

เอกสารประกอบการสอน กระบวนวิชา 206331

แคลคูลัสขั้นสูง Advanced Calculus

A gateway to advanced mathematics

อาจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่



เอกสารประกอบการสอน

206331 Advanced Calculus

แคลคูลัสขั้นสูง

อาจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ฉบับปรับปรุง เมษายน 2563

ฉบับออนไลน์ สามารถดาวน์โหลดได้ที่

Website: <http://www.schaidee.com/teaching>

เอกสารประกอบการสอนกระบวนวิชา 206331
แคลคูลัสขั้นสูง Advanced Calculus

พิมพ์ครั้งที่ 0 จำนวน 12 เล่ม (พฤษภาคม 2562) (ฉบับต้นร่างเอกสารประกอบการสอน)
พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 15 เล่ม (เมษายน 2563) (ฉบับปรับปรุงให้มีความสมบูรณ์)

จัดทำโดย อาจารย์ ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
239 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200
E-mail: supanut.c@cmu.ac.th
Website: <http://www.schaidee.com>

พิมพ์ที่ หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
โทร 053 943317, 053 943465
<http://www2.science.cmu.ac.th/offset/>

ขอคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะ โปรดส่งมาได้ทีอี่อีเมลล์ supanut.c@cmu.ac.th

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนในกระบวนวิชา 206331 แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งเป็นกระบวนวิชาบังคับสำหรับนักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ และเป็นกระบวนวิชาเลือกสำหรับนักศึกษาสาขาอื่น ๆ ที่ผ่านการศึกษาระบบวิชาแคลคูลัสพื้นฐานมาแล้ว

กระบวนวิชาแคลคูลัสขั้นสูง เป็นกระบวนวิชาที่มุ่งเน้นการศึกษาประเด็นต่าง ๆ ที่น่าสนใจและจำเป็นสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น รวมถึงทำการพิสูจน์ประเด็นต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาแล้วในกระบวนวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน กระบวนวิชานี้มีพื้นฐานของการศึกษาด้านคณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis) แต่ยังคงมีเนื้อหาในภาคคำนวณอยู่บ้าง จึงกล่าวได้ว่า กระบวนวิชานี้เป็นกระบวนวิชาที่เปรียบเสมือนประตูเชื่อมไปสู่การศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง ซึ่งต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน ตลอดจนการวิเคราะห์คุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน เพื่อการนำไปใช้ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

ผู้เขียนได้แบ่งเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ออกเป็น 3 บท ตามคำอธิบายลักษณะกระบวนวิชา ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหา **บทที่ 1** แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร **บทที่ 2** ปริพันธ์จำกัดเขต และ**บทที่ 3** ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ โดยภาพรวมของกระบวนวิชานี้ ผู้อ่านจะเห็นว่า เมื่อเราขยายแนวคิดจากฟังก์ชันตัวแปรเดียวสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร มีหลายแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีของฟังก์ชันหลายตัวแปรซึ่งมีความคล้ายกับทฤษฎีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว แต่ก็มีหลาย ๆ แนวคิดก็มีความแตกต่างไปจากทฤษฎีของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเช่นกัน

เพื่อให้ผู้อ่านเกิดความซาบซึ้งในการศึกษากระบวนวิชานี้ ผู้เขียนจึงได้จัดทำเอกสารฉบับนี้อย่างพิถีพิถัน โดยพยายามให้ผู้อ่านได้เห็นการเปรียบเทียบทฤษฎีบทที่ทราบในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันหลายตัวแปรเพื่อให้เห็นภาพความเชื่อมโยงจากความรู้เดิมที่เคยมีอยู่ นอกจากนี้ ผู้เขียนได้เลือกตัวอย่างที่เป็นทั้งตัวอย่างที่สนับสนุนทฤษฎีบท และตัวอย่างที่ค้านการคาดการณ์ข้อความทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีบทต่าง ๆ ซึ่งผู้เขียนคาดหวังว่า ผู้อ่านจะได้เข้าใจทฤษฎีบทต่าง ๆ และการใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมา เพื่อให้เห็นภาพของการศึกษาคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการพิสูจน์ทฤษฎีบท และนำทฤษฎีบทไปใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในบริบทที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ เอกสารฉบับนี้ได้บรรจุภาพและกราฟของฟังก์ชันที่นำมาเป็นตัวอย่าง โดยผู้เขียนได้วาดกราฟโดยใช้โปรแกรม Wolfram Mathematica® 11.1 และวาดแผนภาพโดยใช้โปรแกรม Keynote เพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจตัวอย่าง ตลอดจนสามารถสังเกตและเห็นภาพของทฤษฎีบทและตัวอย่าง เพื่อนำไปสู่การคาดการณ์ลักษณะของฟังก์ชัน ทั้งนี้ ผู้เขียนได้เลือกแบบฝึกหัดประจำหัวข้อ เพื่อฝึกประสบการณ์การพิสูจน์ และให้ผู้อ่านได้เห็นแง่มุมที่น่าสนใจที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท รวมถึงตัวอย่างด้านต่าง ๆ ที่น่าสนใจที่ใช้ประกอบทฤษฎีบทอีกด้วย

เอกสารนี้จะสำเร็จลงไม่ได้ หากขาดความช่วยเหลือและสนับสนุนจากหลาย ๆ ส่วน ผู้เขียนขอขอบคุณนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ รหัส 59 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ลงทะเบียนกระบวนวิชานี้ในภาคการศึกษา 2/2560 ทำให้เกิดโครงร่างของเอกสารฉบับเขียนด้วยลายมือ ที่ขาดไม่ได้คือ นักศึกษาที่ลงทะเบียนกระบวนวิชานี้ในภาคการศึกษา 2/2561 ที่เป็นส่วนสำคัญซึ่งทำให้เอกสารฉบับนี้เกิดขึ้นเป็นเล่มจริงสมดังความตั้งใจของผู้เขียน ตลอดจนได้แนะนำข้อบกพร่องเพื่อแก้ไขเอกสารฉบับนี้ให้สมบูรณ์ รวมถึง ธนกร อุดมวรรัตน์ และ ธนัท เปี่ยมสุวรรณ ซึ่งได้ช่วยตรวจทานต้นฉบับอย่างละเอียด นอกจากนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์ ที่ได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการสอนในกระบวนวิชานี้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมลักษณ์ อุดดี ที่ได้อ่านต้นฉบับ ให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อแก้ไขเอกสารนี้ให้สมบูรณ์ในทุก ๆ ด้าน รวมถึงคณาจารย์ในภาควิชาที่เป็นกำลังใจในการจัดทำเอกสารฉบับนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารฉบับนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่าน และก่อให้เกิดความงอกงามทางวิชาการ คุณงามความดีของหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอยกให้แก่ครอบครัว ครูบาอาจารย์ที่ได้อบรมสั่งสอนตั้งแต่เด็กจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Prof. Kokichi Sugihara อาจารย์ที่ปรึกษาในระดับปริญญาเอกของผู้เขียน ซึ่งเป็นแรงบันดาลใจให้แก่ผู้เขียนในการทำงานมาโดยตลอด และหากเอกสารฉบับนี้มีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนขออภัยไว้ ณ ที่นี้ รวมถึงผู้อ่านสามารถแจ้งให้ผู้เขียนทราบเพื่อที่จะได้นำไปปรับปรุงและแก้ไขในลำดับต่อไป

ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พฤษภาคม 2562

ฉบับปรับปรุง เมษายน 2563

สารบัญ

1	แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร	1
1.1	ฟังก์ชันหลายตัวแปร	5
1.2	ลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร	10
1.2.1	มโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว	10
1.2.2	โทโพโลยีเบื้องต้นของ $\mathbb{R}^n$	10
1.2.3	นิยามและการพิสูจน์	12
1.3	ความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร	24
1.4	อนุพันธ์ย่อย	29
1.4.1	ความหมายของอนุพันธ์ในทางเรขาคณิต	30
1.4.2	อนุพันธ์ย่อยในมิติที่สูงขึ้น	32
1.4.3	ความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องและอนุพันธ์ย่อย	33
1.5	การหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม	37
1.5.1	การหาอนุพันธ์ได้	38
1.5.2	ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม	47
1.5.3	การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่	48
1.6	ฟังก์ชันเอกพันธ์	52
1.7	อนุพันธ์ระดับสูง	55
1.8	จาโคเบียนของการแปลง	64
1.8.1	การแปลงในระนาบ	64
1.8.2	ฟังก์ชันแฝง และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง	72
1.8.3	สมบัติของจาโคเบียน	75
1.9	การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์หลายชั้น	80
1.10	อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง	86
1.10.1	เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการเท่ากันของอนุพันธ์อันดับสูง	87
1.10.2	ปัญหาการเปลี่ยนตัวแปร	89
1.11	อนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร	93
1.12	ค่าสูงสุดและต่ำสุด	98

1.12.1	ค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด	103
1.13	ตัวคุณลากรางจ์	109
1.13.1	ระเบียบวิธีของตัวคุณลากรางจ์ที่มีหนึ่งเงื่อนไข	109
1.13.2	ระเบียบวิธีของตัวคุณลากรางจ์ที่มีมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข	114
2	ปริพันธ์จำกัดเขต	119
2.1	บทนิยามและสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต	121
2.2	ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	128
2.2.1	ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1	129
2.2.2	ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2	130
2.2.3	การเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์	134
2.3	ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์	136
2.4	การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์	142
3	ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	151
3.1	นิยามและการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	153
3.1.1	ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง	154
3.1.2	ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง	157
3.1.3	ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม	161
3.2	การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	163
3.2.1	การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ไม่เป็นลบ	163
3.2.2	การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งทั่วไป	168
3.2.3	การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่ไม่เป็นลบ	171
3.2.4	การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองทั่วไป	174
3.2.5	การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม	175
3.3	การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ	178
3.3.1	ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ	182
3.4	การคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	185
3.5	บทนำสู่ปริพันธ์เชิงวงรี	189
3.5.1	ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลขจอนค์	190
3.5.2	ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบี	191
3.6	ปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบ	195
	บรรณานุกรม	199

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

บทที่

1

การจัดการเรียนการสอน

บทที่ 1 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

กระบวนวิชา	แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus)
ชื่อผู้สอน	อ.ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
เวลาที่ใช้	27 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

- นักศึกษาสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร พร้อมทำการพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
- นักศึกษาสามารถพิสูจน์การหาค่าได้ และการหาค่าไม่ได้ของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
- นักศึกษาสามารถพิสูจน์การเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
- นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยใช้นิยาม และอธิบายความหมายทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องได้
- นักศึกษาสามารถพิสูจน์การหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยใช้นิยาม และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์ได้ ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันช่วยในการตรวจสอบการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
- นักศึกษาสามารถใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม และการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ ประมาณค่าของฟังก์ชันได้
- นักศึกษาสามารถพิสูจน์การเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ และใช้สมบัติของฟังก์ชันเอกพันธ์ในการพิสูจน์ฟังก์ชันบางชนิดได้
- นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ระดับสองของฟังก์ชันที่กำหนด ใช้สมบัติที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ระดับสองในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และอธิบายความหมายที่เกี่ยวข้องได้
- นักศึกษาสามารถหาจาโคเบียนการแปลงจากกระนาบหนึ่งไปยังอีกกระนาบหนึ่งได้
- นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงโดยใช้จาโคเบียนการแปลงได้
- นักศึกษาสามารถเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์หลายชั้นโดยใช้จาโคเบียนการแปลงได้

12. นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันหลายตัวแปรที่กำหนดให้ได้
13. นักศึกษาสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
14. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ และสามารถหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
15. นักศึกษาสามารถอธิบายระเบียบวิธีตัวคูณลาгранจ์ และสามารถแก้ปัญหาหาค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดโดยใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลาгранจ์ได้
16. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. การบรรยายในชั้นเรียน
2. การยกตัวอย่าง การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องในแต่ละหัวข้อ
3. นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัดจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน
4. นักศึกษาทำแบบฝึกหัดทบทวน และทำการบ้านเพื่อพัฒนาทักษะการพิสูจน์

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนการสอน กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง
2. กระดาน ปากกา กระดาษ เครื่องฉายทึบแสง
3. กระดาษชาร์ตสำหรับเขียนคำตอบหน้าชั้นเรียน

เอกสารอ้างอิง

1. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
2. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. อติชาติ เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4. Amazigo, J. C., & Rubinfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.
5. Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.
6. Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.
7. Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley

8. Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
9. Shifrin, T. (2005). Multivariable mathematics: linear algebra, multivariable calculus, and manifolds. John Wiley & Sons Inc.
10. Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
11. Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.
12. Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
13. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.

This page is intentionally left blank. หน้านี้ตั้งใจเว้นว่างไว้

This gives us a contradiction. เกิดข้อขัดแย้ง

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันหลายตัวแปร และแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรเพื่อนำไปใช้งานในบริบทต่าง ๆ สำหรับการศึกษาในกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษาแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันหลายตัวแปรในมุมมองของการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เคยใช้ในแคลคูลัสพื้นฐาน ตลอดจนการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการศึกษาด้านอื่น ๆ ต่อไป

1.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ต่อไปนี้จะกำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง จะเรียก $\mathbb{R}$ ว่าเป็น **ปริภูมิหนึ่งมิติ** (One-dimensional space)

ผลคูณของเซต $A_1, \dots, A_n$ เมื่อ $n \geq 2$ เขียนแทนด้วย $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ คือเซตของ n สิ่งอันดับ (n -tuple) $(a_1, \dots, a_n)$ เมื่อ $a_i \in A_i$ นั่นคือ

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in A_i \text{ ทุก } i = 1, \dots, n\}$$

สำหรับกรณีที่ A_i คือเซตของจำนวนจริง เราจะเขียน $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ตัว}}$ ดังนั้น

สมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ คือ n สิ่งอันดับ $(x_1, \dots, x_n)$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{R}$ สำหรับทุก i

หมายเหตุ เราอาจมองได้ว่า สมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ ที่เป็น n สิ่งอันดับ เป็น **เวกเตอร์** (vector) ดังนั้น ในหนังสือหลาย ๆ เล่ม การเขียนแทน n สิ่งอันดับจะใช้สัญลักษณ์แบบเวกเตอร์ กล่าวคือ อาจเขียนว่า $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ได้

ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน เราได้นิยามฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว กล่าวคือ ความสัมพันธ์ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน (function / mapping) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

เพื่อวางนัยไปสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร กำหนด **ตัวแปรอิสระ** (independent variable) $x_1, \dots, x_n$ จำนวน n ตัว เขียนในรูป n สิ่งอันดับ $\mathbf{P} = (x_1, \dots, x_n)$ สมมติว่าแต่ละ n สิ่งอันดับ $\mathbf{P}$ มี $w \in \mathbb{R}$ เป็น **ตัวแปรตาม** (dependent variable) เซตของคู่ $(\mathbf{P}, w)$ เรียกว่า ฟังก์ชันค่าจริง n ตัวแปร (real-valued function of n variables) เขียนแทนด้วย f

บทนิยาม 1.1.1 ให้ $f \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ เป็นความสัมพันธ์จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง n ตัวแปร ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละคู่ $(\mathbf{P}_1, w_1), (\mathbf{P}_2, w_2)$ โดยที่ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^n, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ ถ้า $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ แล้ว $w_1 = w_2$

หมายเหตุ ถ้าสมมติให้ $\mathbf{P}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $\mathbf{P}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ แล้วจะได้ว่า $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots$ และ $x_n = y_n$

ในการเขียนฟังก์ชัน เราเขียนได้ว่า

$$w = f(\mathbf{P}) \quad \text{หรือ} \quad w = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.1.1)$$

ทั้งนี้ ฟังก์ชันที่เขียนดังสมการ (1.1.1) เราเรียกว่า **ฟังก์ชันชัดแจ้ง** (explicit function) อย่างไรก็ตาม ในบางครั้ง เราไม่อาจเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบที่เห็นเด่นชัด ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร อาจเขียนได้อยู่ในรูป **ฟังก์ชันโดยปริยาย** (implicit function) เขียนได้ในรูปแบบ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1.1.2)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่ชัดแจ้งของ x_i ในเทอมของตัวแปรอิสระที่เหลือ $n - 1$ ตัวแปรได้ อย่างไรก็ตาม เราศึกษาฟังก์ชันชัดแจ้งเป็นหลักในกระบวนวิชานี้

เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถนิยามโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปรได้ ดังนี้

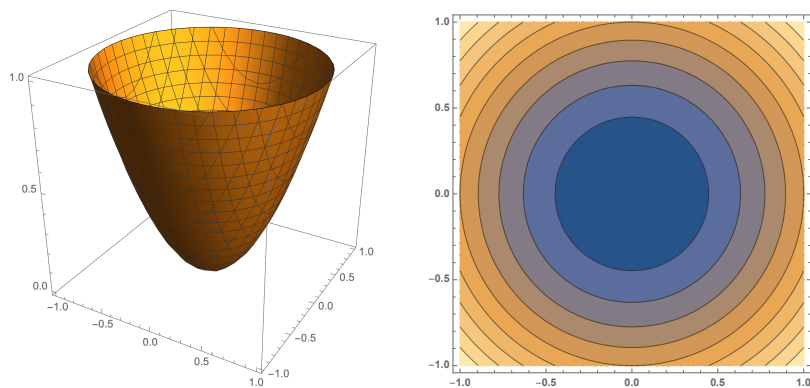
บทนิยาม 1.1.2 ให้ $w = f(\mathbf{P})$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร **โดเมน** (Domain) แทนด้วย D_f และ **เรนจ์** (Range) แทนด้วย R_f ของฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$D_f = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n \mid \text{มี } w \in \mathbb{R} \text{ ซึ่ง } (\mathbf{P}, w) \in f\}$$

$$R_f = \{w \in \mathbb{R} \mid \text{มี } \mathbf{P} \in \mathbb{R}^n \text{ ซึ่ง } (\mathbf{P}, w) \in f\}$$

ความหมายทางเรขาคณิตสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร ฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงพื้นผิว และเมื่อพิจารณา z เป็นค่าคงที่แต่ละค่า จะสามารถพิจารณา f ในรูปเส้นชั้นความสูง (level curves / contour map) ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 1.1. (ซ้าย) พื้นผิวของ $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (ขวา) เส้นชั้นความสูงของ f

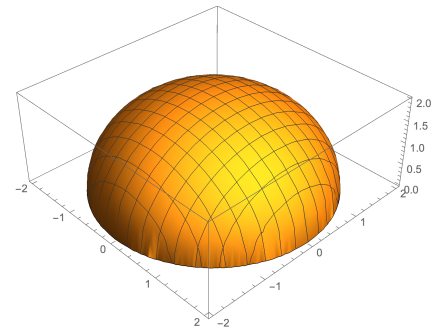
สมมตินิยามฟังก์ชันสองตัวแปรโดย $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ เมื่อทำการวาดกราฟจะได้พื้นผิวของ $z = f(x, y)$ ดังภาพซ้าย จะเห็นว่า เมื่อกำหนดให้ z เป็นค่าคงที่แต่ละค่า จะปรากฏเป็นเส้นชั้นความสูงของ f

ตัวอย่าง 1.1.1 กำหนดความสัมพันธ์

$$f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

1. จงแสดงว่า f ซึ่งมี z เป็นตัวแปรตาม เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y
2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f พร้อมทั้งพิสูจน์

จะเห็นว่า พื้นผิวของ f สามารถวาดได้ดังภาพที่ 1.2 ซึ่งสามารถวิเคราะห์โดยคร่าว ๆ ได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากแต่ละคู่อันดับ (x, y) ให้ค่า z เพียงหนึ่งค่า และเราสามารถวิเคราะห์โดเมนและเรนจ์ได้อย่างคร่าว ๆ ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดนิยาม แจ่มชัด รวมถึงพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร



ภาพที่ 1.2. พื้นผิวที่นิยามโดย $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

พิสูจน์

1. จะแสดงว่า ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

ให้ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^2$ โดยที่ $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$ และ $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$

จาก $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ จะได้ว่า $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

นั่นคือ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

ดังนั้น $z_1 = \sqrt{4 - x_1^2 - y_1^2} = \sqrt{4 - x_2^2 - y_2^2} = z_2$

จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

2. ก่อนอื่น จะหาโดเมนของ f

จะเห็นว่า $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

ซึ่งสมมูลกับ $x^2 + y^2 \leq 4$ ดังนั้น จึงคาดว่าโดเมนของ f คือ

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ซึ่งเป็นบริเวณภายในที่รวมขอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมี 2 หน่วย ดังภาพ 1.3

