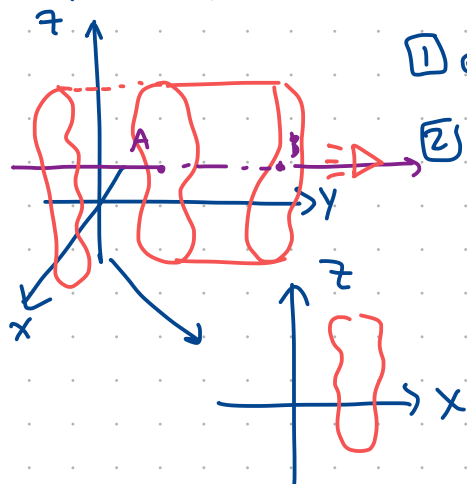


Triple integral $\iiint_E f(x,y,z) dV$

① Triple integral ในระบบพิกัดฉาก



① หาปริมาตรของกล่อง (หาปริมาตร)

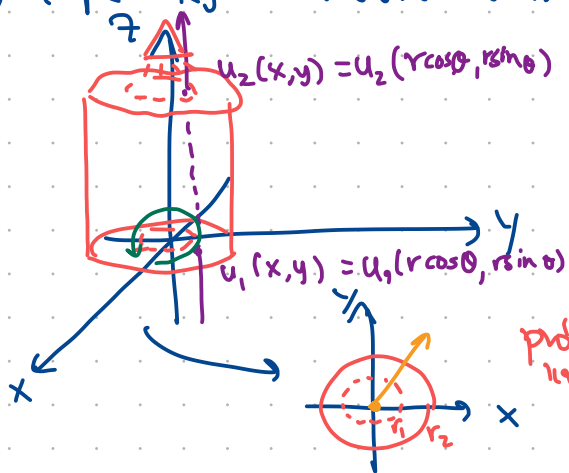
$$\iint_R \left[\int_A^B f(x,y) dy \right] dA$$

② หาปริมาตรของกล่อง (หา double integral)

② Triple integral ในระบบพิกัดทรงกลม

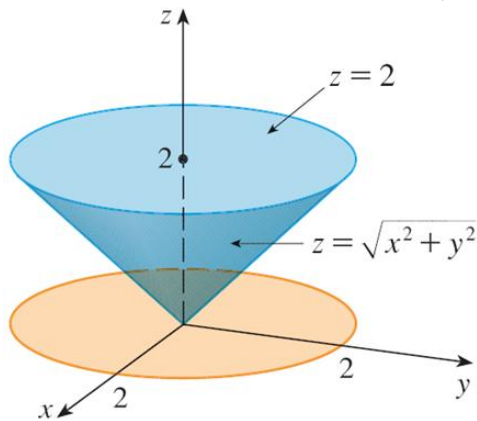
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\iiint_E f(x,y,z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{u_1}^{u_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

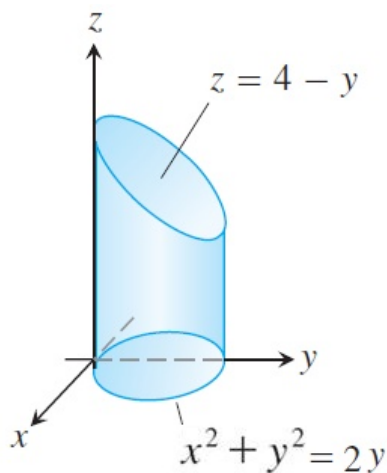


projection
แนวระนาบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 5.3.11. จงหาค่าของ $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$



ตัวอย่าง 5.3.12. จงเขียน $\iiint_E f(x, y, z) dV$ ในรูปปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = 4 - y$ และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 2y$



