนุกรมเรขาคณิต

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right)$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right)$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n} \right)$

ในข้อ 13-18 จงหาผลบวกของอนุกรมที่กำหนดให้ โดยใช้ความเป็นอนุกรมที่เกี่ยวข้องกัน

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right)$

ในข้อ 19-32 อนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ลู่ออกหรือลู่เข้า

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$
20. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$
23. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad |x| > 1$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$

$$28. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

$$31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{n^e}}$$

ในข้อ 33-40 จงหาค่าของ x ที่ทำให้นุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้ลู่เข้า

$$33. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$34. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$35. \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$36. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$$

$$37. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$38. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$$

$$39. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$$

$$40. \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$$

ในข้อ 41-46 จงแสดงการเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

$$41. 0.\overline{23} = 0.232323\dots$$

$$42. 0.\overline{234} = 0.234234234\dots$$

$$43. 0.\overline{7} = 0.777\dots$$

$$44. 1.\overline{414} = 1.414414\dots$$

$$45. 1.24\overline{123} = 1.24123123\dots$$

$$46. 3.14\overline{2857} = 3.142857142857\dots$$



เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด 4.1(ก)

$$1. S_n = \frac{2[1-(1/3)^n]}{1-(1/3)}, 3$$

$$3. S_n = \frac{[1-(-1/2)^n]}{1-(-1/2)}, 2/3$$

$$5. S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, 1/2$$

$$7. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots, 4/5$$

$$9. (5+1) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{27}\right) + \dots, 23/2$$

$$11. (1+1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{125}\right) + \dots, 17/6$$

$$13. 1,$$

$$15. 5,$$

$$17. 1,$$

$$19. \text{ลู่เข้า}, 2+\sqrt{2}$$

$$21. \text{ลู่เข้า}, 1$$

$$23. \text{ลู่เข้า}, \frac{e^2}{e^2-1}$$

$$25. \text{ลู่เข้า}, \frac{x}{x-1}$$

$$27. \text{ลู่ออก}$$

$$29. \text{ลู่ออก}$$

$$31. \text{ลู่ออก}$$

$$33. a=1, r=-x, \text{ลู่เข้าหา } \frac{1}{1+x} \text{ เมื่อ } |x|<1$$

$$35. a=3, r=\frac{x-1}{2}, \text{ลู่เข้าหา } \frac{6}{3-x} \text{ ในช่วง } (-1,3)$$

$$37. |x|<\frac{1}{2}, \frac{1}{1-2x}$$

$$39. 1<x<5, \frac{2}{x-1}$$

$$41. 33/99$$

$$43. 7/9$$

$$45. 41333/33300$$



วิธีทำ ก. ถ้าให้ $y = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/n}$ แล้ว $\ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n^{2/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{n} = 0$ ดังนั้น $y = e^0 = 1$

พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\rho = \frac{1}{2} < 1$ โดยการทดสอบแบบลอการิทึมสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ลู่เข้า

ข. พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^{2/n}} = 2$

ดังนั้น $\rho = 2 > 1$ โดยการทดสอบแบบลอการิทึมสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ลู่ออก

ค. จาก $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2 & n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 1/2 & n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$ ทำให้ $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$ และจาก

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีการบีบอัด (Sandwich Theorem) จะทำให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$

ซึ่งคือ $\rho = \frac{1}{2} < 1$ โดยการทดสอบแบบลอการิทึมสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า



แบบฝึกหัด 4.1(ข)

ในข้อ 1-8 จงใช้การทดสอบแบบอินทิกรัลแสดงว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

7. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

ในข้อ 9-14 จงใช้การทดสอบแบบเปรียบเทียบแสดงว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

14. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

ในข้อ 15-20 จงใช้การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบแสดงว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$

18.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$$

ในข้อ 21-28 จงใช้การทดสอบแบบอัตราส่วนแสดงว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$$

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$$

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

25.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$$

26.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$$

27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$$

28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$$

ในข้อ 29-34 จงใช้การทดสอบแบบลอการิทึมแสดงว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

29.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$$

30.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

31.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$$

32.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{n/2}}$$

33.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$$

34.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$$

ในข้อ 35-60 จงใช้วิธีที่เหมาะสมแสดงว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก (ข้อหนึ่งอาจทำได้หลายวิธี)

35.
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

36.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

37.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$$

38.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$$

39.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln n)^2}$$

40.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

41.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$$

42.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$$

43.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$$

44.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n (n+1)!}{3^n n!}$$

45.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$$

46.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

47.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \arctan n}{1+n^2}$$

48.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

49.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$$

50.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$$

51.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$$

52.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$$

53.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

54.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

55.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

56.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$$

57.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.1}}$$

58.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcsec} n}{n^{1.3}}$$

59.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

60.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$$



เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด 4.1(ข)

1. ลู่ออก,
3. ลู่ออก,
5. ลู่เข้า,
7. ลู่เข้า,
9. ลู่ออก: $\frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{2n + n} = \frac{1}{3n}$
11. ลู่เข้า: $\frac{\sin^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$
13. ลู่เข้า: $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \frac{1}{3^n}$
15. ลู่ออก: เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n}$
17. ลู่เข้า: เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n^2}$
19. ลู่เข้า: เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$
21. ลู่เข้า, $\rho=1/2$
23. ลู่ออก, $\rho=\infty$
25. ลู่เข้า, $\rho=1/10$
27. ลู่เข้า, $\rho=0$
29. ลู่เข้า, $\rho=0$
31. ลู่เข้า, $\rho=0$
33. ลู่ออก, $\rho=\infty$
35. ลู่เข้า: อนุกรมเรขาคณิต, $r=1/e < 1$
37. ลู่ออก: อนุกรม p , $p < 1$
39. ลู่ออก: ลิมิตเปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n}$
41. ลู่เข้า: ลิมิตเปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$
43. ลู่เข้า: ทดสอบโดยใช้อัตราส่วน
45. ลู่เข้า: ทดสอบโดยใช้อัตราส่วน
47. ลู่เข้า: ทดสอบโดยใช้อินทิกรัล
49. ลู่เข้า: ทดสอบโดยใช้อินทิกรัล
51. ลู่เข้า: เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{3}{(1.25)^n}$
53. ลู่เข้า: เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n^2}$
55. ลู่เข้า: เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n^2}$
57. ลู่เข้า: $\frac{\arctan n}{n^{1.1}} < \frac{\pi/2}{n^{1.1}}$
59. ลู่ออก: ทดสอบโดยใช้รากที่ n