ต่อไป จะแสดงว่า $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\subseteq$) ให้ $(a, b) \in D_f$

เนื่องจาก $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

โดยนิยามของโดเมน จะได้ว่า มี $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ซึ่ง $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$

เนื่องจาก $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$ จึงได้ว่า $c^2 + a^2 + b^2 = 4$

นั่นคือ $a^2 + b^2 \leq c^2 + a^2 + b^2 = 4$

จึงได้ว่า $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\supseteq$) ให้ $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

จะได้ว่า $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ และ $a^2 + b^2 \leq 4$ นั่นคือ $\sqrt{4 - a^2 - b^2} \geq 0$

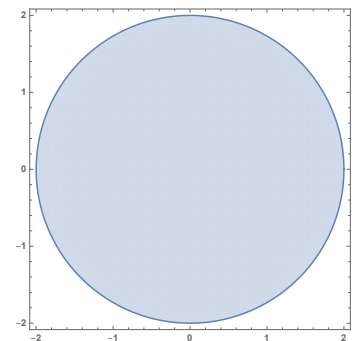
เลือก $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2} \geq 0$ ซึ่ง $f(a, b) = \sqrt{4 - a^2 - b^2} = c$

ดังนั้น $(a, b) \in D_f$

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

3. ต่อไป จะหาเรนจ์ของ f

จะเห็นว่า $z \geq 0$ และ $z^2 = 4 - x^2 - y^2 \leq 4$ นั่นคือ $z \in [0, 2]$ ดังนั้น เรนจ์ของ



ภาพที่ 1.3. บริเวณที่แสดงโดเมนของ f

f คือ

$$R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$$

ต่อไป จะแสดงว่า $R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

($\subseteq$) ให้ $c \in R_f$ ดังนั้น $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$

และมี $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$

ได้ว่า $c^2 = 4 - a^2 - b^2 \leq 4$ นั่นคือ $-2 \leq c \leq 2$

เนื่องจาก $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ได้ว่า $0 \leq c \leq 2$

กล่าวคือ $c \in \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

($\supseteq$) ให้ $c \in \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

เลือก $(a, b) = (\sqrt{4 - c^2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง

$$f(a, b) = \sqrt{4 - (\sqrt{4 - c^2})^2 - 0} = c$$

ดังนั้น $c \in R_f$

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$ $\square$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาโดเมนของฟังก์ชันสองตัวแปร

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$$

พิสูจน์ จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชัน f หาค่าได้คือ $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ และ

$4 - x^2 - y^2 > 0$ ซึ่งสมมูลกับเงื่อนไข $x^2 + y^2 \geq 1$ และ $x^2 + y^2 < 4$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1 \text{ และ } x^2 + y^2 < 4\} \end{aligned}$$

มีบริเวณดังภาพ 1.4 $\square$

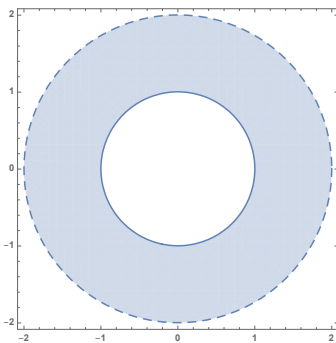
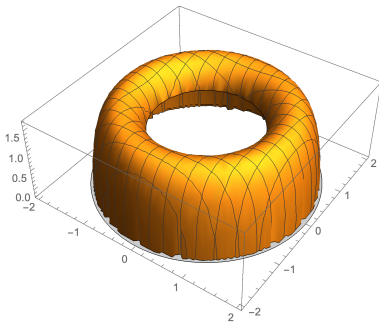
นอกจากการพิจารณาฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจากเซตของ $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ แล้ว เรายังสามารถพิจารณาฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}^m$ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.3 กำหนดให้ $x = \phi(t), y = \varphi(t)$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$

ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในปริภูมิสองมิติ นิยามโดย

$$f(t) = (x, y) = (\phi(t), \varphi(t)) \quad ; t \in \mathbb{R}$$

ในตัวอย่าง 1.1.3 สำหรับปริภูมิสองมิติ เราจะกล่าวว่า เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมเป็นเส้นโค้งเรียบ (smooth curve) บนช่วง $[a, b]$ ถ้า $\phi(t)$ และ $\varphi(t)$ หาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ $\phi'(t)$ และ $\varphi'(t)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ด้วย เราจะใช้นิยามของเส้นโค้งเรียบในการพิสูจน์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรต่อไป



ภาพที่ 1.4. พื้นผิวและบริเวณของโดเมนในตัวอย่าง 1.1.2

ตัวอย่าง 1.1.4 พิจารณาฟังก์ชันที่นิยามแบบอิงตัวแปรเสริม $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ กำหนดโดย

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t/10) \quad ; t \in [0, \infty)$$

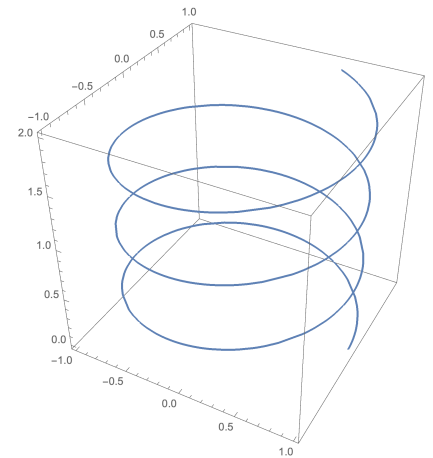
f เป็นฟังก์ชันที่แสดงเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ แสดงได้ดังภาพ 1.5

ในกรณีนี้จะเห็นว่า โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$ ซึ่งโดเมนเป็นเซตใน 1 มิติ

ตัวอย่าง 1.1.5 กำหนดให้ $x = \phi(u, v), y = \varphi(u, v), z = \theta(u, v)$ โดยที่ $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันของพื้นผิวอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ นิยามโดย

$$F(u, v) = (x, y, z) = (\phi(u, v), \varphi(u, v), \theta(u, v)), u, v \in \mathbb{R}$$

โดยทั่วไป $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ จะเรียกว่า **การแปลง** (transformation) เราจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการแปลงในภายหลังอีกครั้งหนึ่งในเรื่องต่อไป



ภาพที่ 1.5. เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมที่นิยามโดยฟังก์ชัน f ในตัวอย่าง 1.1.4

แบบฝึกหัดที่ 1.1

- จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน พร้อมหาโดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน พร้อมทั้งพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันด้วย

(a) $f_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \ln(x^2 + y^2 - 1)\}$

(b) $f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \sqrt{6 - (2x + 3y)}\}$

(c) $f_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \right\}$

- จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{1/2}$

(b) $f(x, y) = \ln(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

(d) $f(u, v, w) = \exp\left(\frac{u}{v - w}\right)$

(e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{2x_1 - 3x_2}{x_3 + 5x_4}$

(f) $f(x, y, z) = \ln(xy/z)$

1.2 ลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร เพื่อให้เข้าใจภาพของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะพิจารณาจากภาพใกล้เคียงตัวก่อน โดยศึกษามโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว จากนั้นเราขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร โดยศึกษาโทโพโลยีเบื้องต้นของ $\mathbb{R}^n$ และนิยามลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร

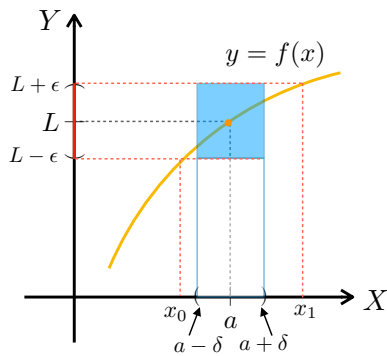
1.2.1 มโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว

ในแคลคูลัสขั้นมูลฐาน เราคุ้นเคยกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เมื่อกล่าวถึงภาษาพูดอย่างง่าย การกล่าวถึงลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

หมายความว่า เมื่อ x เข้าใกล้ a ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ L ด้วย จะเห็นว่าการที่ x เข้าใกล้ a ในโดเมนของ f เราพิจารณาการเข้าสู่ a ในสองทิศทาง คือ ทางบวก $x \rightarrow a^+$ และทางลบ $x \rightarrow a^-$ บนเส้นจำนวน ดังภาพ 1.6

จากนิยามของลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปรได้อย่างไรก็ตาม จะเห็นว่าการขยายแนวความคิด จำเป็นต้องพิจารณาการเข้าใกล้ในมิติที่สูงขึ้น การพิจารณาการเข้าใกล้บนช่วงจึงไม่เพียงพอ ในการนี้ เราจึงจะเริ่มต้นศึกษาโทโพโลยีของ $\mathbb{R}^n$ เพื่อนำไปสู่นิยามของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรต่อไป



ภาพที่ 1.6. ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

1.2.2 โทโพโลยีเบื้องต้นของ $\mathbb{R}^n$

โทโพโลยี (Topology) เป็นการศึกษาสมบัติของปริภูมิที่คงสภาพภายใต้การแปลงที่ต่อเนื่อง โดยการพิจารณากลุ่มของสับเซตที่เรียกว่า เซตเปิด (open set) อย่างไรก็ตาม โทโพโลยีในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ มีสมบัติที่เพียงพอและเหมาะสมต่อการใช้งาน

ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$

ให้ $P(x_1, \dots, x_n)$ และ $A(a_1, \dots, a_n)$ เป็นจุดในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$

นอร์ม (norm) ระหว่างจุด P และ A เขียนแทนด้วย $\|P - A\|$

ในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ นอร์มคือการวัดระยะทางระหว่างจุด P และ A ซึ่งอาจเขียนระยะทาง (เมตริก) ได้โดย $d(P, A)$

นอร์มยูคลิด (Euclidean norm) (หรือ ระยะทางยูคลิด) บน $\mathbb{R}^n$ นิยามโดย

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

สมบัติของเซตใน $\mathbb{R}^n$

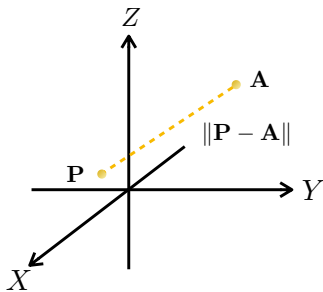
บทนิยาม 1.2.1 บอลเปิด (open ball) ของจุด A เขียนแทนด้วย $B(A; r)$ คือเซตของจุด $P \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $0 \leq \|P - A\| < r$ โดยที่ $r > 0$

- บอลเปิด $B(A; r)$ เขียนได้โดย

$$B(A; r) = \{P \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|P - A\| < r\}$$

- บอลปิด $B[A; r]$ เขียนได้โดย

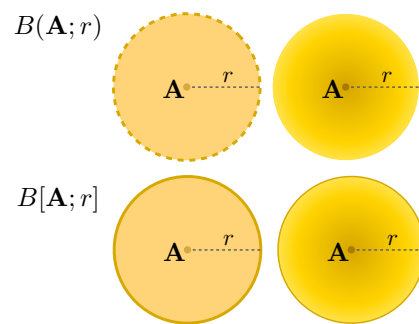
$$B[A; r] = \{P \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|P - A\| \leq r\}$$



ภาพที่ 1.7. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

จะเห็นว่าในปริภูมิ $\mathbb{R}^2$ จะเรียก $B(\mathbf{A}; r)$ เรียกว่า จานเปิด (open disk) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^2$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r รวมขอบ และ $B[\mathbf{A}; r]$ เรียกว่า จานปิด (closed disk) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^2$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r รวมขอบ ดังภาพ 1.8 (ด้านบน)

สำหรับปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ จะเรียก $B(\mathbf{A}; r)$ เรียกว่า บอลเปิด (open sphere) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^3$ เป็นทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r ไม่รวมขอบ และ $B[\mathbf{A}; r]$ เรียกว่า บอลปิด (closed ball) ซึ่งเป็นบริเวณใน $\mathbb{R}^3$ เป็นทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r รวมขอบ ดังภาพ 1.8 (ด้านล่าง)



ภาพที่ 1.8. $B(\mathbf{A}; r)$ และ $B[\mathbf{A}; r]$

บทนิยาม 1.2.2 ให้ S เป็นเซต และสมมติให้ $\mathbf{A} \in S$ จะกล่าวว่า เซต $N(\mathbf{A})$ เป็นย่านจุดเปิด (neighborhood) ของจุด $\mathbf{A}$ ถ้า $N(\mathbf{A})$ บรรจุบอล $B(\mathbf{A}; r)$ สำหรับบางจำนวนจริง $r > 0$
นั่นคือ $N(\mathbf{A})$ เป็นย่านจุดเปิดของ $\mathbf{A}$ ถ้ามี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $B(\mathbf{A}; r) \subset N(\mathbf{A})$

เพื่อความสะดวก เราอาจพิจารณาย่านจุดเปิดเป็นเซตของบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\mathbf{A}$ และมีรัศมี $r > 0$ ในกรณีนี้ จะใช้สัญลักษณ์ $N(\mathbf{A}; r)$ ซึ่งจะได้ว่า ย่านจุดเปิด $N(\mathbf{A}; r)$ เขียนได้โดย

$$N(\mathbf{A}; r) = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r\}$$

และสำหรับย่านจุดปิด $N[\mathbf{A}; r]$ เขียนได้โดย

$$N[\mathbf{A}; r] = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| \leq r\}$$

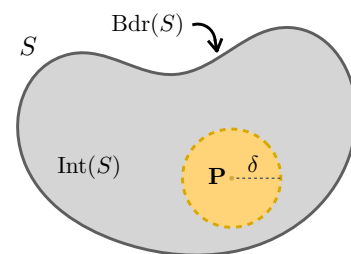
บทนิยาม 1.2.3 ย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ (deleted neighborhood of $\mathbf{A}$) คือเซตของจุด $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r$ โดยที่ $r > 0$ นั่นคือ

$$\{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r\}$$

จะเห็นว่า ย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ คือ ย่านจุดเปิด A ที่ไม่รวมจุด $\mathbf{A}$

หมายเหตุ เมื่อกล่าวโดยทั่วไป ให้ S เป็นเซตในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ เราจะกล่าวถึงนิยามที่เกี่ยวข้องกับโทโพโลยีได้ดังต่อไปนี้

1. เรากล่าวว่า เซตของบรรดาจุด $\mathbf{P}$ อยู่ใกล้กับจุด $\mathbf{A}$ ด้วยระยะ δ เมื่อ $0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ เป็นบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\mathbf{A}$ รัศมี δ
2. จุด $\mathbf{Q}$ เป็นจุดภายในของเซต S (interior point) ถ้าสำหรับทุก ๆ จุดที่อยู่ใกล้ $\mathbf{Q}$ อยู่ในเซต S กล่าวคือ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $N(\mathbf{Q}; \delta) \subseteq S$
3. เซตของจุดภายใน (interior) ของเซต S คือ สับเซตของ S ที่บรรจุทุกจุด $\mathbf{Q}$ ที่เป็นจุดภายในของเซต S
4. เซต S เรียกว่าเป็นเซตเปิด (open set) ถ้าทุก ๆ จุดใน S เป็นจุดภายใน
5. จุด $\mathbf{P}$ ซึ่ง $\mathbf{P} \notin S$ เรียกว่า จุดภายนอก (exterior) ของ S ถ้าทุกจุดที่อยู่ใกล้จุด $\mathbf{P}$ (ทุกจุดในบอลเปิด $B(\mathbf{P}, r)$ สำหรับบาง $r > 0$) อยู่นอกเซต S



ภาพที่ 1.9. เซต S และส่วนประกอบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

6. เซต S เรียกว่าเป็นเซตปิด (closed set) ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้า $\mathbb{R}^n \setminus S$ เป็นเซตเปิด
7. จุดขอบ (boundary point) ของเซต S คือจุดซึ่งไม่เป็นจุดภายในและจุดภายนอกของเซต S
บรรดาจุดขอบทั้งหมดของเซต S เรียกว่า ขอบ (boundary) ของเซต S
เขียนแทนด้วย $\text{Bdr}(S)$
8. ส่วนปกคลุม (closure) ของเซต S แทนด้วย $\bar{S} = S \cup \text{Bdr}(S)$
9. เซต S มีขอบเขต (bounded) ถ้ามี $M > 0$ ซึ่ง $\|\mathbf{P}\| < M$ สำหรับทุก $\mathbf{P} \in S$
10. เซต N ใด ๆ เรียกว่าเป็นย่านจุดเปิดของ $\mathbf{A}$ ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นจุดภายในของ N จะได้ว่า
 - สำหรับบอลเปิดที่รวมจุด $\mathbf{A}$ เป็นย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$
 - แต่ละย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$ บรรจุเซตบอลเปิดที่รวมจุด $\mathbf{A}$
11. จุด $\mathbf{P}$ เรียกว่า จุดเกาะกลุ่ม (cluster point / limit point / accumulation point) ของเซต S ถ้าทุก ๆ ย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{P}$ บรรจุจุดใน S

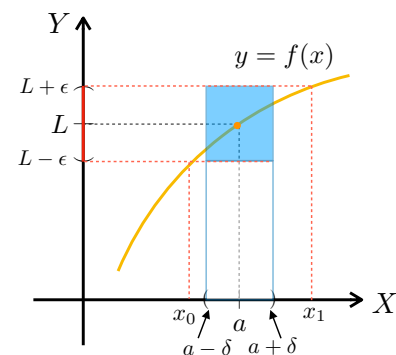
1.2.3 นิยามและการพิสูจน์

ดังที่กล่าวมาในมโนคติเบื้องต้นของลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว การกล่าวถึงลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ที่กล่าวว่า x เข้าใกล้ a หรือ $f(x)$ เข้าใกล้ L ปัญหาที่สำคัญคือ เข้าใกล้อย่างไร และอย่างไร จึงเรียกว่าใกล้

ดังนั้น เพื่อให้เกิดความรัดกุม เราจึงต้องนิยามลิมิตในความหมายของการเข้าใกล้ โดยใช้นิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ดังนี้



ภาพที่ 1.10. ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก x ในช่วงเปิดที่บรรจุ a โดยที่ $f(x)$ อาจไม่นิยามที่ a จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \epsilon$

เราสามารถพิจารณานิยามดังกล่าวได้จากภาพ 1.10

จากความหมายในทางโทโพโลยีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราจึงกล่าวได้ว่า ทุก ๆ จุด x ในย่านจุดใกล้เคียงของ a ด้วยระยะ δ จะต้องมีความ $f(x)$ ซึ่ง $f(x)$ อยู่ใกล้ $f(a) = L$ ภายในระยะ ϵ กล่าวคือ $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$

ดังนั้น เมื่อทำการขยายความคิดสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร เราก็จะสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.4 ให้ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$ จะเรียกว่า L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อจุด $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)$ เข้าใกล้จุด $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ ก็ต่อเมื่อ

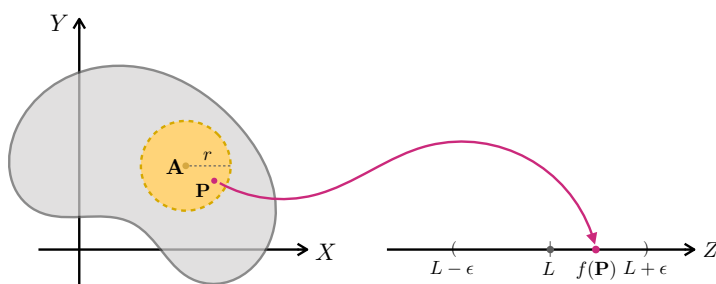
$$\text{สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ มี } \delta > 0 \text{ ซึ่งถ้า } 0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta \text{ แล้ว } |f(\mathbf{P}) - L| < \epsilon$$

ในกระบวนวิชานี้ เราจะสนใจลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร จะเห็นว่า สำหรับจุด $\mathbf{P} = (x, y)$ และ $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$ เราสามารถเขียน $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ โดย

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L \quad \text{หรือ} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

ซึ่งสำหรับกรณีพื้นผิว เราสามารถอธิบายได้ดังภาพที่ 1.11 และพิจารณาการส่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ในภาพที่ 1.12