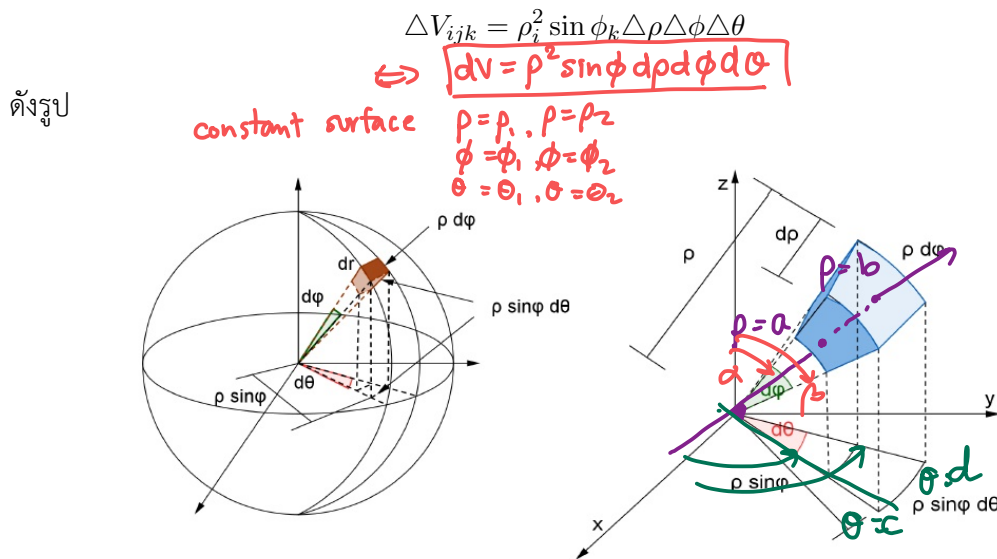
ปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลม

พิจารณาทรงตัน E ที่อธิบายด้วยพิกัดทรงกลม

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

เมื่อ $a \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi$ และ $d - c \leq \pi$ เราจะหาค่าของ $\iiint_E f(x, y, z) dV$ โดยเริ่มจากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น l ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\rho = \frac{b-a}{l}$ จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น m ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{m}$ และสุดท้ายแบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta\phi = \frac{d-c}{n}$ จากการแบ่งดังกล่าวเราจะได้กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัดทรงกลม lmn กล่อง โดยแต่ละกล่องมีปริมาตร

เท่ากัน ถ้าให้ ΔV_{ijk} แทนปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้ากล่องที่ ijk จะได้ว่า



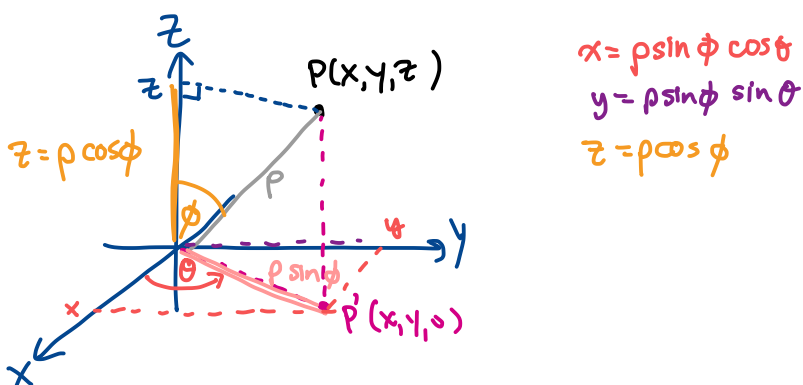
รูปที่ 5.14: กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัดทรงกลม

เรานิยาม $\iiint_E f(x, y, z) dV$ ในรูปของผลบวกรีมันน์ดังนี้

$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\rho_i \sin \phi_k \cos \theta_j, \rho_i \sin \phi_k \sin \theta_j, \rho_i \cos \phi_k) \underbrace{\rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta}_{dV} \end{aligned}$$

ดังนั้นการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E ในพิกัดทรงกลมสามารถทำได้ดังนี้

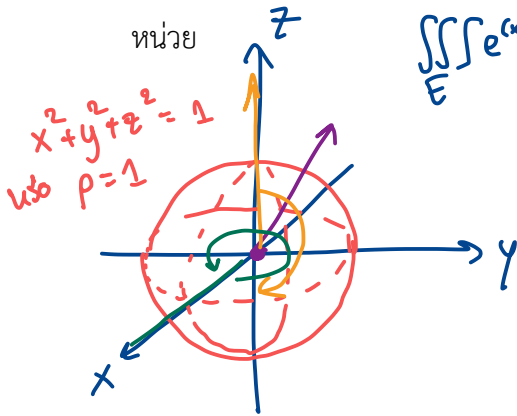
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$