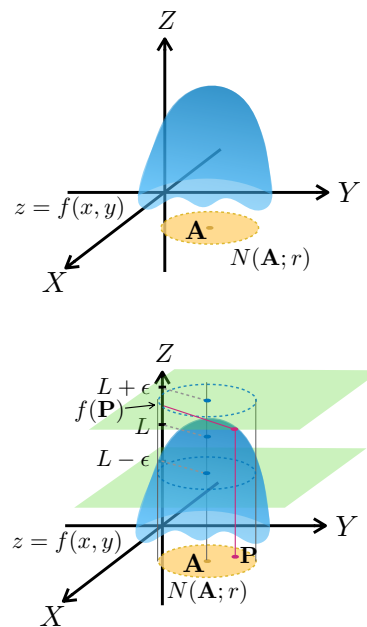
เราจะมาพิจารณาตัวอย่างของการพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร ทั้งนี้ เนื่องจากการเขียนพิสูจน์ดังกล่าวเป็นการเขียนพิสูจน์ครั้งแรก ๆ ของผู้อ่าน ผู้เขียนจึงขอแยกตัวอย่างออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแนวคิด สำหรับเรียบเรียงภาพรวม และการพิสูจน์ ซึ่งเป็นการเรียบเรียงแนวคิด นำมาเขียนให้สมบูรณ์และกระชับ



ภาพที่ 1.12. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร เมื่อพิจารณา

(ภาพซ้าย) บริเวณโดเมน XY และ $N(\mathbf{A}; r)$

(ภาพขวา) จุด $\mathbf{P}$ ในบริเวณใกล้ ๆ $\mathbf{A}$ ถูกส่งไปยัง $f(\mathbf{P})$ โดยที่ $f(\mathbf{P})$ อยู่ในช่วง $(L - \epsilon, L + \epsilon)$



ภาพที่ 1.11. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

ตัวอย่าง 1.2.1 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} (2x + y) = 1$

แนวคิด เพื่อที่จะแสดงว่า $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} (2x + y) = 1$ เราจะต้องแสดงว่า

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 [0 < \|(x, y) - (0, 1)\| < \delta \Rightarrow |(2x + y) - 1| < \epsilon]$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $\epsilon > 0$ ขั้นตอนที่สำคัญคือ หา δ ที่สอดคล้องกับสิ่งที่เราต้องการคือ

$$|(2x + y) - 1| < \epsilon \text{ เมื่อ } 0 < \|(x, y) - (0, 1)\| < \delta$$

$$\text{ถ้าลองสมมติให้ } \|(x, y) - (0, 1)\| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta \text{ จะได้ว่า}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta$$

$$|y - 1| = \sqrt{(y - 1)^2} \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta$$

เราลองจัดรูปให้

$$|(2x + y) - 1| = |2x + (y - 1)| \leq |2x| + |y - 1| = 2|x| + |y - 1|$$

เราพอจะเห็นว่า เราสามารถเลือก $\delta = \epsilon/3$ หรือ δ ใด ๆ ที่เล็กกว่า $\epsilon/3$ เพื่อให้

$$|(2x + y) - 1| \leq 2|x| + |y - 1| < 3\delta = \epsilon$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/3 > 0$

ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (0, 1)\| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned}|x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta \\|y - 1| &= \sqrt{(y - 1)^2} \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|(2x + y) - 1| &\leq 2|x| + |y - 1| \\&< 2\delta + \delta \\&= 3\delta = \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (2x + y) = 1$ ตามต้องการ $\square$

หมายเหตุ อสมการต่อไปนี้เป็นอสมการสำคัญที่อาจมีประโยชน์ในการพิสูจน์ให้ $a_1, \dots, a_n$ และ $b_1, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. **อสมการโคชี-ชวาร์ซ** (Cauchy-Schwarz inequality)

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

2. **อสมการสามเหลี่ยม** (triangle inequality)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

3. **อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก** (AM-GM-HM inequality)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

ตัวอย่าง 1.2.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y) = 5$

แนวคิด เพื่อที่จะแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y) = 5$ เราจะต้องแสดงว่า

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ [0 < \|(x, y) - (1, 2)\| < \delta \Rightarrow |(x^2 + 2y) - 5| < \epsilon]$$

จะเห็นว่า หากพิจารณา $0 < \|(x, y) - (1, 2)\| < \delta$ หรือความหมายเดียวกันกับ $0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} < \delta$ จะได้ว่า $|x - 1| < \delta$ และ $|y - 2| < \delta$ เช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ผ่านมา เราสามารถจัดพจน์เพื่อให้อยู่ในรูปที่มีอยู่แล้ว คือ

$$\begin{aligned}|(x^2 + 2y) - 5| &= |(x^2 - 1) + (2y - 4)| \\&\leq |x^2 - 1| + 2|y - 2| = |x + 1||x - 1| + 2|y - 2|\end{aligned}$$

เราเกือบพร้อมที่จะพิสูจน์แล้ว เหลือเพียงการพิจารณาพจน์ $|x + 1|$ เนื่องจาก $|x - 1| < \delta$ หากเราเลือก $\delta = 1$ จะพบว่า $|x + 1| < 3$ และ

$$|(x^2 + 2y) - 5| < 3\delta + 2\delta = 5\delta$$

ดังนั้น ในการเลือก δ ในการพิสูจน์ เราจึงจะเลือก $\delta = \epsilon/5$ หรือ 1 ตัวใดก็ได้ที่น้อยกว่า ดังนั้น จึงเลือก $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ เพื่อให้

$$|(x^2 + 2y) - 5| < 3\delta + 2\delta = 5\delta = \epsilon$$

จากแนวคิดดังกล่าว เราสามารถเขียนนิพจน์ให้กระชับได้ดังนี้

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\{1, \epsilon/5\} > 0$

ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (1, 2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$ และ

$$|x - 1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$$

$$|y - 2| = \sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |(x^2 + 2y) - 5| &= |(x^2 - 1) + (2y - 4)| \\ &\leq |x^2 - 1| + 2|y - 2| \\ &= |x + 1||x - 1| + 2|y - 2| \\ &< 3\delta + 2\delta = 5\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y) = 5$ ตามต้องการ $\square$

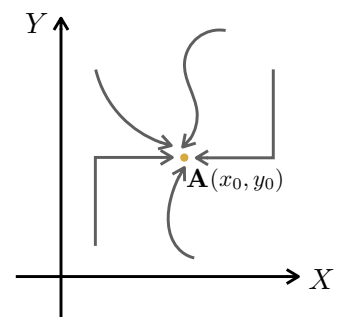
ลิมิตทำซ้ำ และลิมิตตามเส้น

จากภาพของลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว การเข้าใกล้ของ x สู่อำนาจ a สามารถพิจารณาการเข้าใกล้ได้สองทิศทางดังที่กล่าวมาข้างต้น และการที่ลิมิตของ f หาค่าได้ ค่าของลิมิตที่เข้าใกล้ในทิศทางทั้งสองจะต้องเท่ากันด้วย

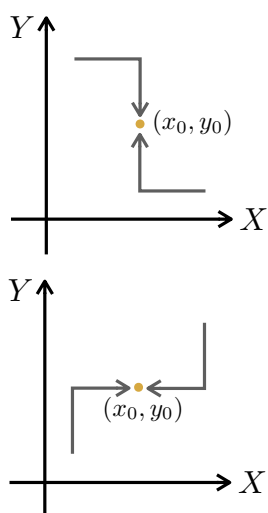
ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยพิจารณาลิมิตของ f ที่ x เมื่อ x เข้าใกล้ a ทั้งสองทิศทาง ($x \rightarrow a$) เราเคยกล่าวว่า ลิมิตของ f ที่ x เมื่อ $x \rightarrow a$ หาค่าไม่ได้ ถ้าลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ฝั่งใดฝั่งหนึ่ง ($x \rightarrow a^+$ หรือ $x \rightarrow a^-$) หรือทั้งสองฝั่งหาค่าไม่ได้ (เช่น มีค่าเป็นอนันต์) หรือลิมิตทั้งสองฝั่งหาค่าได้แต่มีค่าไม่เท่ากัน

ในกรณีของฟังก์ชันหลายตัวแปร จากนิยามของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะเห็นว่า แต่ละจุด $\mathbf{P}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ ซึ่งสอดคล้องกับ $\|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ มีความหมายว่า จุด $\mathbf{P}$ วิ่งเข้าหา $\mathbf{A}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ จะเห็นว่า การวิ่งเข้าสู่จุด $\mathbf{A}$ สามารถเป็นไปได้อันหลายทิศทาง ดังภาพ 1.13

ดังนั้น หากพิจารณาแล้วพบว่า ในทุก ๆ เส้นทางจาก $\mathbf{P}$ ไปยัง $\mathbf{A}$ ค่าของลิมิตมีค่าเท่ากัน เราจึงจะสามารถสรุปได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันที่จุด $\mathbf{A}$ หาค่าได้ สอดคล้องดังทฤษฎีบทต่อไปนี้



ภาพที่ 1.13. เส้นทางของจุด $\mathbf{P}$ ที่เข้าหาจุด $\mathbf{A}$ ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร



ภาพที่ 1.14. (บน) ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1
(ล่าง) ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2

ทฤษฎีบท 1.2.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร

1. ถ้า $f(x, y) \rightarrow L$ เมื่อ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ แล้ว $f(x, y) \rightarrow L$ เมื่อ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ สำหรับทุก ๆ เส้นโค้งเรียบใด ๆ
2. ถ้าลิมิตของ $f(x, y)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ สำหรับบางเส้นโค้ง หรือ $f(x, y)$ มีค่าลิมิตที่แตกต่างกันเมื่อ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ สำหรับสองเส้นโค้งที่ต่างกันแล้ว ลิมิตของ $f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

เราเริ่มต้นพิจารณาเส้นทางที่ง่ายที่สุด คือทิศทางที่จากจุด P ไปยังจุด A ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน X และ Y ก่อน การพิจารณาเส้นทางของลิมิตดังกล่าวนี้จะเรียกว่า **ลิมิตทำซ้ำ** (Iterated limit) โดยลิมิตทำซ้ำ มีสองลักษณะ ซึ่งสอดคล้องดังภาพ 1.14 ดังนี้

แบบที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อให้ $x \rightarrow x_0$ ก่อน ขณะที่ y เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากนั้นจึงให้ $y \rightarrow y_0$ เขียนแทนด้วย $\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right]$

แบบที่ 2 ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อให้ $y \rightarrow y_0$ ก่อน ขณะที่ x เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากนั้นจึงให้ $x \rightarrow x_0$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right]$

จะเห็นว่า หากลิมิตทำซ้ำทั้งสองทางหาค่าได้ และไม่เท่ากัน กล่าวคือ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] = L_1 \neq L_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right]$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 เราสามารถสรุปได้ว่า ลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้

อย่างไรก็ตาม หากลิมิตทำซ้ำทั้งสองทางมีค่าเท่ากัน กล่าวคือ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] = L = \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right]$$

หากยังไม่ได้ทำการพิสูจน์ เราก็ยังสรุปไม่ได้ว่า ลิมิตจะมีค่าเท่ากับ L เนื่องจาก อาจมีเส้นทางบางเส้นทางที่ทำให้ลิมิตจากเส้นทางหนึ่งไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง 1.2.4 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{5x - 2y}{x + 2y}$ โดยที่ $(x, y) \neq (0, 0)$
จงหาของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ (ถ้ามี)

พิสูจน์ เราเริ่มพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ กล่าวคือ

$$\text{ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: } \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 2y}{x + 2y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [-1] = -1$$

$$\text{ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5x - 2y}{x + 2y} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [5] = 5$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 2y}{x + 2y} \right] = -1 \neq 5 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5x - 2y}{x + 2y} \right]$$

จึงได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ □

เนื่องจากเส้นโค้งในระนาบ XY สามารถเขียนได้ในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริมหนึ่งตัวแปร ดังนั้น เราจึงสามารถพิจารณา ลิมิตจากจุด (x, y) ที่เข้าสู่จุด (x_0, y_0) ตามเส้นทางอื่นๆ ที่นิยามโดยสมการอิงตัวแปรเสริมได้ โดยจะนิยามลิมิตตามเส้น (limit along curves) ได้ดังนี้

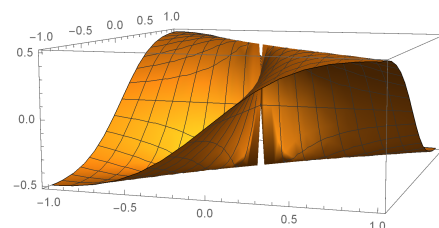
บทนิยาม 1.2.5 ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), y = y(t)$$

และถ้า $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ แล้ว **ลิมิตตามเส้น C** (limit along curve C) นิยามโดย

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ \text{(ตามเส้น } C\text{)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t))$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 ถึงแม้ว่าลิมิตทำซ้ำจะเท่ากัน แต่หากเราพบว่า มีเส้นทางบางเส้นทางที่เข้าสู่จุด (x_0, y_0) ที่ทำให้ค่าของลิมิตไม่เท่ากันแล้ว เราก็สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ภาพที่ 1.15. พื้นผิวของ $f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$

ตัวอย่าง 1.2.5 กำหนดให้ $f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$ โดยที่ $(x, y) \neq (0, 0)$

จงหาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ (ถ้ามี)

พิสูจน์ ก่อนอื่น เราพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ กล่าวคือ

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{xy}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [0] = 0$

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} -\frac{xy}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [0] = 0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{xy}{x^2 + y^2} \right] = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} -\frac{xy}{x^2 + y^2} \right]$$

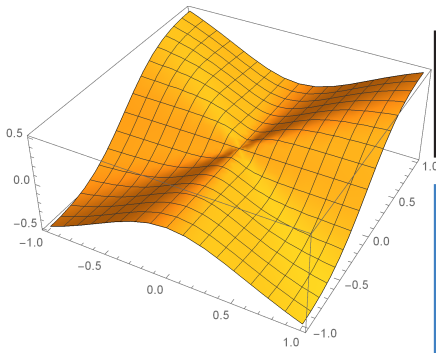
อย่างไรก็ตาม เราต้องพิจารณาตามเส้นอื่นๆ โดยใช้ลิมิตตามเส้น

เมื่อเลือกแนวเส้นตรง $y = x$ จะเห็นว่า เมื่อ $x \rightarrow 0$ แล้ว $y \rightarrow 0$ ดังนั้นเราจะพิจารณา

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ตามเส้น } y=x\text{)}}} -\frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ □

หมายเหตุ จะเห็นว่าในตัวอย่าง 1.2.5 การกำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม เรากำหนดว่า ถ้าให้ $x = t$ แล้ว $y = t$ ในกรณีที่มีการกำหนดให้ตัวแปร x หรือ y ตัวใดตัวหนึ่งเป็น t เราอาจกำหนดให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรหลัก และอีกตัวแปรเป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรหลักนั้นตามการเขียนในตัวอย่าง 1.2.5 ได้



ภาพที่ 1.16. พื้นผิวของ
 $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$

ตัวอย่าง 1.2.6 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$
 จงหาและพิสูจน์ค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ (ถ้ามี)

พิสูจน์ เราเริ่มต้นจากการพิจารณาลิมิตทำซ้ำ

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [0] = 0$

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [0] = 0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right] = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right]$$

ต่อไป เราจะพิจารณาเส้นทางต่างๆ โดยเลือกเส้นทางที่ผ่านจุด $(0, 0)$ เริ่มต้นจึงเลือก $y = x$ ได้ว่า เมื่อ $x \rightarrow 0$ แล้ว $y \rightarrow 0$ นั่นคือ

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + x^2} = 0$$

ทำการเลือกเส้นทางอื่นๆ อีก เช่น เลือก $y = x^2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=x^2)}} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2(1 + x^2)} = 0$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือกเส้นทางใดในที่นี่ ก็จะได้ค่าของลิมิตเท่ากับ 0 เราจึงคาดเดาว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0$

แนวคิด เราจะแสดงว่า

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \left[0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon \right]$$

เราพบว่า $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ และ $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ และเราทราบว่า $x^2 + y^2 \geq x^2$ โดยสิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$

ถ้าเราจัดรูป $\left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y|$ ก็จะได้พบว่า เราจะเลือก $\delta = \epsilon$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon$

ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ และ

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| &= \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y| \\ &\leq |y| \\ &< \delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ ตามต้องการ $\square$

หมายเหตุ ถ้าลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าได้ อาจเกิดเหตุการณ์ที่ลิมิตทำ

ซ้ำ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right]$ หรือ $\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right]$ หาค่าไม่ได้ ทั้งนี้ เราจะพิจารณาเหตุการณ์ดังกล่าวนี้ในแบบฝึกหัดที่ 1.2 ข้อที่ 7

ตัวอย่าง 1.2.7 จงหาและพิสูจน์ค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนด

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

แนวคิด จะเห็นว่า เราสามารถแบ่งกรณีได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ $x = 0$ จะเห็นว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$

กรณีที่ $x \neq 0$ หากพิจารณาลิมิตตามเส้น $y = x$ จะพบว่า

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ตามเส้น } y=x)}} (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

และเมื่อลองพิจารณาเส้นทางอื่น ๆ เช่น $y = x^n$ จะพบเช่นกันว่า

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ตามเส้น } y=x^n)}} (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+x^n) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

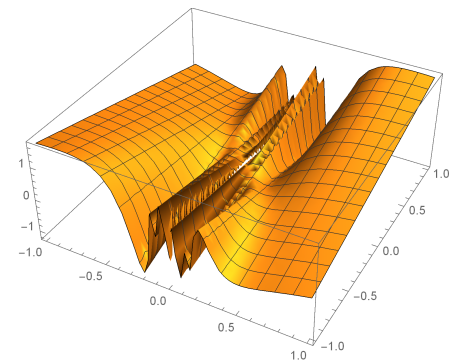
จึงคาดเดาว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

สำหรับการพิสูจน์ในข้อนี้ จะต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ เมื่อ $x = 0$ และ $x \neq 0$

โดยเราจะต้องเลือก δ ที่สอดคล้องทั้งสองกรณี

ในกรณีที่ $x \neq 0$ เราพบว่า $\left| (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x+y| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ โดยใช้

อสมการสามเหลี่ยม และความรู้ที่ว่า $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ จึงจะเลือก $\delta = \epsilon/2$



ภาพที่ 1.17. พื้นผิวของ $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.2.7

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/2$

ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ และ

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

กรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$|f(x, y) - 0| = |0 - 0| < \epsilon$$

กรณีที่ $x \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| &= |x + y| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x| + |y| \\ &< \delta + \delta = 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ ตามต้องการ □

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต S เราสามารถพิจารณาพีชคณิตของฟังก์ชัน $f \pm g, fg, f/g$ บน S โดย

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(f - g)(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$$

$$(f/g)(x, y) = f(x, y)/g(x, y) \text{ เมื่อ } g(x, y) \neq 0 \text{ สำหรับ } (x, y) \in N$$

เราสามารถพิจารณาทฤษฎีบทของลิมิตได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ที่นิยามบนย่านจุดเปิด $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ โดยที่ $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ และ $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{P}) = M$ จะได้ว่า

1. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P}) = L + M$
2. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) - g(\mathbf{P}) = L - M$
3. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} cf(\mathbf{P}) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
4. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) \cdot g(\mathbf{P}) = L \cdot M$
5. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P})/g(\mathbf{P}) = L/M$ เมื่อ $M \neq 0$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ในข้อ 1. สำหรับข้ออื่น ๆ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

$$\text{เราจะแสดงว่า } \lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P}) = L + M$$

ให้ $\epsilon > 0$

$$\text{สมมติให้ } \lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L \text{ และ } \lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{P}) = M$$

จะได้ว่า มี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|f(\mathbf{P}) - L| < \epsilon/2$ เมื่อ $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta_1$
 และมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $|g(\mathbf{P}) - M| < \epsilon/2$ เมื่อ $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta_2$

แนวคิด เราจะต้องแสดงว่า ถ้าให้ $\epsilon > 0$ จะเลือก $\delta > 0$ ซึ่ง
 ถ้า $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว $|(f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P})) - (L + M)| < \epsilon$
 เราพิจารณาว่า

$$|(f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P})) - (L + M)| \leq |f(\mathbf{P}) - L| + |g(\mathbf{P}) - M|$$

ซึ่งการเลือก δ ครั้งนี้ ขึ้นอยู่กับการเลือก δ_1, δ_2 ตัวเดิมของลิมิตของฟังก์ชัน
 $f(\mathbf{P})$ และ $g(\mathbf{P})$ ว่าตัวไหนน้อยกว่ากัน จึงเลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ด้วยเหตุนี้
 เราจึงกำหนดให้ $|f(\mathbf{P} - L)| < \epsilon/2$ และ $|g(\mathbf{P} - M)| < \epsilon/2$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ซึ่งสำหรับ $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |(f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P})) - (L + M)| &\leq |f(\mathbf{P}) - L| + |g(\mathbf{P}) - M| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P}) = L + M$

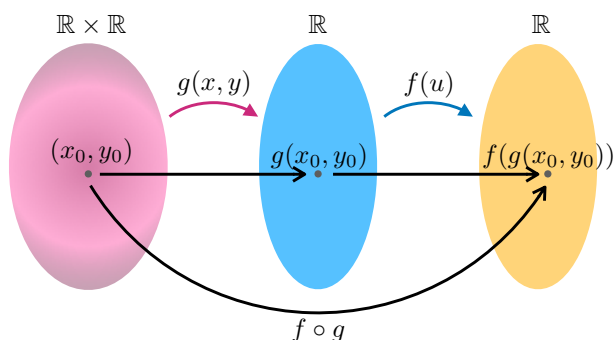
□

ตัวอย่าง 1.2.9 จงใช้ทฤษฎีลิมิตหาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} (5x^3y^2 - 9)$

วิธีทำ โดยทฤษฎีลิมิต จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} (5x^3y^2 - 9) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} 5x^3y^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} 9 \\ &= 5 \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} x^3 \right) \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} y^2 \right) - \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} 9 \right) \\ &= 5(1)^3(4)^2 - 9 = 71 \end{aligned}$$

ในกรณีที่เรามีฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว และมี g เป็นฟังก์ชันค่าจริง
 หลายตัวแปร เราพิจารณาการประกอบของฟังก์ชัน $f \circ g$ ได้ ดังแผนภาพ 1.18 ทำให้เราได้
 ทฤษฎีบทต่อไปนี้



ภาพที่ 1.18. การประกอบฟังก์ชันสองตัวแปร กับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ทฤษฎีบท 1.2.10 ให้ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร ซึ่ง

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = c$ และถ้าฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว f ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f \circ g(x,y) = f(c)$$

กล่าวคือ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f \circ g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)\right)$$

แนวคิด เราจะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ แต่จะให้แนวคิดแก่ผู้อ่านสำหรับการพิสูจน์ ดังนี้ สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in A$

ฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว f มีความต่อเนื่องที่ c ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งถ้าทุกจุดใน A ที่สอดคล้องกับ $|x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(c)| < \epsilon$

จะเห็นว่า การพิสูจน์ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน มีเค้าโครงการพิสูจน์คล้ายกันกับการพิสูจน์ลิมิต ซึ่งจะเห็นว่า เราจะเลือก δ จากการที่ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = c$ เพื่อ

แสดงให้ได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f \circ g(x,y) = f(c)$

ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ มีประโยชน์สำหรับการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรที่ถูกประกอบกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.11 จงหาลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2y^3)$

วิธีทำ เราสามารถมองได้ว่า $f(u) = \ln u$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมน กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ และ $g(x,y) = 1 + x^2y^3$ โดยที่

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2y^3) = 1$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.10 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2y^3) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f \circ g(x,y) \\ &= \ln\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2y^3)\right) \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงแสดงว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้หาค่าไม่ได้

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x^2 - y^2)^2}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y-x}{y+x} \cdot \frac{1+x}{1+y}$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ (คำใบ้: พิจารณาเส้น $y = x - mx^3$)

2. จงใช้นิยามของลิมิตแสดงว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้หาค่าได้

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 3xy$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}} \quad ; (x, y) \neq (0, 0)$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad ; (x, y) \neq (0, 0)$

3. จงใช้ลิมิตทำซ้ำตรวจสอบการหาค่าได้ของลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ ทั้งนี้ หากลิมิตหาค่าได้ ให้พิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันนั้นด้วย

(a) $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2y^4}$

ทฤษฎีบท 1.2.12 (ทฤษฎีบทบีบอัด : Squeeze Theorem) ถ้า $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ ในย่านจุดเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_0, y_0) และ ถ้า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y)$ แล้ว $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$

4. จงหาค่าของลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ เมื่อกำหนด

$$f(x, y) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$

(คำใบ้ : ใช้ Squeeze Theorem พิจารณาการลู่เข้าของ $|\ln x|$)

5. เมื่อทราบว่า $2|xy| - \frac{x^2 y^2}{6} \leq 4 - 4 \cos \sqrt{|xy|} \leq 2|xy|$ แล้ว จงหาค่าของลิมิต

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

(คำใบ้ : ใช้ Squeeze Theorem และแบ่งกรณีเมื่อ $xy > 0$ และ $xy < 0$)

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2.8 ข้อ 2 - 5

7. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีลิมิตที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ แต่ลิมิตทำซ้ำที่ $(0, 0)$ หาค่าไม่ได้

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , xy \neq 0 \\ 0 & , xy = 0 \end{cases}$$

8. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีลิมิตทำซ้ำที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ แต่ไม่มีลิมิตที่จุด $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , xy \neq 0 \\ 0 & , xy = 0 \end{cases}$$

9. จงแสดงว่า สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right]$ หาค่าไม่ได้ แต่

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \text{ และ } \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] \text{ หาค่าได้}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} y + x \sin \left(\frac{1}{y} \right) & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

10. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีลิมิต และการประกอบของฟังก์ชันตัวแปรเดียวกับฟังก์ชันหลายตัวแปร

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x+2y}$

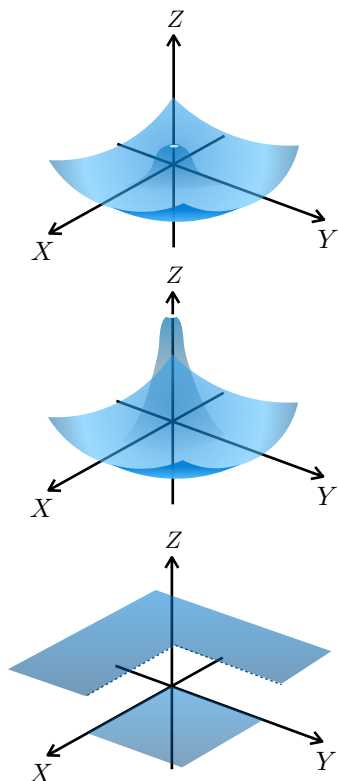
(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \ln(1+x^2y^3)$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1/4,\pi)} (xy^2 \sin xy)$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x + 2\sqrt{x} - y + 2\sqrt{y}}$ เมื่อ $x \neq y$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$ เมื่อ $x \neq y + 1$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,3)} \frac{x^2 - y^2}{x^4 - y^4}$



ภาพที่ 1.19. ตัวอย่างของความไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ แบบต่างๆ

(ภาพบน) ฟังก์ชันไม่นิยามที่จุด $(0, 0)$ เกิดความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด

(ภาพกลาง) ค่าของฟังก์ชันเป็นอนันต์ที่จุด $(0, 0)$

(ภาพล่าง) ฟังก์ชันมีการกระโดดแนวตั้ง (vertical jump) ที่จุด $(0, 0)$

1.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร

สมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันคือ สมบัติเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (continuity of a function) สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะสามารถพิจารณาความต่อเนื่องได้ในทำนองคล้ายกันกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียวได้ ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ที่กำหนดตามโดเมน ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่อง (continuity) ที่จุด $\mathbf{P} = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(\mathbf{A})$ หาค่าได้
2. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P})$ หาค่าได้
3. $\lim_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{A})$

จากนิยามดังกล่าว เราสามารถกล่าวได้โดยมุมมองของนิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ได้ว่า

ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$ บนโดเมนของฟังก์ชัน ถ้าสำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีย่านจุดเปิด $N(\mathbf{A}; \delta)$ ของ $\mathbf{A}$ ที่ทำให้ $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{A})| < \epsilon$ สำหรับทุก $\mathbf{P} \in N(\mathbf{A}; \delta)$

ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด **A** จะเรียกว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ที่จุด **A** ทั้งนี้ ตัวอย่างของความต่อเนื่องแบบต่าง ๆ แสดงในภาพที่ 1.19

ตัวอย่าง 1.3.1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x, y) = 2x + y$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 1)$

พิสูจน์ จะเห็นว่า $f(0, 1) = 1$ และเนื่องจาก $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (2x + y) = 1$ จากตัวอย่าง 1.2.8

ทำให้ได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (2x + y) = 1 = f(0, 1)$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 1)$ □

เราสามารถพิสูจน์ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบางชนิด รวมถึงฟังก์ชันที่สร้างจากฟังก์ชันอื่นๆ ที่มีความต่อเนื่อง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ โดยเว้นให้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.3.2

1. ฟังก์ชันพหุนามที่มี n ตัวแปร มีความต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}^n$
2. ฟังก์ชันตรรกยะ มีความต่อเนื่องทุก ๆ จุดในโดเมนของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(-1, 2)$ โดยนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า

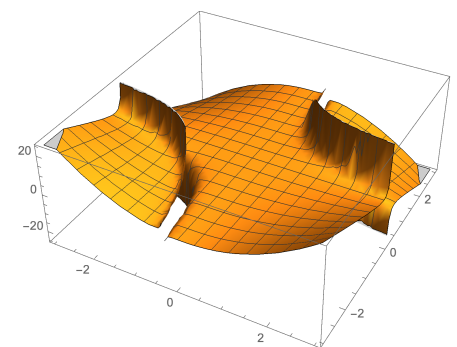
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2 + (2)^2} = -\frac{2}{5}$$

ตัวอย่าง 1.3.4 ฟังก์ชัน $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1 - xy}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ มีความต่อเนื่องทุกจุดยกเว้นบริเวณที่ $xy = 1$

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ที่มีความต่อเนื่อง จากฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องได้ โดยให้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.3.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ แล้ว

1. $f \pm g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$
2. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$
3. f/g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$ โดยที่ $g(\mathbf{A}) \neq 0$



ภาพที่ 1.20. พื้นผิวของ $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1 - xy}$

ตัวอย่าง 1.3.6 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้มี ความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

พิสูจน์ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(0, 0) = 0$ เราจึงพิจารณาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ โดยเริ่มต้น เราจะพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ

$$\text{ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: } \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [-1] = -1$$

$$\text{ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [1] = 1$$

ดังนั้นจะเห็นว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ □

ตัวอย่าง 1.3.7 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มี ความต่อเนื่องที่จุด $(1, 2)$ หรือไม่

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y & , (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & , (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

พิสูจน์ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(1, 2) = 0$

$$\text{และ } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 5$$

$$\text{จึงได้ว่า } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 5 \neq 0 = f(1, 2)$$

นั่นคือ f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(1, 2)$ □

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 1.3.7 หากเรานิยามให้ $f(1, 2) = 5$ จึงจะทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับฟังก์ชันลักษณะนี้ มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด (removable discontinuity)

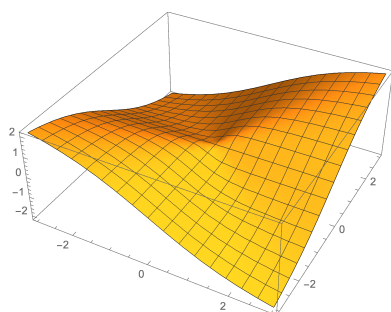
หมายเหตุ ฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด (removable discontinuity) ที่ (x_0, y_0) ถ้า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ หาค่าได้ แต่ f ไม่ต่อเนื่อง เนื่องจาก f ไม่นิยามที่จุด (x_0, y_0) หรือ $f(x_0, y_0)$ มีค่าต่างจาก $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ตัวอย่าง 1.3.8 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มี ความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

พิสูจน์ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(0, 0) = 0$

ต่อไป เราจะพิจารณา $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$



ภาพที่ 1.21. พื้นผิวของฟังก์ชันในตัวอย่าง 1.3.8

เราเริ่มต้นจากการพิจารณาลิมิตทำซ้ำ

$$\text{ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: } \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [0] = 0$$

$$\text{ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [0] = 0$$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

ต่อไป เราจะพิจารณาเส้นทางต่างๆ โดยเลือกเส้นทางที่ผ่านจุด $(0, 0)$ เริ่มต้นจึงเลือก $y = mx$ สำหรับจำนวนจริง m ใดๆ ได้ว่า เมื่อ $x \rightarrow 0$ แล้ว $y \rightarrow 0$ นั่นคือ

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=mx)}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = 0$$

ทำการเลือกเส้นทางอื่นๆ อีก เช่น เลือก $y = mx^2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=mx^2)}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{\sqrt{x^2(1+m^2x^2)}} = 0$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือกเส้นทางใดในที่นี่ ก็จะได้ค่าของลิมิตเท่ากับ 0 เราจึงคาดเดาว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon > 0$

ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \\ |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &= \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| |y| \\ &\leq |y| \\ &< \delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

เนื่องจาก $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$

จึงได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

□

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} 2xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) = (2y, y) \\ e^{|x-2y|/(x^2-4xy+4y^2)} & , (x, y) \neq (2y, y) \end{cases}$$

4. ให้ฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1 + y)$ จงแสดงว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

5. ให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 และ $h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด y_0 แล้ว จงแสดงว่า $f(x, y) = g(x)h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

(คำใบ้: ใช้นิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ในการพิสูจน์)

6. จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} 3xy & , (x, y) \neq (2, 3) \\ 6 & , (x, y) = (2, 3) \end{cases}$$

มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด พร้อมทั้งนิยามค่าของฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่อง

7. สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้ เราสามารถนิยามค่าของฟังก์ชันที่จุด $(0, 0)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(a) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = |x|^y$

(c) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

1.4 อนุพันธ์ย่อย

ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร เราสนใจการศึกษาว่า z มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ x เปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ y ถูกตรึงให้คงที่ และเมื่อ y เปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ x ถูกตรึงให้คงที่ การศึกษาการเปลี่ยนแปลงในลักษณะดังกล่าว คล้ายคลึงกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว และจะเรียกว่า อนุพันธ์ย่อย (partial derivative)

บทนิยาม 1.4.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรแล้ว

1. อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x เขียนแทนด้วย f_x , $\partial f / \partial x$, $D_x f(x, y)$ หรือ $f_x(x, y)$ นิยามโดย

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

2. อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y เขียนแทนด้วย f_y หรือ $\partial f / \partial y$, $D_y f(x, y)$ หรือ $f_y(x, y)$ นิยามโดย

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ถ้าลิมิตดังกล่าวหาค่าได้

อนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) ในโดเมนของ f เขียนแทนด้วย

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, D_x f(x_0, y_0) \text{ หรือ } f_x(x_0, y_0)$$

และทำนองเดียวกัน

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, D_y f(x_0, y_0) \text{ หรือ } f_y(x_0, y_0)$$

ดังนั้น จะได้ว่า อนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (x_0, y_0) สามารถพิจารณาได้โดย

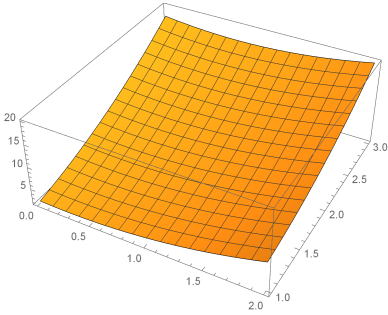
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

และถ้าให้ $\Delta x = x - x_0$ และ $\Delta y = y - y_0$ เราจะได้ว่า

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$



ภาพที่ 1.22. พื้นผิวของฟังก์ชันในตัวอย่าง $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$

ตัวอย่าง 1.4.1 กำหนด $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\partial f / \partial x$ และ $\partial f / \partial y$ และหา $f_x(1, 2)$, $f_y(1, 2)$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์ย่อย

วิธีทำ ก่อนอื่น จะหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y จะได้ว่า

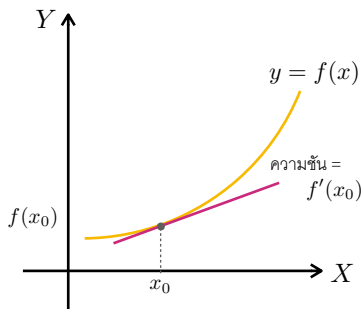
$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2(x + \Delta x)^2 - y(x + \Delta x) + 2y^2) - (2x^2 - xy + 2y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + 2\Delta x - y \\ &= 4x - y \end{aligned}$$

และทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(2x^2 - x(y + \Delta x) + 2(y + \Delta y)^2) - (2x^2 - xy + 2y^2)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -x + 4y + 2\Delta y \\ &= -x + 4y \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $f_x(1, 2) = 4(1) - 2 = 2$ และ $f_y(1, 2) = -1 + 4(2) = 7$

หมายเหตุ ในตัวอย่างดังกล่าว เราอาจเลือกใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ที่จุดดังกล่าวได้เช่นเดียวกัน โดยให้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด



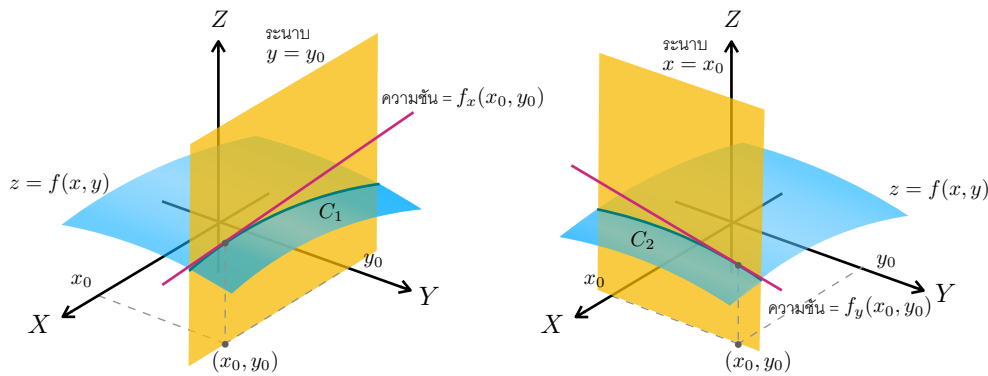
ภาพที่ 1.23. ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ที่จุด x_0

1.4.1 ความหมายของอนุพันธ์ในทางเรขาคณิต

สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ ความหมายของอนุพันธ์ $f'(x_0)$ คือ การเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่จุด x_0 ซึ่งมีความหมายทางเรขาคณิตคือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ณ จุด x_0 ดังแสดงในภาพที่ 1.23

จากนิยามของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ที่จุด (x_0, y_0) เราสามารถพิจารณาได้ว่า $f_x(x_0, y_0)$ คือ ความชันของเส้นโค้ง C_1 ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y = y_0$ และพื้นผิว $z = f(x, y)$ ณ ตำแหน่งที่ $x = x_0$ นั่นคือ $f_x(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ตามเส้นโค้ง C_1 และทำนองเดียวกัน $f_y(x_0, y_0)$ คือการพิจารณาความชันของเส้นโค้ง C_2 ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $x = x_0$ และพื้นผิว $z = f(x, y)$ ณ ตำแหน่งที่ $y = y_0$ นั่นคือ $f_y(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ตามเส้นโค้ง C_2 ดังแสดงในภาพที่ 1.24

กล่าวโดยสรุป คือ $f_x(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เมื่อเทียบกับ x ตามเส้นโค้ง C_1 ที่จุด (x_0, y_0) และ $f_y(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เมื่อเทียบกับ y ตามเส้นโค้ง C_2 ที่จุด (x_0, y_0) นั่นเอง



ภาพที่ 1.24. ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ที่จุด (x_0, y_0) (ภาพซ้าย) $f_x(x_0, y_0)$ (ภาพขวา) $f_y(x_0, y_0)$

จากความหมายในทางเรขาคณิตดังกล่าว ทำให้เราสามารถใช้สูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว มาช่วยในการหาอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ การหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ เราให้ตัวแปร y คงที่ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x และในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ย่อย $f_y(x, y)$ เราให้ตัวแปร x คงที่ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร y

ตัวอย่าง 1.4.2 กำหนด $f(x, y) = x^3y^5 + e^{xy} \sin(x + 2y)$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\partial f / \partial x$ และ $\partial f / \partial y$