บทที่ 5. ปริพันธ์หลายชั้นและการประยุกต์

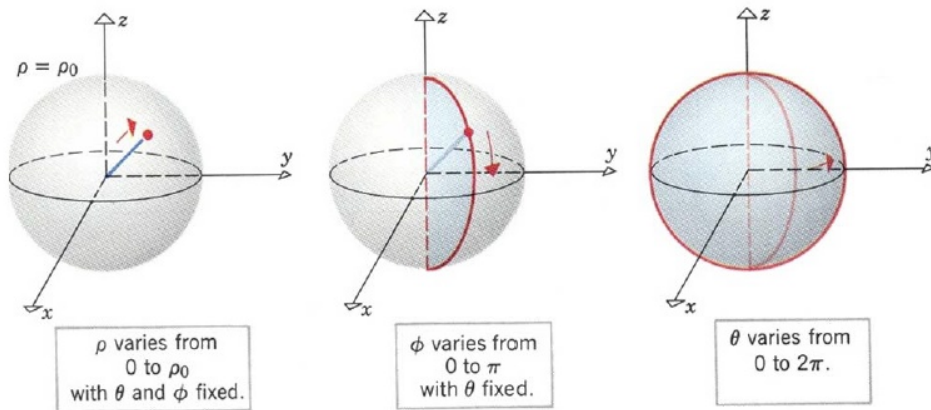
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \\ \therefore (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} &= (\rho^2)^{3/2} = \rho^3 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.13. จงใช้พีทัดทรงกลมหาค่าของ $\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ เมื่อ E เป็นทรงกลมรัศมี 1



$$\begin{aligned} \iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\phi \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin\phi [e - 1] d\phi \, d\theta \\ &= \frac{e-1}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos\phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta = \frac{e-1}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos\pi + \cos 0] d\theta \\ &= \frac{2}{3}(e-1) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}(e-1) \end{aligned}$$

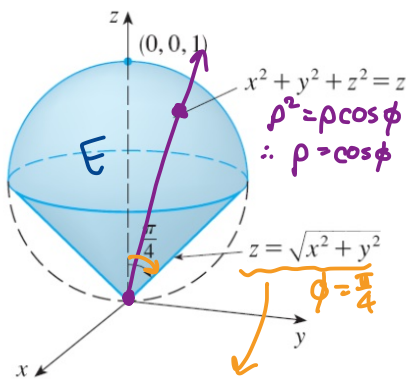
รูปต่อไปนี้จะแสดงการเกิดทรงตันในตัวอย่าง 5.3.13



รูปที่ 5.15: การเกิดทรงกลมรัศมี ρ_0

ตัวอย่าง 5.3.14. จงใช้พีทัดทรงกลมหาค่าของ $\iiint_E 3dV$ เมื่อ E เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านล่างด้วย

กรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และปิดล้อมด้านบนด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ดังรูป



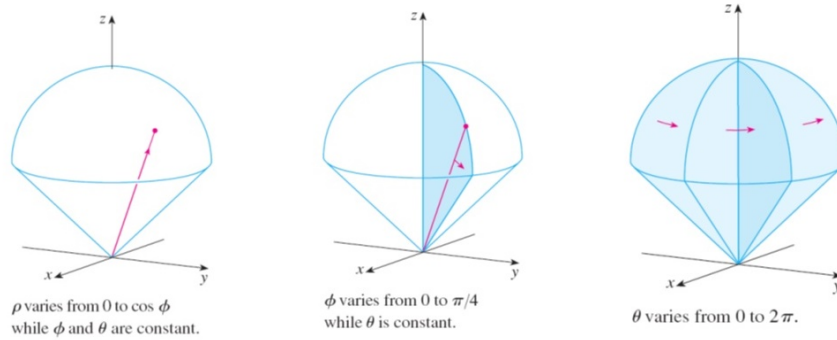
$$\begin{aligned} \iiint_E 3dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} 3 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\rho \cdot \frac{\rho^3}{3} \sin\phi \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} [\cos^3\phi \sin\phi] d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^4\phi}{4} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^4(\pi/4)}{4} + \frac{\cos^4(0)}{4} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^4}{4} + \frac{1}{4} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \cos\phi &= \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta} \\ \rho \cos\phi &= \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \\ \rho \cos\phi &= \rho \sin\phi \\ \phi &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Long Tum Do.. (HW) $\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