วิธีทำ จากสูตรของการหาอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2y^5 + (e^{xy} \cos(x + 2y) + y \sin(x + 2y)e^{xy}) \\ f_y(x, y) &= 5x^3y^4 + (2e^{xy} \cos(x + 2y) + x \sin(x + 2y)e^{xy}) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.4.3 กำหนดพื้นผิว $f(x, y) = x^3y + 5y^3$ จงหาความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ในทิศทางของ x ที่จุด $(-1, 2)$

วิธีทำ ความหมายของการหาความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ในทิศทางของ x คือ การหา $f_x(x, y)$ ที่จุด $(-1, 2)$ นั่นคือ $f_x(x, y) = 3x^2y$ ดังนั้น $f_x(-1, 2) = 6$ กล่าวคือ z เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 6 หน่วย ต่อหนึ่งหน่วยการเพิ่มขึ้นของ x

ตัวอย่าง 1.4.4 ให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

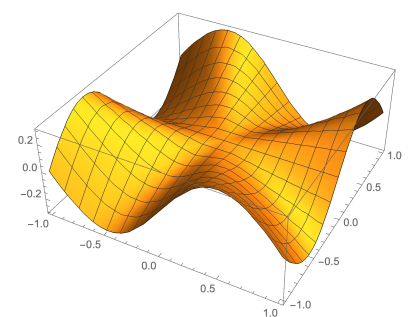
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_x(0, y)$, $f_y(x, 0)$

วิธีทำ จะเห็นว่า ในกรณีที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ f_y(x, y) &= x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \end{aligned}$$

ต่อไป เราจะพิจารณา $f_x(0, y)$ ในกรณีนี้จะเห็นว่า เราต้องแบ่งกรณีออกเป็น 2 กรณี



ภาพที่ 1.25. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.4.4

กรณีที่ $y \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = -y \end{aligned}$$

กรณีที่ $y = 0$ จะได้ว่า

$$f_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f_x(0, y) = \begin{cases} -y & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$f_y(x, 0) = \begin{cases} x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

1.4.2 อนุพันธ์ย่อยในมิติที่สูงขึ้น

ในกรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร เราสามารถวางนัยทั่วไปนิยามของอนุพันธ์ย่อยได้

ให้ f เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ เขียนแทนด้วย $f = f(x_1, \dots, x_n)$ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร x_k นิยามโดย

$$f_{x_k}(\mathbf{P}) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{P})}{\Delta x_k}$$

การหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้สูตร ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

ตัวอย่าง 1.4.5 กำหนด $f(x, y, z) = x^3y^4z^5 + 3xy + 4z$

จงหา $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$, $f_z(-1, 1, 0)$

วิธีทำ จากสูตรของการหาอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

$$f_x(x, y, z) = 3x^2y^4z^5 + 3y$$

$$f_y(x, y, z) = 4x^3y^3z^5 + 3x$$

$$f_z(x, y, z) = 5x^3y^4z^4 + 4$$

$$f_z(-1, 1, 0) = 5(-1)^3(1)^4(0)^4 + 4 = 4$$

1.4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องและอนุพันธ์ย่อย

ในแคลคูลัสในหนึ่งตัวแปร เรามีทฤษฎีบทที่คุ้นเคยที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการมีอนุพันธ์ และความต่อเนื่อง ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.1 ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$

คำถามหนึ่งที่น่าสนใจขึ้นในทำนองคล้ายกันกับกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียว คือ การมีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) สามารถรับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด (x_0, y_0) ได้หรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า คำตอบของคำถามนี้ไม่จริงเสมอไป

ตัวอย่างด้าน 1.4.6 ให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ หาค่าได้ แต่ $f(x, y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

พิสูจน์ ก่อนอื่น จะพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด $(0, 0)$ คือ

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

นั่นคือ อนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ หาค่าได้

ต่อไปจะแสดงว่า $f(x, y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ จะเห็นว่า $f(0, 0) = 0$ ต่อ

มาจึงพิจารณา $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ จะเห็นว่า สำหรับลิมิตทำซ้ำ

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right] = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right]$$

แต่สำหรับลิมิตตามเส้น เมื่อเลือกเส้น $y = x$ จะได้ว่า

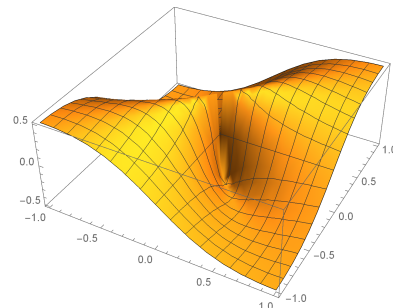
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ตามเส้น } y=x)}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ ลิมิต $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ จึงได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ $\square$

จากตัวอย่าง 1.4.6 จะเห็นว่า หาก $(x, y) \neq (0, 0)$ เราจะสามารถคำนวณอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ จะต้องใช้นิยามโดยตรง ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.4.6 ไม่สามารถคำนวณผ่านการหาอนุพันธ์ย่อยทั่ว ๆ ไปแล้วแทนค่าได้



ภาพที่ 1.26. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.5.5

ถึงแม้การมีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) ไม่ได้รับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด (x_0, y_0) แต่หากเพิ่มเติมเงื่อนไขบางประการ จะทำให้เรายืนยันความต่อเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยได้ เพื่อพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าว เราจะพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัธยฐานของฟังก์ชันสองตัวแปร โดยก่อนอื่น จะขอยกทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.2 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว)

ถ้าฟังก์ชัน f ที่นิยามบน $[a, b]$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว มีจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

จากทฤษฎีบท 1.4.2 หากเราพิจารณาให้ b เขียนแทนด้วย $a + h$ แล้ว จำนวนจริง c ที่อยู่ในช่วง (a, b) สามารถเขียนได้ในรูป $a + \theta h$ เมื่อ $0 < \theta < 1$ นั่นคือ

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

ต่อไป เราจะขยายแนวคิดทฤษฎีบทค่ามัธยฐานไปสู่ฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.7 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร)

ถ้า f_x หาค่าได้สำหรับจุดในย่านจุดเปิดจุด (a, b) และ $f_y(a, b)$ หาค่าได้แล้ว สำหรับทุกจุด $(a + h, b + k)$ ของย่านจุดเปิดจุด (a, b) จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ η เป็นฟังก์ชันของ k ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \rightarrow 0$

พิสูจน์ ก่อนอื่น พิจารณา

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] + [f(a, b + k) - f(a, b)]$$

เนื่องจาก f_x หาค่าได้ในย่านจุดเปิดจุด (a, b) โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = hf_x(a + \theta h, b + k) \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

และเนื่องจาก $f_y(a, b)$ หาค่าได้ นั่นคือ

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = f_y(a, b)$$

จึงได้ว่า

$$f(a, b + k) - f(a, b) = k[f_y(a, b) + \eta]$$

โดยที่ η เป็นฟังก์ชันของ k ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \rightarrow 0$ เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ η เป็นฟังก์ชันของ k ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \rightarrow 0$ ตามต้องการ $\square$

เมื่อเราเพิ่มเงื่อนไขให้อนุพันธ์ย่อยมีขอบเขต (bounded) ในย่านจุดเปิดจุด (a, b) ก็จะสามารถรับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าหนึ่งในบรรดาอนุพันธ์ย่อยของ f หาค่าได้ และมีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด (a, b) และอนุพันธ์ย่อยที่เหลือหาค่าได้ที่จุด (a, b) แล้ว f มีความต่อเนื่องที่จุด (a, b)

พิสูจน์ โดยไม่เสียไร้อะไรไป สมมติให้ f_x หาค่าได้และมีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด (a, b) และให้ $f_y(a, b)$ หาค่าได้ แล้วสำหรับทุกจุด $(a + h, b + k)$ ในย่านจุดเปิดจุด (a, b) โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ $\eta \rightarrow 0$ เมื่อ $k \rightarrow 0$

เราทำการผ่านลิมิตให้ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ เนื่องจาก $f_x(a + \theta h, b + k)$ มีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด (a, b) จึงได้ว่า

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a + h, b + k) = f(a, b)$$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่จุด (a, b) ตามต้องการ □

ดังนั้น สำหรับบริเวณปิด เราจึงสรุปได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1.4.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามในบริเวณปิด ถ้าอนุพันธ์ย่อยของ f ทั้งสองหาค่าได้ และมีขอบเขตในบริเวณปิดดังกล่าวแล้ว f มีความต่อเนื่องในบริเวณปิดดังกล่าว

ในหัวข้อต่อไป เราจะพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปร รวมถึงความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องระหว่างอนุพันธ์ย่อย การหาอนุพันธ์ได้ และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. กำหนดฟังก์ชัน f ต่อไปนี้ จงหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$

(a) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

(b) $f(x, y) = y^{-3/2} \arctan(x/y)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{3x^4y - 7x^3y}$

2. จงหาความชันที่จุด $(-1, 1, 5)$ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพื้นผิว $z = x^2 + 4y^2$ และ

(a) ระนาบ $x = -1$

(b) ระนาบ $y = 1$

3. จุดหนึ่งเคลื่อนที่อยู่บนเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพาราโบลอยด์เชิงวงรี $z = x^2 + 3y^2$ กับระนาบ $x = 2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เมื่อเทียบกับ y เมื่อจุดนั้นอยู่ที่ตำแหน่ง $(3, 1, 12)$

4. จงหา $\partial w / \partial w_i$ สำหรับ $i = 1, \dots, n$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $w = \cos(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)$

(b) $w = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}$

5. กำหนดให้ $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$ จงแสดงว่า

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. จงหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. สำหรับฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

จงแสดงว่า ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ (แบบฝึกหัดที่ 1.3 ข้อ 1.c) แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ สามารถหาค่าได้ทุกจุดรวมถึงจุด $(0, 0)$

8. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \tan\left(\frac{y}{x}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $xf_x + yf_y = 2f$ 9. จงหา $f_x, f_y, f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$$

10. กำหนด $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ จงหา $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$

1.5 การหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

สืบเนื่องจากปัญหาที่เกิดขึ้นในหัวข้อที่ 1.4 เราพบว่า ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ ณ จุด (x_0, y_0) อาจไม่มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) ดังตัวอย่าง 1.4.6

สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว f จะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่จุด x_0 ถ้าลิมิต

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

หาค่าได้ ดังนั้น ผลที่ตามมาจากการที่ f หาอนุพันธ์ได้ ประกอบด้วย

(1D): 1 กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีเส้นสัมผัสที่ไม่ใช่เส้นสัมผัสแนวตั้งที่จุด $(x_0, f(x_0))$

(1D): 2 f สามารถประมาณได้โดยการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation) ณ จุดที่ใกล้ ๆ x_0 (ดังภาพที่ 1.27)

(1D): 3 f มีความต่อเนื่องที่ x_0 (โดยทฤษฎีบท 1.4.1)

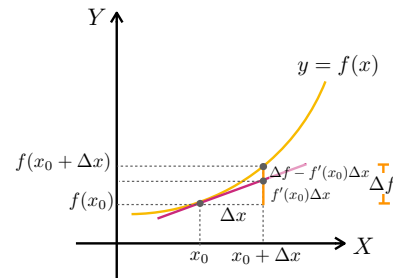
ดังนั้น เราจึงต้องการที่จะขยายผลดังกล่าวไปสู่กรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร เพื่อให้ได้ผลที่เป็นไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ

(nD): 1 พื้นผิวของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ มีระนาบสัมผัสที่ไม่ใช่ระนาบสัมผัสแนวตั้งที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

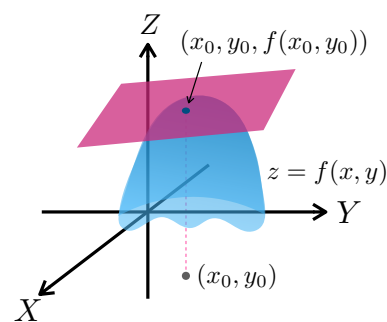
(nD): 2 ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดที่ใกล้ ๆ (x_0, y_0) สามารถประมาณได้ด้วยค่าที่คำนวณจากค่าของฟังก์ชันเชิงเส้น

(nD): 3 f มีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0)

ก่อนอื่น เราจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรก่อน



ภาพที่ 1.27. การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ใกล้จุด x_0 สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว



ภาพที่ 1.28. ระนาบสัมผัสที่ไม่ใช่ระนาบแนวตั้งที่จุด (x_0, y_0)

1.5.1 การหาอนุพันธ์ได้

ในแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราศึกษาส่วนเปลี่ยนแปลง (increment) ของตัวแปรตาม Δf เมื่อตัวแปร x มีการเปลี่ยนแปลงจาก x_0 ไป Δx เป็น $x_0 + \Delta x$ โดย

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ซึ่งในการศึกษาเกี่ยวกับดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราทราบว่า เมื่อ Δx มีค่าใกล้ ๆ 0 จะสามารถประมาณ

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

ดังนั้น เมื่อค่า Δx เข้าใกล้ 0 ความคลาดเคลื่อน $\Delta f - f'(x_0)\Delta x$ ควรมีขนาดที่น้อยกว่า Δx ทั้งนี้ เพราะ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

จะเห็นว่า Δx คือระยะระหว่างจุด x_0 และ $x_0 + \Delta x$ ดังนั้น หากให้ระยะระหว่างจุดสองจุดเข้าใกล้กันมาก ๆ การประมาณค่าของจุดก็ควรจะมีขนาดที่น้อยลงเรื่อย ๆ ดังภาพ 1.27 ด้วยแนวคิดเช่นนี้ เราจึงขยายไปสู่แนวคิดของฟังก์ชันสองตัวแปรได้ ดังนี้

ให้ Δf แทน ส่วนเปลี่ยนแปลง (increment) ของ f ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) เปลี่ยนแปลงจากจุด (x_0, y_0) ไปสู่จุดใหม่ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ กล่าวคือ

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

เราจะนิยามการหาอนุพันธ์ได้ ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร โดยที่ (x, y) และ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชัน f ฟังก์ชัน f จะหาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่จุด (x, y) ถ้าการเปลี่ยนแปลง Δf สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y \quad (1.5.1)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าที่เป็นอิสระจาก $\Delta x, \Delta y$ และ ϕ, ψ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ โดยที่ $\phi \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$ เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ และ $\Delta y \rightarrow 0$

จากสมการ (1.5.1) จะเห็นว่า ถ้า $\Delta y = 0$ จะได้ว่า

$$\Delta f = A\Delta x + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x \quad (1.5.2)$$

ดังนั้น หากหารสมการ (1.5.2) ด้วย Δx แล้วให้ $\Delta x \rightarrow 0$ จะทำให้ได้ว่า $A = \frac{\partial f}{\partial x}$

และในทำนองเดียวกัน จากสมการ (1.5.1) ถ้าให้ $\Delta x = 0$ แล้วนำ Δy ไปหารทั้งสมการ จะทำให้ได้ว่า $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ ดังนั้น เราจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว อนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าได้

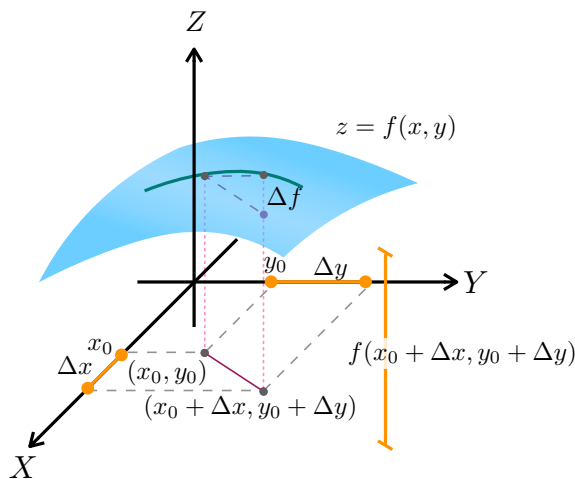
จากทฤษฎีบท 1.5.1 เราจึงสามารถพิจารณานิยามของการหาอนุพันธ์ได้ในรูปของอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ

ฟังก์ชัน f จะหาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้าการเปลี่ยนแปลง Δf สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

โดยที่ ϕ, ψ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ โดยที่ $\phi \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$ เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ และ $\Delta y \rightarrow 0$

ภาพที่ 1.29 แสดงให้เห็นถึงการพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด (x_0, y_0)



ภาพที่ 1.29. ส่วนเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 1.5.2 จงแสดงว่า $f(x, y) = x^2 + 3xy$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$

พิสูจน์ ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$ ก่อนอื่นจะพิจารณาสองส่วนเปลี่ยนแปลงของ f เมื่อ (x, y) มีการเปลี่ยนแปลงจาก (x_0, y_0) ไปเป็น $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)] - [x_0^2 + 3x_0y_0] \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0y_0 + 3x_0\Delta y + 3y_0\Delta x + \Delta x\Delta y - x_0^2 - 3x_0y_0 \\ &= 2x_0\Delta x + 3x_0\Delta y + 3y_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

จะเห็นว่า $f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + 3y_0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 3x_0$ ดังนั้น จากสมการ (1.5.3) จะสามารถจัดรูปได้ว่า

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \Delta x\Delta x + \Delta x\Delta y$$

เลือก $\phi(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$ และ $\psi(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$ ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy จะเห็นว่า $\phi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ และ $\psi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

ดังนั้น f จึงหาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$

□

หมายเหตุ การเลือก $\phi(\Delta x, \Delta y)$ หรือ $\psi(\Delta x, \Delta y)$ ไม่จำเป็นต้องเลือกได้เพียงอย่างเดียว หากสามารถแสดงได้ว่า มี $\phi(\Delta x, \Delta y)$ หรือ $\psi(\Delta x, \Delta y)$ ซึ่ง $\phi \rightarrow 0$ หรือ $\psi \rightarrow 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ก็เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

โดยอาศัยแนวคิดที่กล่าวมาในข้างต้น เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 1.29 ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ แล้ว เราจะสามารถประมาณค่าส่วนเปลี่ยนแปลงได้จาก

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

และเมื่อ $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ เราคาดหวังให้ความคลาดเคลื่อน $\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y$ น้อยกว่าระยะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ซึ่งเป็นระยะระหว่างจุด (x_0, y_0) กับจุด $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ โดยต้องการให้ได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

ดังนั้น นิยามของการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) สามารถพิจารณาได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

บทนิยาม 1.5.2 ฟังก์ชันสองตัวแปร f จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) เมื่ออนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

ต่อไป เราตอบคำถามสิ่งที่เราคาดหวังตั้งแต่ต้น คือ การพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์ได้และความต่อเนื่อง ซึ่งโดยสรุปแล้ว คำตอบของคำถามนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีฟังก์ชันสองตัวแปร ดังทฤษฎีบทนี้

ทฤษฎีบท 1.5.3 ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว f จะต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

พิสูจน์ สมมติให้ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) เราจะแสดงว่า

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ให้ $x = x_0 + \Delta x$ และ $y = y_0 + \Delta y$ นั่นคือ เราจะแสดงให้ได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

พิจารณาสวนเปลี่ยนแปลงของ f เราทราบว่า

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

จาก f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) จะได้ว่า Δf สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y \quad (1.5.4)$$

เมื่อให้ $\Delta x \rightarrow 0$ และ $\Delta y \rightarrow 0$ ทำให้ได้ว่า ด้านขวามือของสมการ (1.5.4) เข้าใกล้ 0 นั่นคือ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f = 0$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) ตามต้องการ $\square$

เช่นเดียวกันกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันตัวแปรเดียว บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างด้านล่างต่อไป

ตัวอย่างด้าน 1.5.4 ฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1+y)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ แต่หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$

พิสูจน์ การแสดงความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1+y)$ ได้ทิ้งไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด ในแบบฝึกหัดที่ 1.3 ข้อที่ 4 แล้ว

เราจะแสดงว่า f หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$ โดยจะใช้ข้อความแย้งกลับที่ (contrapositive) ของทฤษฎีบท 1.5.1 นั่นคือ

สำหรับฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าอนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ หรือ $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าไม่ได้แล้ว f ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

พิจารณาอนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|(1+0) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \end{aligned}$$

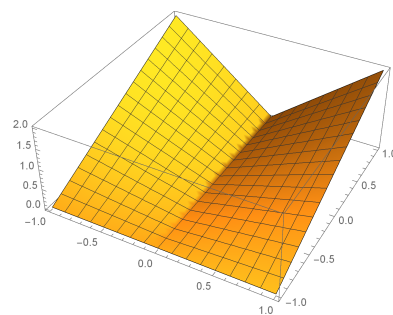
$$\text{ซึ่งจะเห็นว่า } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\text{และ } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ หาค่าไม่ได้ นั่นคืออนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f จึงหาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0, 0)$ $\square$