รูปต่อไปนี้จะแสดงการเกิดทรงตันในตัวอย่าง 5.3.14



รูปที่ 5.16: การเกิดทรงตันในตัวอย่าง 5.3.14

ตัวอย่าง 5.3.15. กำหนดปริพันธ์สามชั้นในพิกัดฉาก

$$I = \int_{-3}^0 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3+\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$$

Handwritten notes: $z = 3 + \sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow z-3 = \sqrt{9-x^2-y^2}$
 $(z-3)^2 = 9-x^2-y^2$
 $x^2+y^2+(z-3)^2 = 9$

จงเขียนปริพันธ์นี้ ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในพิกัดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

(1) พิกัดทรงกระบอก

Handwritten notes: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$

Handwritten notes: $z = 3 + \sqrt{9-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = \pi/4$

Handwritten notes: $z = 3 + \sqrt{9-r^2}$, $z = r$

Handwritten notes: $y = -\sqrt{9-x^2}$, $y = \sqrt{9-x^2}$, $y = \sqrt{9-r^2}$, $y = -\sqrt{9-r^2}$

Handwritten notes: $r = 3$

Handwritten notes: $\rho \cos \phi = 3 + \sqrt{9-\rho^2 \sin^2 \phi}$
 $\rho \cos \phi - 3 = \sqrt{9-\rho^2 \sin^2 \phi}$
 $(\rho \cos \phi - 3)^2 = 9 - \rho^2 \sin^2 \phi$
 $\rho^2 \cos^2 \phi - 6\rho \cos \phi + 9 = 9 - \rho^2 \sin^2 \phi$
 $\rho^2 [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] = 6\rho \cos \phi$
 $\therefore \rho = 6 \cos \phi$

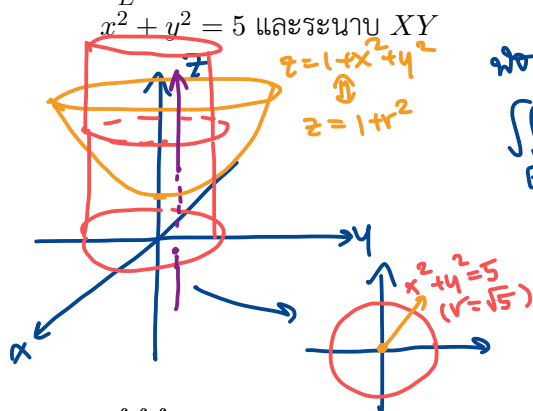
(1) $I = \int_{\pi/2}^0 \int_0^3 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3+\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dr d\theta$

(2) พิกัดทรงกลม

(2) $I = \int_{\pi/2}^0 \int_0^{\pi/4} \int_0^{6 \cos \phi} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

ตัวอย่าง 5.3.16. จงเลือกใช้พิกัดทรงกระบอกหรือทรงกลม (ที่เหมาะสม) เพื่อหาค่าต่อไปนี้

1. $\iiint_E e^z dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $z = 1 + x^2 + y^2$ ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 5$ และระนาบ XY

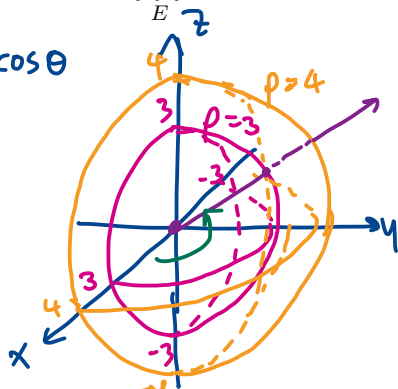


พิจารณาใช้พิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\iiint_E e^z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{1+r^2} e^z \cdot r dz dr d\theta$$

2. $\iiint_E x^2 dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยครึ่งทรงกลม $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ และ $y = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

$x = \rho \sin \phi \cos \theta$



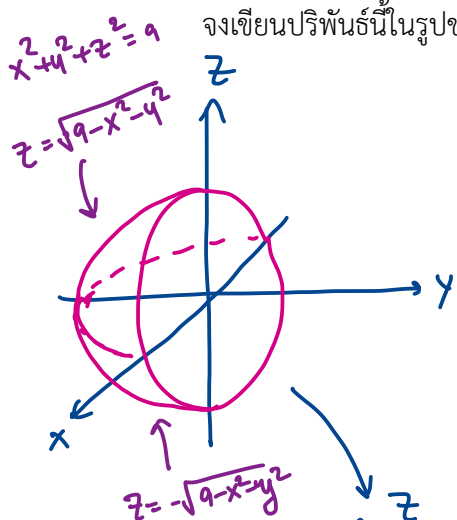
พิจารณาใช้พิกัดในระบบพิกัดทรงกลม

$$\iiint_E x^2 dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_3^4 (\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

ตัวอย่าง 5.3.17. กำหนดปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

จงเขียนปริพันธ์นี้ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า



$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^2 \cdot \boxed{\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta}$$

$\Downarrow$
 $rdzdrd\theta$; $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
 $\therefore \rho^2 = r^2 + z^2$

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (r^2 + z^2) \cdot r dz dr d\theta$$

5.4 การประยุกต์ของปริพันธ์สามชั้น (Applications of triple integrals)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการประยุกต์ของปริพันธ์สามชั้น คือการหาปริมาตรของทรงตันในสามมิติ ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนทรงตัน E จากนิยามผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

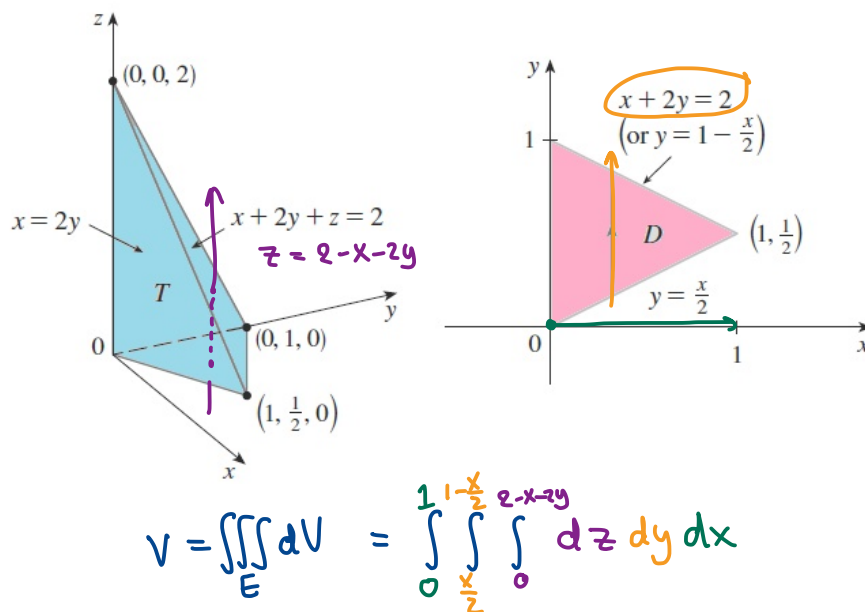
ถ้า f คือฟังก์ชันค่าคงที่ $f(x, y, z) = 1$ จะได้ว่า

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_E dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \Delta V = V$$