คำถามต่อไปที่น่าสนใจ คือ หาก f มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) แล้ว เราจะสามารถรับประกันการหาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) หรือไม่ ตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า



ภาพที่ 1.30. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.5.4

บทกลับของทฤษฎีบท 1.5.1 ไม่จริง นั่นคือ การมีอนุพันธ์ย่อยทั้งสองที่จุด (x_0, y_0) ไม่ได้รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่างค้าน 1.5.5 (ตัวอย่างเดียวกันกับตัวอย่าง 1.4.6) ให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$

พิสูจน์ ในตัวอย่าง 1.4.6 เราได้แสดงให้เห็นว่า $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ หาค่าได้ แต่ f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0, 0)$

โดยข้อความแย้งกลับของทฤษฎีบท 1.5.3 กล่าวคือ

ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้ว f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ทำให้ได้ว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ □

คำถามที่ตามมาหลังจากพิจารณาตัวอย่างค้าน 1.5.5 คือ เราจะสามารถเพิ่มเงื่อนไขใดได้หรือไม่ ที่จะทำให้การมีอนุพันธ์ย่อย รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยยืนยันการหาอนุพันธ์ได้จากการมีอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y มีความต่อเนื่องในบริเวณเปิด D แล้ว f จะหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในบริเวณ D

พิสูจน์ ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดในบริเวณเปิด D จะได้ว่า มีย่านจุดเปิด N ของจุด (x_0, y_0) ซึ่ง $N \subseteq D$ ดังนั้น สำหรับตัวแปร Δx และ Δy ที่เล็กเพียงพอที่ทำให้จุด $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ อยู่ในย่านจุดเปิด N จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียวในแต่ละพจน์ด้านขวามือ จะได้ว่า

$$\Delta f = \Delta x f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) + \Delta y f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)$$

เมื่อ $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$

เนื่องจาก f_x และ f_y ต่อเนื่องที่จุด (x, y) ในบริเวณ D ดังนั้น เมื่อให้ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ จะได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x_0, y_0)$$

และ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x_0, y_0)$$

เราจึงเลือก

$$\phi = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$

และ

$$\psi = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0)$$

ซึ่ง $\phi \rightarrow 0$ และ $\psi \rightarrow 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ดังนั้น

$$\Delta f = (f_x(x_0, y_0) + \phi)\Delta x + (f_y(x_0, y_0) + \psi)\Delta y$$

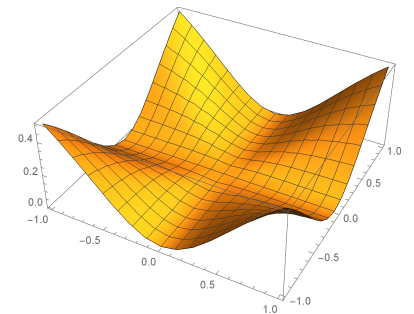
นั่นคือ เราสามารถเขียน Δf ได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y$$

โดยที่ $\phi \rightarrow 0$ และ $\psi \rightarrow 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

เพราะฉะนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) ตามต้องการ

□



ภาพที่ 1.31. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.5.7

ตัวอย่าง 1.5.7 จงแสดงว่า ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$

พิสูจน์ ก่อนอื่น เราจะหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ ของ f ซึ่งจะเห็นว่า กรณีที่ $(x, y) = (0, 0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

กรณีที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ จะได้ว่า

$$f_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(2xy^2) - (x^2 y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ต่อไป จะแสดงว่า $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(0, 0)$ โดยเราจะแสดงเฉพาะกรณี $f_x(x, y)$ เท่านั้น (กรณี $f_y(x, y)$ ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)

จะเห็นว่า $f_x(0, 0) = 0$ ต่อไปเราจึงจะแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 0$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/2 > 0$ ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ และ

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

และ $y^4 \leq (x^2 + y^2)^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f_x(x, y) - 0| &= \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\ &= \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 2|x| \\ &< 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 0 = f_x(0, 0)$

ได้ว่า $f_x(x, y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(0, 0)$ ในทำนองเดียวกันกับ $f_y(x, y)$

โดยทฤษฎีบท 1.5.6 จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ $(0, 0)$ □

จากทฤษฎีบท 1.5.6 จะเห็นว่า ความต่อเนื่องที่รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ คือ ความต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อย อย่างไรก็ตาม หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด (x_0, y_0) อาจจะไม่รับประกันการหาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่างค้าน 1.5.8 ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

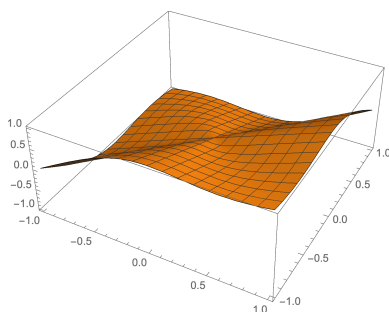
เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ โดยใช้นิยาม (ซึ่งจะให้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)

และทำนองเดียวกัน หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) อนุพันธ์ย่อยก็ไม่จำเป็นที่จะต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) เช่นกัน ดังตัวอย่างฟังก์ชันต่อไปนี้

ตัวอย่างค้าน 1.5.9 ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ (ซึ่งจะให้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัดเช่นกัน)



ภาพที่ 1.32. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.5.8

จะเห็นว่าเงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชันในทฤษฎีบท 1.5.6 อาจแรงเกินไปที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น หากเราลดเงื่อนไขของความต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันจากเดิมที่อนุพันธ์ย่อยทั้งสองมีความต่อเนื่อง เป็น อนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งมีความต่อเนื่อง ก็ยังคงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันนั้นหาอนุพันธ์ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.10 ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชันสองตัวแปร f ซึ่ง f_x มีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) และ f_y หาค่าได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

พิสูจน์ สมมติให้ข้อสมมติฐานของทฤษฎีบทเป็นจริง กล่าวคือ สมมติว่า f_x มีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) และ f_y หาค่าได้ที่จุด (x_0, y_0)

จากการที่ f_x มีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) จะได้ว่า f_x หาค่าได้ในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A}; \delta)$ เมื่อ $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$

ให้ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ เป็นจุดในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A}; \delta)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

เนื่องจาก f_x หาค่าได้ในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A}; \delta)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จะได้ว่า

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \Delta x f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า Δx และ Δy
เนื่องจาก f_x ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) ดังนั้น

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0)$$

ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า

$$f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \phi(\Delta x, \Delta y)$$

โดยที่ $\phi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าได้ จึงได้ว่า

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

นั่นคือ เราสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0) + \psi(\Delta y)$$

โดยที่ $\psi(\Delta y) \rightarrow 0$ เมื่อ $\Delta y \rightarrow 0$

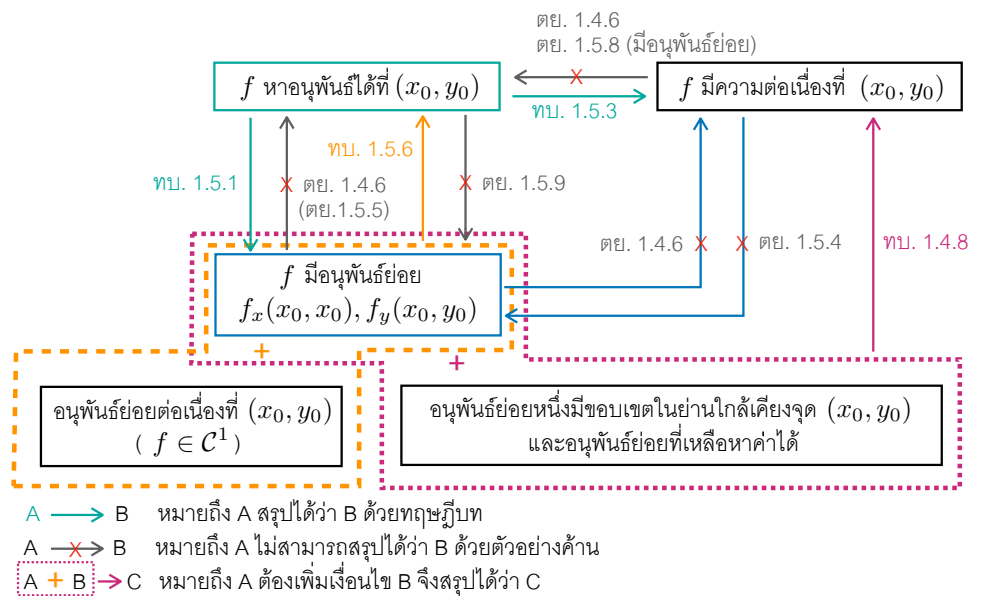
ดังนั้น เราจึงได้ว่า Δf สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta y)\Delta y$$

โดยที่ $\phi \rightarrow 0$ และ $\psi \rightarrow 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ นั่นคือ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) ตามต้องการ $\square$

ในทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง จะเป็นฟังก์ชันในชั้น C^1 (continuously differentiable) ซึ่งจากตัวอย่างและทฤษฎีบทที่ผ่าน ๆ มา จะเห็นว่าการที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง มีผลสำคัญสำหรับการหาอนุพันธ์ได้

จากทฤษฎีบท และตัวอย่างค้ำที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปเป็นแผนผังของทฤษฎีบทได้ดังนี้



ภาพที่ 1.33. การสรุปตามทฤษฎีบทและตัวอย่างค้ำเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้

หากพิจารณาในกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะพบว่า ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ ซึ่งหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $x = 0$ มีจุดที่กราฟหักงอที่ $x = 0$ ในทำนองคล้ายกัน หากสังเกตลักษณะของพื้นผิวในตัวอย่างที่ผ่าน ๆ มา จะพบว่า ฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ มักมีพื้นผิวมีลักษณะไม่เรียบ เช่น มีการพับงอ ดังตัวอย่าง 1.5.4 หรือหากพิจารณาพื้นผิว และทำการวาดระนาบตัดกับพื้นผิวแล้ว พบว่ารอยตัดเป็นเส้นโค้งที่มีการหักงอ ดังตัวอย่าง 1.5.8

1.5.2 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

ในทฤษฎีบท 1.5.6 จะเห็นว่า ถ้าพื้นผิวของฟังก์ชัน f เรียบมากพอ (กล่าวคือ f_x และ f_y มีความต่อเนื่อง) จะทำให้เราสามารถหาระนาบที่สัมผัสพื้นผิวได้

สมมติให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) จะทำการสร้างฟังก์ชัน

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

เป็นฟังก์ชันใหม่ที่มีตัวแปรตามคือ ผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) dz และตัวแปรต้นคือ dx และ dy ฟังก์ชันดังกล่าวนี้เรียกว่า **ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม** (total differential) ของ z ที่ (x_0, y_0)

ต่อไป เราจะพิจารณาส่วนการประมาณค่าส่วนเปลี่ยนแปลง ผ่านการพิจารณานิยามของการหาอนุพันธ์ได้ พิจารณา

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y \quad (1.5.5)$$

จะเห็นว่า เมื่อให้ $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ เราจะพิจารณาส่วนสำคัญ (principle part) ของนิยามการหาอนุพันธ์ได้ใน 1.5.5 โดยพิจารณาว่า

$$dz = df(x, y, \Delta x, \Delta y) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (1.5.6)$$

ถ้าสมมติให้ $z = f(x, y) = x$ จะทำให้ได้ว่า $f_x(x, y) = 1$ และ $f_y(x, y) = 0$ นั่นคือ $dx = \Delta x$

และทำนองเดียวกัน ถ้าสมมติให้ $z = f(x, y) = y$ จะทำให้ได้ว่า $f_x(x, y) = 0$ และ $f_y(x, y) = 1$ นั่นคือ $dy = \Delta y$

นั่นคือ ส่วนเปลี่ยนแปลง Δf สามารถประมาณได้โดย

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (1.5.7)$$

จากการตัดพจน์เล็ก ๆ อีกสองเทอมออกไป เมื่อสมมติให้ $\Delta x, \Delta y$ มีค่าน้อยๆ ซึ่งหากเราพิจารณาว่า Δf เล็กมาก ๆ เราสามารถเขียนได้ว่า $\Delta f \approx df$

ดังนั้น การประมาณ Δf ที่สามารถทำได้โดยการประมาณด้วยส่วนเปลี่ยนแปลงของ Δx และ Δy สามารถประมาณค่าได้จากส่วนเปลี่ยนแปลง dx, dy นั่นคือ

$$\Delta f \approx df = dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

โดยความหมายคือ เราสามารถประมาณการเปลี่ยนแปลง Δz ได้โดยค่าผลต่างเชิงอนุพันธ์ dz โดยที่ dx คือการเปลี่ยนแปลงของ x และ dy คือการเปลี่ยนแปลงของ y และจะเห็นว่า หาก $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ แล้ว ความคลาดเคลื่อน $\Delta z \approx dz$ ก็จะน้อยกว่าระยะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ระหว่างจุด (x_0, y_0) และ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

ตัวอย่าง 1.5.11 กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x, y) = xy^3$ จงประมาณการเปลี่ยนแปลงของ z จากจุด $(0.5, 1.0)$ ไปยัง $(0.501, 1.002)$

วิธีทำ การเปลี่ยนแปลง z คือการหา dz ซึ่ง $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$ กล่าวคือ

$$dz = y^3 dx + 3xy^2 dy$$

เราทราบว่า $dx = \Delta x = 0.501 - 0.5 = 0.001$ และ $dy = \Delta y = 1.002 - 1.0 = 0.002$ ดังนั้น dz ที่จุด $(0.5, 1.0)$ สามารถประมาณค่าได้จาก

$$dz = (1.0)^3(0.001) + 3(0.5)(1)^2(0.002) = 0.001 + 0.003 = 0.004$$

หากคำนวณค่าของฟังก์ชันนี้โดยตรง จะได้ $f(0.501, 1.002) = 0.504012$ ซึ่ง

$$\Delta z = f(0.501, 1.002) - f(0.5, 1.0) \approx 0.504012 - 0.5 = 0.004012$$

ซึ่งใกล้เคียงกับ dz ที่ทำการประมาณด้วยผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

ตัวอย่าง 1.5.12 สมการของแก๊สในอุดมคติ สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความดัน P , อุณหภูมิ T และ ปริมาตร V เมื่อมวล คงที่ได้โดยสมการ $P = P(V, T) = kT/V$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ สมมติว่าการทดลองเพื่อหาความดันของแก๊สที่บรรจุในภาชนะปิด นักเคมีวัดปริมาตรได้สองหน่วย และอุณหภูมิ 10 หน่วย ในการวัดปริมาตรและอุณหภูมิ มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 หน่วย จงประมาณขอบเขตความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณความดัน ในเทอมของค่าคงที่ k

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ เราต้องการหา dP จากความสัมพันธ์

$$dP = P_V(2, 10)dV + P_T(2, 10)dT$$

ซึ่งเราพบว่า ความคลาดเคลื่อน $dV = \pm 0.01$, $dT = \pm 0.01$ เราจะเห็นว่า

$$dP = (-kT/V^2)dV + (k/V)dT = k(-2.5dV + 0.5dT)$$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของความดัน หาได้จาก

$$|dP| = |k(-2.5dV + 0.5dT)| \leq k(2.5|dV| + 0.5|dT|) = 0.03k$$

ตามต้องการ

1.5.3 การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่

สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว หาก f หาอนุพันธ์ได้แล้ว ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = x_0$ ถ้าเราเลือกจุดที่ใกล้เคียง $x = x_0$ เราจะสามารถประมาณค่าของฟังก์ชัน f ได้ด้วยจุดที่อยู่บนเส้นตรง $L(x)$ ที่สัมผัสกราฟ f ที่ $x = x_0$ นั่นคือทำการประมาณด้วย

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร จาก (1.5.7) เราพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลง Δf ซึ่ง

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ถ้าให้ $x = x_0 + \Delta x$ และ $y = y_0 + \Delta y$ จะได้ว่า เราทำการประมาณ f ด้วย $L(x, y)$ ที่จุด (x_0, y_0) เรียกว่า การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation)

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ซึ่งในการเขียนลักษณะนี้สื่อความหมายได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว $L(x, y)$ คือระนาบสัมผัสพื้นผิว f ที่ไม่เป็นระนาบแนวตั้ง ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

ตัวอย่าง 1.5.13 ให้ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ จง ทำการ ประมาณ ค่า ของ $f(5.01, 12.02)$ โดยใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ที่จุด $(5, 12)$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

จะเห็นว่า

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, f_y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

โดยที่ $f_x(5, 12) = 5/13$, $f_y(5, 12) = 12/13$ ดังนั้น การประมาณเชิงเส้น $L(x, y)$ หาได้จาก

$$L(x, y) = 13 + \frac{5}{13}(x - 5) + \frac{12}{13}(y - 12)$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด $(5.01, 12.02)$ จะประมาณได้ว่า

$$L(5.01, 12.02) = 13 + \frac{5}{13}(5.01 - 5) + \frac{12}{13}(12.02 - 12) = 13.0226$$

ซึ่งค่าจากการคำนวณโดยตรงคือ

$$f(5.01, 12.02) = \sqrt{(5.01)^2 + (12.02)^2} = 13.0223$$

ซึ่งมีขอบเขตความคลาดเคลื่อนไม่เกิน $|f(5.01, 12.02) - L(5.01, 12.02)| = 0.0003$

เราสามารถขยายแนวคิดการหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมไปสู่กรณีที่ฟังก์ชันมีมากกว่าสองแปรได้

สมมติให้ $\mathbf{P} = (x_1, \dots, x_n)$ และ $w = f(x_1, \dots, x_n)$ จะนิยามส่วนเปลี่ยนแปลง

$$\Delta f(\mathbf{P}) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

โดย f จะหาอนุพันธ์ได้ ถ้าสามารถเขียน $\Delta f(\mathbf{P})$ ในรูป

$$\Delta f(\mathbf{P}) = f_{x_1}(\mathbf{P})\Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{P})\Delta x_n + \phi_1\Delta x_1 + \dots + \phi_n\Delta x_n$$

โดยที่ $\phi_1, \dots, \phi_n \rightarrow 0$ เมื่อ $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ โดยที่ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม df เขียนได้โดย

$$df = f_{x_1}(\mathbf{P})dx_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{P})dx_n$$

แบบฝึกหัดที่ 1.5

- กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x, y) = 2x^2y - 4y$
 - จงหาส่วนเปลี่ยนแปลง Δf
 - จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(4, 3)$
 - จงหา dz เมื่อ $x = 4, y = 3, \Delta x = -0.01, \Delta y = 0.02$
- จงใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ได้ แสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้ ณ จุดที่กำหนดให้

- $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cx^2$ ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ที่จุด $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

- จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^\alpha} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- เมื่อ $\alpha = 1$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$
- เมื่อ $\alpha < 3/2$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$

- จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y z}{x^2 + y^2 + z^2} & , (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0, 0)$

- จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x, y) = |x| + |y|$ ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$
- ในตัวอย่างที่ 1.3.8 เราได้แสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ จงแสดงว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $(0, 0)$

- จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

มีอนุพันธ์ย่อยที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

(คำใบ้: ใช้ทฤษฎีบท 1.5.3 และทฤษฎีบท 1.5.10 ช่วยในการพิจารณา)

8. สมมติให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) และ $z_0 = f(x_0, y_0)$ จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0, z_0)

9. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่
(b) สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

10. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

11. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ โดยใช้นิยามการหาอนุพันธ์ได้

12. ในแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 10 ผู้อ่านได้แสดงว่า เมื่อกำหนด $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ แล้ว $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ หาค่าได้
จงแสดงว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$

13. จงหาผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

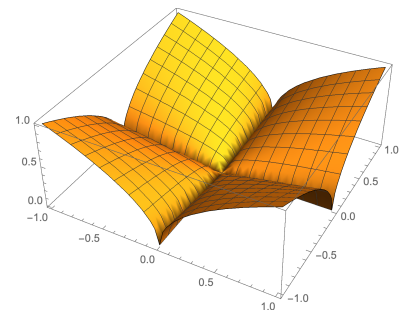
- (a) $f(x, y) = \frac{x^2}{6}$
(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

14. จงประมาณค่า $f(x, y) = \ln(xy)$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยเลือกจุดที่เหมาะสมในการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่

15. จงใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ แสดงว่า $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ ที่จุด $(1, 1)$ สามารถประมาณได้โดย

$$x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x - 1) + \beta(y - 1)$$

16. กรวยกลมอันหนึ่ง เมื่อทำการวัดรัศมีและความสูง พบว่า มีความคลาดเคลื่อนจากการวัดอย่างมาก 2% และ 4% ตามลำดับ จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของปริมาตรที่ได้จากการคำนวณ



ภาพที่ 1.34. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

17. คาบ T ของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมเมื่อมีการสั่นน้อยมาก คำนวณได้จาก $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ เมื่อ L คือความยาวของเพนดูลัม g คือค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง สมมติว่าในการวัดค่า L และ g พบว่า มีความคลาดเคลื่อนอย่างมาก 0.5% และ 0.1% ตามลำดับ จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของคาบที่ได้จากการคำนวณ
18. กล้องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่ง วัดความกว้าง ยาว และสูงได้ความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 5% จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของพื้นที่ผิวของกล่องที่ได้จากการคำนวณ

1.6 ฟังก์ชันเอกพันธ์

ในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน เรามักให้ความสนใจกับปัญหาการเป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาที่เป็นพื้นฐานในพีชคณิตเชิงเส้น กล่าวคือ สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ฟังก์ชัน $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ จะเป็นการส่งเชิงเส้น (linear map) f ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไข $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ สำหรับทุก $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ และ $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ ทุก $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ และค่าคงตัว c

เราจะพิจารณาพฤติกรรมอื่น ๆ นอกจากการเป็นเชิงเส้น สมมติว่าสำหรับแต่ละส่วนประกอบ x_i ของ $\mathbf{x}$ มีตัวแปรเสริม λ คุณอยู่ ซึ่งมีความหมายคือ แต่ละส่วนประกอบถูกย่อหรือขยายด้วยตัวคูณ (factor) ซึ่งสมมติว่าเป็นตัวแปรเสริม λ เราจึงต้องการพิจารณาพฤติกรรมของการย่อขยาย (scaling) ของฟังก์ชันที่ตัวแปรต้นถูกย่อขยายด้วย กล่าวคือ หากแต่ละตัวแปร x_i ถูกคูณด้วยตัวแปรเสริมแล้ว ค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเป็นกำลังบางค่าของตัวแปรเสริมตัวนั้น เราจะนิยามพฤติกรรมดังกล่าว ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.6.1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร ซึ่ง $f = f(x_1, \dots, x_n)$ จะเรียกว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น m (homogeneous function of degree m) ถ้า

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \dots, x_n)$$

สำหรับตัวแปรเสริม $\lambda \in \mathbb{R}$ และ m เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 1.6.1 พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2 เนื่องจากสำหรับตัวแปรเสริม λ

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 - 2(\lambda z)^2 \\ &= \lambda^2(x^2 - y^2 - 2z^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

2. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} \cos^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 1

3. $f(x, y) = \frac{2x^2}{y^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 0

4. $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z}{x^2 + 2y^2}}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น $-1/2$

ตัวอย่าง 1.6.2 ในทางเศรษฐศาสตร์ ฟังก์ชัน Cobb-Douglas นิยามโดยค่าเฉลี่ยเรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก ซึ่งมีโดเมนเป็น $\mathbb{R}_+^n$ เมื่อ $\mathbb{R}_+$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก คือ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

เมื่อ $\alpha_i > 0$ สำหรับทุก i จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีระดับชั้น $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$

ในบางบริบท เราต้องการหาผลคูณระหว่างตัวแปรและอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเมื่อเทียบกับตัวแปรนั้น เมื่อฟังก์ชันบางฟังก์ชันมีความซับซ้อน จะเห็นว่า การหาอนุพันธ์ย่อยโดยตรงอาจทำได้ไม่มากนัก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จึงจะช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าดังกล่าวได้ง่ายขึ้น หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น m

ทฤษฎีบท 1.6.3 (ทฤษฎีบททอยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธ์)

ถ้า $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น m ที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ $x_1, \dots, x_n$ หาค่าได้แล้ว

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, \dots, x_n)$$

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น m ดังนั้น สำหรับตัวแปรเสริม λ

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.6.1)$$

สมมติให้ $y_i = \lambda x_i$ สำหรับทุก $i = 1, \dots, n$ นั่นคือ

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda^m f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.6.2)$$

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ λ ทั้งสมการ (1.6.2) โดยอาศัยกฎลูกโซ่ของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial \lambda} = m \lambda^{m-1} f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.6.3)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = x_i$ และ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_i}$ สำหรับทุก i ได้ว่า $\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_i}$

เพราะฉะนั้น จากสมการ (1.6.3) จึงได้ว่า

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m \lambda^m f(x_1, \dots, x_n)$$

ให้ $\lambda = 1$ จึงได้ว่า

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, \dots, x_n)$$

ตามต้องการ



ตัวอย่าง 1.6.4 ให้ $f(x, y) = x^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ นอกจากนี้ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์

วิธีทำ ให้ λ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) \\ &= \lambda^2 x^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x^2}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= x \left[-\frac{x^2}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right] + y \left[\frac{x^3}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right] \\ &= 2x^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2f(x, y) \end{aligned}$$

นั่นคือ f สอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธ์

แบบฝึกหัดที่ 1.6

- กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ และแสดงว่า f สอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธ์

(a) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} \cos^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

(b) $f(x, y, z) = x^2 y + x y^2 - 2 x y z$

(c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{y}$

- ให้ $p(x, y)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรที่แต่ละพจน์มีดีกรีรวมเท่ากับ n จงแสดงว่า ฟังก์ชันพหุนามดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ พร้อมทั้งหาระดับชั้นด้วย
- ให้ $f(x, y) = x_1 + x_2^2$ โดยที่ $x_1, x_2 \geq 0$ จงแสดงว่า ไม่มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k f(x_1, x_2)$ สำหรับจำนวนจริง λ ใด ๆ
(คำใบ้ : พิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง)
- กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงแสดงว่า f เป็นไม่ฟังก์ชันเอกพันธ์ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

(a) $f(x, y, z) = x^3 + x^2y^2 - 2xyz^2$

(b) $f(x, y) = e^{x^2/(3y^2+x^2)}$

(c) $f(x, y) = \ln(xy)$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.6.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น k แล้ว อนุพันธ์ย่อย f_{x_i} เมื่อ $i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น $k - 1$

6. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น m และ $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น n จงแสดงว่า

(a) $f(x, y)g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น $m + n$

(b) $f(x, y)/g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น $m - n$

7. กำหนดฟังก์ชัน $f(x, y) = x^4y^3 \sin^{-1}(y^2/x^2)$ จงแสดงว่า

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 7f(x, y)$$

8. ให้ $w = \left(\frac{x - y + z}{x + y + z} \right)^n$ จงแสดงว่า

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

1.7 อนุพันธ์ระดับทิศทาง

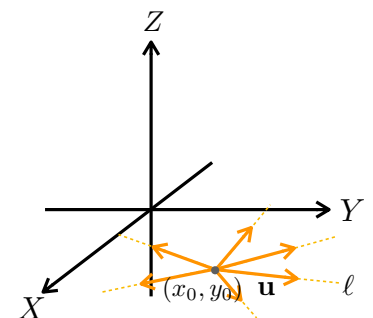
ในเรื่องอนุพันธ์ย่อย เราได้ทำการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันภายใต้ตัวแปรต้นตัวหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ตัวแปรต้นตัวอื่น ๆ คงที่ ในการศึกษาอนุพันธ์ย่อยดังกล่าว สำหรับกรณีฟังก์ชันสองตัวแปร เรากำหนดทิศทางมาตรฐาน คือทิศทางที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y

หากเราต้องการศึกษาอนุพันธ์ตามทิศทางที่ต้องการ เราจะต้องกำหนดทิศทางขึ้นมา ก่อน ซึ่งเราสามารถใช้อยู่หน่วยหนึ่งในการกำหนดทิศทางได้ ดังภาพ 1.35

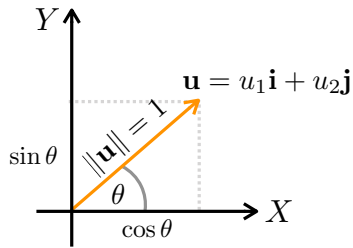
สมมติให้จุด (x_0, y_0) เป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เมื่อ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน X และ Y ตามลำดับ เนื่องจากเวกเตอร์สามารถกำหนดเส้นตรงในปริภูมิได้ เราจึงพิจารณาสมการของตัวแปรเสริม เมื่อ s เป็นตัวแปรเสริมได้ในรูป

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

หาก $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะเห็นว่า s จะเป็นความยาวของเส้นโค้งซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ (x_0, y_0) และมีทิศทางไปตามทิศที่เป็นบวกของ $\mathbf{u}$ ดังนั้น ถ้าให้ $s = 0$ จุด (x, y) คือจุดอ้างอิง (x_0, y_0) และเมื่อ s เพิ่มขึ้น จุด (x, y) ก็จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง ℓ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ดังนั้น หากพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ บนพื้นผิวที่วิ่งไปตามเส้นโค้ง ℓ บนเวกเตอร์อ้างอิง $\mathbf{u}$ อนุพันธ์ของ dz/ds เมื่อ $s = 0$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ขณะใดขณะหนึ่งของ $f(x, y)$ ตามระยะทางที่วัดจาก (x_0, y_0) ไปยัง (x, y) ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ เราจึงจะกล่าวถึงนิยามของอนุพันธ์ระดับทิศทางได้ดังนี้



ภาพที่ 1.35. ทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และเส้นตรง ℓ



ภาพที่ 1.36. เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ในรูปของมุม

บทนิยาม 1.7.1 ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของ x, y และ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **อนุพันธ์ระดับทิศทาง** (directional derivative) ของ f ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \quad (1.7.1) \\ &= \frac{d}{ds} [f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)]_{s=0} \end{aligned}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

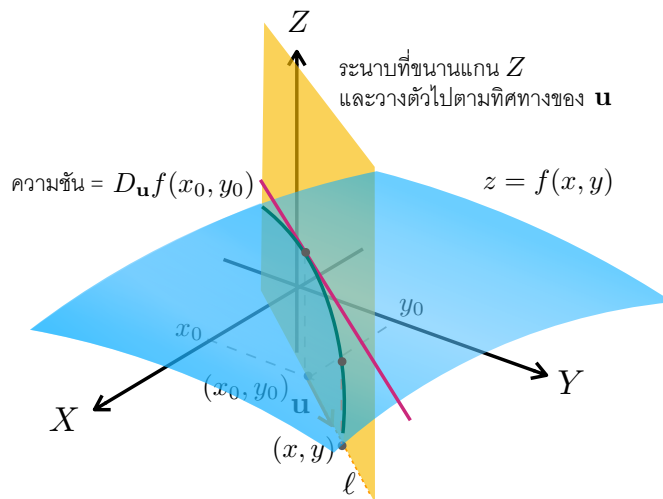
จากนิยามดังกล่าว จะเห็นว่า หากเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งทำมุม θ กับแกน X ดังภาพ 1.36 จะได้ว่า

$$u_1 = \cos \theta, \quad u_2 = \sin \theta$$

นั่นคือ สมการ (1.7.1) สามารถเขียนได้ในรูปของมุมที่ทำกับแกน x ได้โดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + s \cos \theta, y_0 + s \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{s}$$

เราจึงพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตได้ดังภาพ 1.37 กล่าวคือ ความหมายของอนุพันธ์ระดับทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ คือความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ นั่นเอง ดังนั้น สำหรับจุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ที่ตรึงไว้ อาจมีความชันได้มากมายขึ้นอยู่กับทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่กำหนดไว้ ดังนั้น อนุพันธ์ระดับทิศทางที่จุด (x_0, y_0) จึงมีความหมายคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่งของ $f(x, y)$ ขึ้นกับระยะทางในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0, y_0)



ภาพที่ 1.37. อนุพันธ์ระดับทิศทางในทางเรขาคณิต

หมายเหตุ สังเกตว่าจากนิยาม (1.7.1)

- ถ้าเลือก $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ ($\theta = 0$) จะได้ว่า $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ คือ $f_x(x_0, y_0)$
- ถ้าเลือก $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ ($\theta = \pi/2$) จะได้ว่า $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ คือ $f_y(x_0, y_0)$

ตัวอย่าง 1.7.1 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X ด้วยมุม $\theta = \pi/4$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(1 + s \cos(\frac{\pi}{4}), 2 + s \sin(\frac{\pi}{4})) - f(1, 2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(1 + s \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + s \frac{\sqrt{2}}{2}) - f(1, 2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + s \frac{\sqrt{2}}{2})(2 + s \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 + 3s \frac{\sqrt{2}}{2} + s^2 \frac{1}{2} - 2}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(3 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{s}{2} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ซึ่งมีความหมายคือ หากเราเคลื่อนที่จากจุด $(1, 2)$ ไปยังจุด (x, y) ด้วยทิศทาง $\mathbf{u}$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ จะเพิ่มขึ้น $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ เท่าของระยะที่เคลื่อนที่ไป

ตัวอย่าง 1.7.2 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = y^2 \ln x$ เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ที่จุด $(1, 4)$ โดยใช้นิยาม

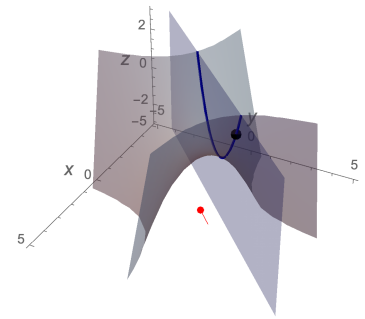
วิธีทำ เนื่องจากเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ที่กำหนดให้ยังไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนั้นเราจึงทำเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยก่อน โดยขนาดของเวกเตอร์คือ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ หน่วย ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยนี้คือ

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

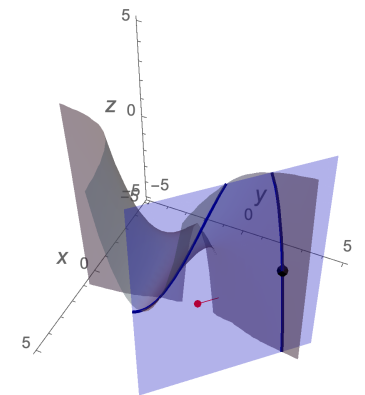
ดังนั้น โดยการหาอนุพันธ์จากนิยาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= \frac{d}{ds} \left[f\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 4 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right]_{s=0} \\ &= \frac{\left(4 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \frac{s}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(4 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \ln \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \Bigg|_{s=0} \\ &= -8\sqrt{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ หากเราเคลื่อนที่จากจุด $(1, 4)$ ตามทิศทาง $\mathbf{u}$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x, y) = y^2 \ln x$ จะลดลง $8\sqrt{2}$ เท่าของระยะที่เคลื่อนที่ไป



ภาพที่ 1.38. พื้นผิวของฟังก์ชันและอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x, y) = xy$ ที่จุด $(1, 2)$ เมื่อกำหนด $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/4$ กับแกน X



ภาพที่ 1.39. พื้นผิวของฟังก์ชันและอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x, y) = y^2 \ln x$ ที่จุด $(1, 2)$ เมื่อกำหนด $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/4$ กับแกน X

ในกรณีที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เราจะสามารถนิยามอนุพันธ์ระดับทิศทางได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้ยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.7.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย อนุพันธ์ระดับทิศทางของ f ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0, y_0, z_0) เขียนแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} \\ &= \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3)]_{s=0} \end{aligned}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

จะเห็นว่า เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งโดยใช้โคไซน์แสดงทิศทาง (directional cosine) กล่าวคือ ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร สมมติให้ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X, Y ด้วยมุม α, β ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{u} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j}$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยที่ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X, Y, Z ด้วยมุม α, β, γ ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{u} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถพิจารณาอนุพันธ์ระดับทิศทางได้โดยง่าย

จากนิยามของอนุพันธ์ระดับทิศทาง การหาอนุพันธ์ระดับทิศทางโดยใช้นิยามมีความยุ่งยาก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้เราคำนวณอนุพันธ์ระดับทิศทางได้สะดวกขึ้น

ทฤษฎีบท 1.7.3 ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) และถ้า $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระดับทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และกำหนดโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

พิสูจน์ จากนิยามของอนุพันธ์ระดับทิศทางได้ว่า

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)]_{s=0}$$

ให้ $g(s) = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการประกอบกันระหว่าง $z = f(x, y)$ กับ $x(s) = x_0 + su_1$ และ $y(s) = y_0 + su_2$ ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน g เทียบกับ s สามารถหาได้โดยใช้กฎลูกโซ่ นั่นคือ

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $g'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ จึงสรุปได้ดังต้องการ $\square$

ในการทำงานเดียวกัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เราสามารถขยายแนวคิดได้โดยง่าย กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 1.7.4 ให้ $f = f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0, z_0) และถ้า $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระดับทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ หาค่าได้ และกำหนดโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3$$

ในเวกเตอร์แคลคูลัส สำหรับฟังก์ชัน f **เกรเดียนต์** (gradient) ของ f นิยามโดย

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ในรูปตัวดำเนินการเดล ∇ โดย $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรก็จะนิยามได้ในทำนองคล้ายกัน คือ

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.7.3 และ 1.7.4 อนุพันธ์ระดับทิศทางที่ (x_0, y_0, z_0) สามารถพิจารณาได้จากผลคูณจุด (dot product) ระหว่างเวกเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ และทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ กล่าวคือ

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

และในการทำงานเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร หากกำหนดให้ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ แล้ว

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{u}$$

เราจะมาพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.7.5 (ตัวอย่างเดียวกันกับตัวอย่าง 1.7.1) จงหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X ด้วยมุม $\theta = \pi/4$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยใช้ทฤษฎีบท 1.7.3

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ จะได้เวกเตอร์ $\mathbf{u} = \cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{i} + \sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}$ นั่นคือ $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2})\mathbf{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2})\mathbf{j}$ และจะเห็นว่า

$$\nabla f(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

นั่นคือ $\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ซึ่งคำตอบตรงกันกับตัวอย่าง 1.7.1

สมบัติของเกรเดียนต์ที่น่าสนใจ

จากความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ระดับทิศทางและเกรเดียนต์ ดังปรากฏในทฤษฎีบท 1.7.3 จะเห็นว่า

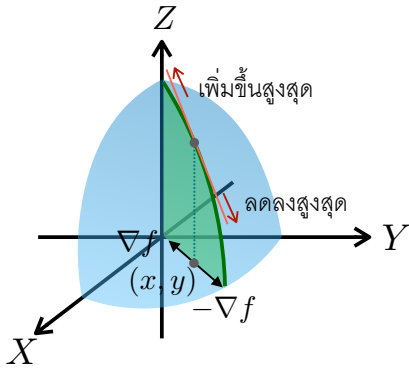
$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

เนื่องจาก $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ อยู่ในรูปผลคูณจุด เราสามารถพิจารณาได้อีกนัยหนึ่งคือ

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta \quad (1.7.2)$$

ดังนั้น สมการ (1.7.2) จะมีค่ามากที่สุด หากมุม θ มีค่าเท่ากับ 0 และค่าอนุพันธ์ระดับทิศทางที่มากที่สุดที่จุด (x_0, y_0) คือ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ นั่นหมายความว่า ที่จุด (x_0, y_0) พื้นผิว $z = f(x, y)$ มีค่าความชันมากที่สุด ในทิศทางของเกรเดียนต์ และความชันที่มากที่สุดคือ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาทิศทางตรงกันข้าม จะพบว่า ค่า $D_{\mathbf{u}}f$ ที่น้อยที่สุดที่จุด (x_0, y_0) คือ $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ซึ่งเกิดในทิศทางตรงข้ามของ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ดังภาพ 1.40 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้



ภาพที่ 1.40. การเพิ่มขึ้นหรือลดลงสูงสุดตามทิศทางของ ∇f

ทฤษฎีบท 1.7.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหรือสามตัวแปร และ P เป็นจุด $P(x_0, y_0)$ หรือ $P(x_0, y_0, z_0)$ ในสองมิติหรือสามมิติตามลำดับ สมมติว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ P แล้ว