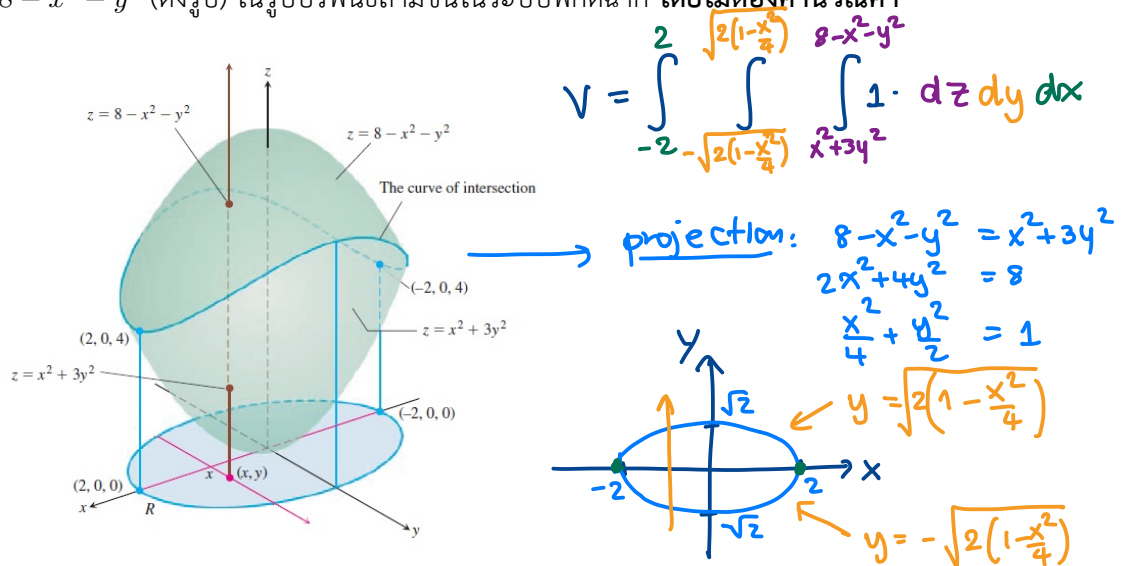
เมื่อ V คือปริมาตรของทรงตัน E นั่นคือ

$$V = \iiint_E dV$$

ตัวอย่าง 5.4.1. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของ E เมื่อ E คือทรงตันดังรูป

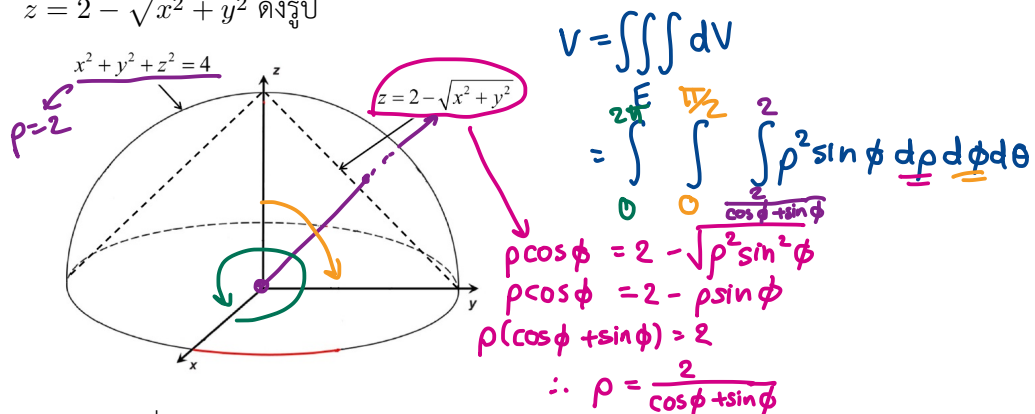


ตัวอย่าง 5.4.2. จงเขียนปริมาตร (V) ของทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = x^2 + 3y^2$ และ $z = 8 - x^2 - y^2$ (ดังรูป) ในรูปปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก โดยไม่ต้องคำนวณค่า



ตัวอย่าง 5.4.3. จงเขียนปริมาตรของทรงตันต่อไปนี้ในรูปของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม โดยไม่ต้องคำนวณค่า

- (1) ทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และข้างล่างด้วยพื้นผิวกรวย $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ดังรูป



- (2) ทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ด้านบนด้วยระนาบ $z = 4$ และด้านข้างด้วยกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ดังรูป