1. ถ้า $\nabla f = \mathbf{0}$ แล้ว อนุพันธ์ระดับทิศทางของ f ที่ P ทั้งหมดมีค่าเท่ากับศูนย์
2. ถ้า $\nabla f \neq \mathbf{0}$ แล้ว สำหรับอนุพันธ์ระดับทิศทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ f ที่ P จะได้ว่า อนุพันธ์ตามทิศทาง ∇f ที่จุด P จะมีค่ามากที่สุด และค่าที่มากที่สุดนั้นคือ $\|\nabla f\|$ ที่ P
3. ถ้า $\nabla f \neq \mathbf{0}$ แล้ว สำหรับอนุพันธ์ระดับทิศทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ f ที่ P จะได้ว่า อนุพันธ์ตามทิศทางตรงกันข้ามกับ ∇f ที่จุด P จะมีค่าน้อยที่สุด และค่าที่น้อยที่สุดนั้นคือ $-\|\nabla f\|$ ที่ P

ตัวอย่าง 1.7.7 ให้ $f(x, y) = e^x y^3$ จงหาค่าสูงสุดของอนุพันธ์ระดับทิศทางที่ $(0, -2)$ และหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางที่ค่ามากที่สุด

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.7.6 ทิศทางที่เพิ่มขึ้นสูงสุดคือทิศทางของ ∇f นั่นคือ

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = e^x y^3 \mathbf{i} + 3e^x y^2 \mathbf{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ในทิศทางที่เพิ่มขึ้นสูงสุดที่จุด $(0, -2)$ คือ $\nabla f(0, -2) = -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น ขนาดสูงสุดของอนุพันธ์ระดับทิศทางที่จุด $(0, -2)$ หาได้จาก

$$\|\nabla f(0, -2)\| = \sqrt{(-8)^2 + (12)^2} = 4\sqrt{13}$$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้นคือ

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(0, -2)}{\|\nabla f(0, -2)\|} = \frac{1}{4\sqrt{13}}(-8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$

จะเห็นว่า เมื่อพิจารณาพื้นผิว $z = f(x, y)$ แล้วทำการพิจารณาโค้งระดับ เมื่อให้ z เป็นค่าคงที่ กล่าวคือ สมมติว่าโค้งระดับกำหนดได้โดยสมการอิงตัวแปรเสริม $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ ดังนั้น โค้งระดับจะเขียนได้ในรูป $f(g(t), h(t)) = c$ จะเห็นว่า เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจะมีทิศทางที่ตั้งฉากกับโค้งระดับตามภาพ 1.41 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.7.8 ให้ $f = f(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ทุก (x_0, y_0) ในโดเมน D ของ f จะได้ว่า เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ที่จุด (x_0, y_0) จะตั้งฉากกับโค้งระดับของ f ที่จุด (x_0, y_0)

พิสูจน์ สมมติว่า โค้งระดับเขียนได้ในสมการอิงตัวแปรเสริม $f(g(t), h(t)) = c$ ของตัวแปร t

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} &= 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{dg}{dt} \mathbf{i} + \frac{dh}{dt} \mathbf{j} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$ และ $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dg}{dt} \mathbf{i} + \frac{dh}{dt} \mathbf{j}$

นั่นคือ ∇f จะตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของ $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ซึ่งมีความหมายว่า ∇f ตั้งฉากกับโค้งระดับของ f ที่ (x_0, y_0) $\square$

จะเห็นว่า ถ้า (x_0, y_0) เป็นจุดบนเส้นโค้งระดับ $f(x, y) = c$ แล้ว ความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ที่จุดนั้น ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ จะหาได้โดย $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$

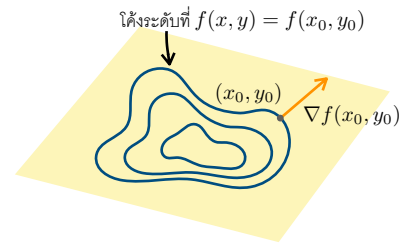
ตัวอย่าง 1.7.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิของแผ่นโลหะแผ่นหนึ่งที่จุด (x, y) กำหนดโดย $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4$

1. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่จุด $(1, -1)$ เมื่อ $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/3$ กับแกน X
2. จงหาขนาดและทิศทางของอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดของอุณหภูมิที่จุด $(1, -1)$

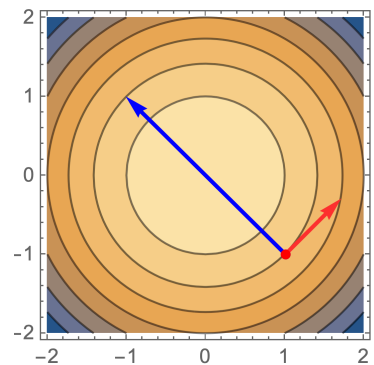
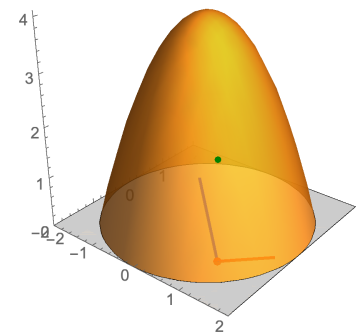
วิธีทำ 1. จากปัญหาดังกล่าว เราต้องการหาอนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(1, -1)$ เมื่อ $\mathbf{u}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ทำมุม $\pi/3$ กับแกน X ซึ่งจะได้ว่า $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ และ

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$$

นั่นคือ $\nabla f(1, -1) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น



ภาพที่ 1.41. เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ซึ่งตั้งฉากกับโค้งระดับ $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ที่จุด (x_0, y_0)



ภาพที่ 1.42. (บน) พื้นผิวของ f ในตัวอย่าง 1.7.9 (ล่าง) เส้นโค้งระดับของ f และเกรเดียนต์ของ f ที่จุด $(1, -1)$

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{u}}f(1, -1) &= \nabla f(1, -1) \cdot \mathbf{u} \\
 &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= -1 + \sqrt{3} \approx 0.732
 \end{aligned}$$

นั่นคือ ที่จุด $(1, -1)$ อนุพันธ์เพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 0.732 หน่วยต่อหนึ่งหน่วยการเปลี่ยนแปลงของระยะที่วัดได้ตาม $\mathbf{u}$

2. เนื่องจาก ทิศทาง ที่ อัตรา การ เปลี่ยนแปลง สูงสุด เป็น ไป ตาม ทิศ ของ $\nabla f(1, -1)$ นั่นคือ $\nabla f(1, -1)$ ทำมุม $\theta = 3\pi/4$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของอนุพันธ์ที่ $(1, -1)$ คือ

$$\|\nabla f(1, -1)\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

และจะมีค่ามากที่สุดเมื่อทำมุม $3\pi/4$ กับแกน X

จะเห็นว่า เราสามารถพิจารณาพื้นผิวของ f ได้ดังภาพ 1.42 (ด้านบน) และพิจารณาโค้งระดับดังภาพ 1.42 (ด้านล่าง) ซึ่งลูกศรสีน้ำเงินแสดงให้เห็นถึงเกรเดียนต์ ซึ่งตั้งฉากกับโค้งระดับที่จุด $(1, -1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของพื้นผิว (ลูกศรสีแดง)

ตัวอย่าง 1.7.10 ให้ $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$

1. จงหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของ f ที่จุด $(1, 1, 0)$ ตามทิศทาง $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
2. จงหาทิศทางที่ f เปลี่ยนแปลงมากที่สุดที่จุด $(1, 1, 0)$ และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

วิธีทำ 1. ก่อนอื่น จากทิศทาง $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ จะต้องทำเวกเตอร์ดังกล่าวให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยก่อน กล่าวคือ ขนาดของ $\mathbf{v} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$ ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{u}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ คือ

$$\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

และเกรเดียนต์ที่จุด $(1, 1, 0)$ คือ $\nabla f(1, 1, 0) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 ดังนั้น อนุพันธ์ระดับทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(1, 1, 0)$ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ คือ

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{u}}f(1, 1, 0) &= \nabla f(1, 1, 0) \cdot \mathbf{u} \\
 &= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} \\
 &= \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

2. ทิศทางที่อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดเป็นไปตามทิศของ $\nabla f(1, 1, 0)$ คือ เปลี่ยนแปลงไปตามเวกเตอร์ $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของ f ที่ $(1, 1, 0)$ คือ

$$\|\nabla f(1, 1, 0)\| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

แบบฝึกหัดที่ 1.7

1. จงหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของฟังก์ชัน f ณ จุดและทิศทางที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้
นิยาม

(a) $f(x, y) = 1 + x^2y + xy^2$ ณ จุด $(1, -1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ ณ จุด $(1, 4)$ เมื่อทิศทางเป็นไปตามเวกเตอร์ที่ทำมุม $\theta = \pi/3$ กับแกน X

(c) $f(x, y, z) = x^3z - yx^2 + z^2$ ณ จุด $(2, -1, 1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

2. จงหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของฟังก์ชัน f ณ จุดและทิศทางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(a) $f(x, y) = e^x \cos y$ ณ จุด $(0, \pi/2)$ โดยทิศทาง $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 4z^2)$ ณ จุด $(-1, 2, 4)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$

(c) $f(x, y, z) = e^{x+y+3z}$ ณ จุด $(-2, 2, -1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = 20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. จงหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของ $f(x, y) = e^{-x} \sec y$ ที่จุด $P(0, \pi/4)$ ในทิศทางที่
เข้าสู่จุดกำเนิด

4. จงหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของ $f(x, y) = \sqrt{xy}e^y$ ที่จุด $P(1, 1)$ ในทิศทางลบของ
แกน Y

5. กำหนดให้ $f(x, y, z) = \frac{y}{x+z}$ จงหา

(a) อนุพันธ์ระดับทิศทางของ f ที่จุด $P(2, 1, -1)$ ในทิศทางจากจุด P สู่ $Q(-1, 2, 0)$

(b) จงหาทิศทางที่ f เปลี่ยนแปลงมากที่สุดที่จุด $(2, 1, -1)$ และหาอัตราการ
เปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

6. อุณหภูมิ (หน่วยเซลเซียส) ในแท่งโลหะอันหนึ่ง ณ จุด (x, y, z) กำหนดโดยฟังก์ชัน

$$T(x, y, z) = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

(a) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเมื่อเทียบกับระยะทางที่จุด $(1, 1, 1)$
ในทิศทางสู่จุดกำเนิด

(b) จงหาทิศทางที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นมากที่สุดที่จุด $(1, 1, 1)$ (ตอบในรูปเวกเตอร์
หนึ่งหน่วย)

(c) จงหาอัตราซึ่งอุณหภูมิลดลงต่ำที่สุดที่จุด $(1, 1, 1)$

7. ภูเขาแห่งหนึ่ง ที่ตำแหน่ง (x, y) ความสูงจากระดับน้ำทะเล z วัดได้จากความ
สัมพันธ์

$$z = 2000 - 0.02x^2 - 0.04y^2$$

เมื่อ x, y, z มีหน่วยเป็นเมตร กำหนดให้ทิศทางตามแกน X ด้านบวกเป็นทิศตะวันออก และทิศทางตามแกน Y ด้านบวกเป็นทิศเหนือ สมมติว่านักปีนเขาคนหนึ่งอยู่ที่
ตำแหน่ง $P(-20, 5, 1991)$

- (a) ถ้านักปีนเขาใช้เข็มทิศและเดินทางไปตามทิศตะวันออก ณ ตำแหน่ง P นักปีนเขาจะต้องเดินขึ้นหรือเดินลงจากจุดที่ยืนอยู่
- (b) ถ้านักปีนเขาใช้เข็มทิศและเดินทางไปตามทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ณ ตำแหน่ง P นักปีนเขาจะต้องเดินขึ้นหรือเดินลงจากจุดที่ยืนอยู่ และความสูงมีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด
- (c) ณ จุดที่นักปีนเขายืนอยู่ ทิศทางใดในเข็มทิศที่ภูเขามีการเปลี่ยนแปลงความสูงเพิ่มขึ้นสูงที่สุด และลดลงต่ำที่สุด
8. ให้ $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง อนุพันธ์ย่อย f_x, f_y หาค่าได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่อนุพันธ์ระดับสองในทิศทางอื่น ๆ หาค่าไม่ได้
9. สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่โดเมนคือระนาบ XY ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล
- (a) ถ้า $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ แล้ว อนุพันธ์ระดับสองในทิศทางของ f ในทิศทางของ $\mathbf{v}$ ที่จุด (x_0, y_0) มีค่าเป็นสองเท่าของอนุพันธ์ระดับสองในทิศทางของ f ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0, y_0)
- (b) ถ้า $y = x^2$ เป็นเส้นโค้งระดับของ f แล้ว $f_x(0, 0) = 0$
- (c) ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่เป็นเวกเตอร์คงที่ และ $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ สำหรับทุกจุด (x, y) แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่
- (d) ถ้าเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (x_0, y_0) ไปยังจุด (x_1, y_1) มีค่าเป็นพหุคูณ (ที่เป็นบวก) ของ $\nabla f(x_0, y_0)$ แล้ว $f(x_0, y_0) \leq f(x_1, y_1)$

1.8 จาโคเบียนของการแปลง

1.8.1 การแปลงในระนาบ

ในหัวข้อ 1.1 เราเคยกล่าวถึงการแปลงซึ่งเป็นฟังก์ชัน $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการแปลงให้ละเอียดขึ้น เพื่อนำสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการแปลงมาใช้ประโยชน์ในการศึกษาประเด็นที่สูงขึ้น

จะเห็นว่า เราได้เคยกล่าวถึงตัวอย่างของสมการอิงตัวแปรเสริม ซึ่งเป็นการส่งจาก $\mathbb{R}$ ไปเป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ หรือการส่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปเป็นพื้นผิวใน $\mathbb{R}^3$ ในส่วนนี้เราจะพิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริมในรูป

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (1.8.1)$$

ดังนั้น สมการอิงตัวแปรเสริมนี้ จะก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างจุดในระนาบ UV และระนาบ XY ซึ่งเราเขียนสมการที่แสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในรูปเวกเตอร์ กล่าวคือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ในเทอมของตัวแปร x, y และ $\mathbf{r}(u, v)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์อยู่ในรูปของตัวแปร u, v

จากสถานการณ์ดังกล่าว หากเราพิจารณาให้คู่ของ (u, v) เป็นตัวแปรต้น ซึ่งก่อให้เกิดคู่ของตัวแปร (x, y) ที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียว โดยทำการนิยามให้อยู่ในรูป

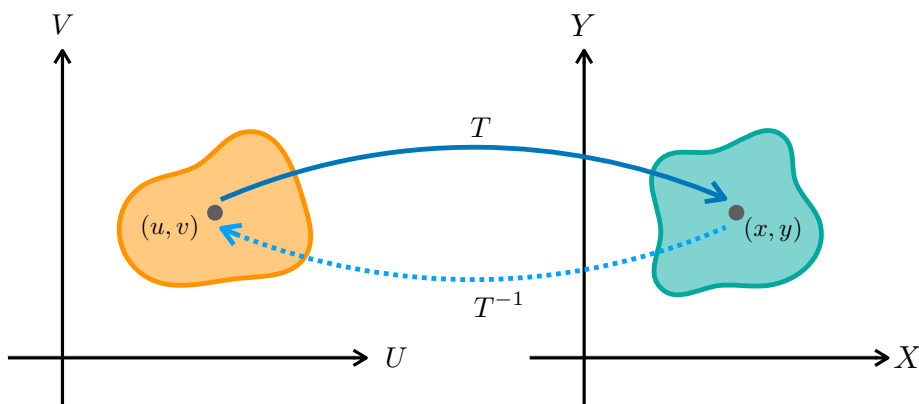
$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

เราจะเรียก T ว่าเป็นการแปลง (transformation) จากระนาบ UV ไปยังระนาบ XY และเรียก (x, y) ว่า ภาพ (image) ของ (u, v) นั่นคือ T ส่ง (map) (u, v) ไปยัง (x, y) เซต R ของภาพทั้งหมดในระนาบ XY ของเซต S ในระนาบ UV จะเรียกว่า ภาพของ S ภายใต้ T ถ้าแต่ละภาพในระนาบ UV ส่งไปยัง XY แล้วได้ภาพที่แตกต่างกัน จะเรียก T ว่าเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one mapping)

ในทำนองกลับกัน หากเราพิจารณาสมการ (1.8.1) ทำการนิยาม u, v ให้เป็นฟังก์ชันของ x, y กล่าวคือ

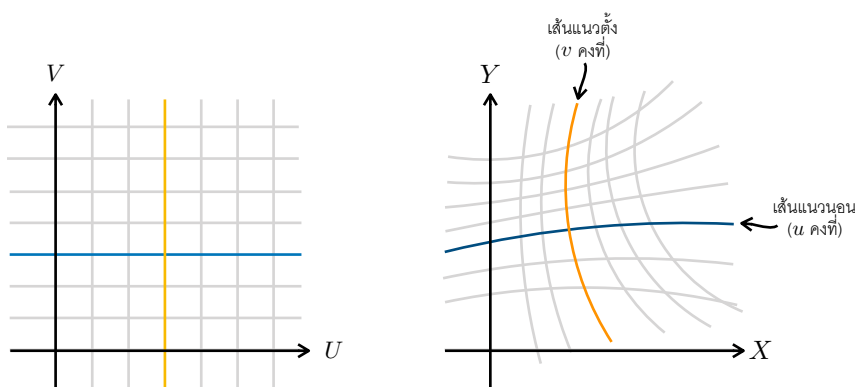
$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (1.8.2)$$

จะได้ว่า เราสามารถสร้างการส่งที่ส่งจากระนาบ XY ไปยังระนาบ UV ซึ่งทำการส่งภาพของ (u, v) ภายใต้การส่ง T กลับมายัง (u, v) การส่งนี้จะเขียนเป็น T^{-1} และจะเรียกว่า การส่งผกผัน (inverse map) ของ T ซึ่งความสัมพันธ์ของการส่งแสดงได้ดังภาพ 1.43

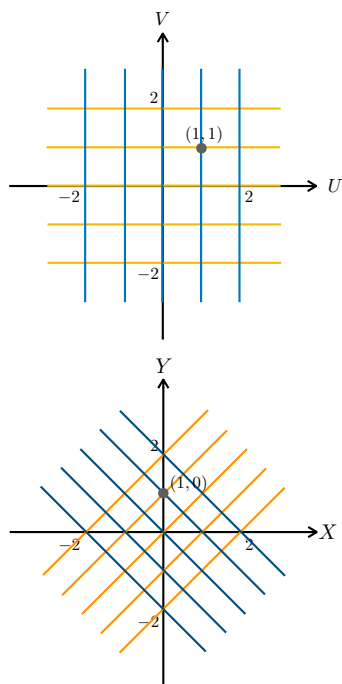


ภาพที่ 1.43. การส่งระหว่างระนาบ UV และ XY

เราสามารถพิจารณาการเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิตของการส่งที่เกิดภาพ (x, y) จากจุด (u, v) ได้โดยสมมติว่าในระนาบ UV มีเส้นแนวนอน (v คงที่) ซึ่งส่งไปยังระนาบ XY ก่อให้เกิดเส้นโค้งคังที่ของ v บนระนาบ XY และทำนองเดียวกัน มีเส้นแนวตั้ง (u คงที่) ในระนาบ UV ที่ส่งไปยังระนาบ XY และก่อให้เกิดเส้นโค้งคังที่ของ u ดังภาพ 1.44



ภาพที่ 1.44. เส้นแนวนอนและแนวตั้งในระนาบ UV ส่งไปยังเส้นโค้งคังที่ในระนาบ XY



ภาพที่ 1.45. (บน) เส้นแนวตั้งและแนวนอนในระนาบ UV
(ล่าง) เส้นโค้งในระนาบ XY

ตัวอย่าง 1.8.1 ให้ T เป็นการแปลงจากระนาบ UV ไปยังระนาบ XY กำหนดโดย

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

1. จงหา $T(1, 1)$
2. ให้ S เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ปิดล้อมด้วย $u = -2, u = 2, v = -2$ และ $v = 2$ ในระนาบ UV จงวาดภาพจากในระนาบ XY ซึ่งเกิดจากการส่ง S ในระนาบ UV ไปยังระนาบ XY

วิธีทำ 1. จะเห็นว่า เมื่อ $(u, v) = (1, 1)$ จะได้ว่า $T(1, 1) = (1, 0)$
2. จากการกำหนด เราจะพิจารณาว่า ในระนาบ XY จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับระนาบ UV ซึ่งจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$x + y = u \quad \text{และ} \quad x - y = v$$

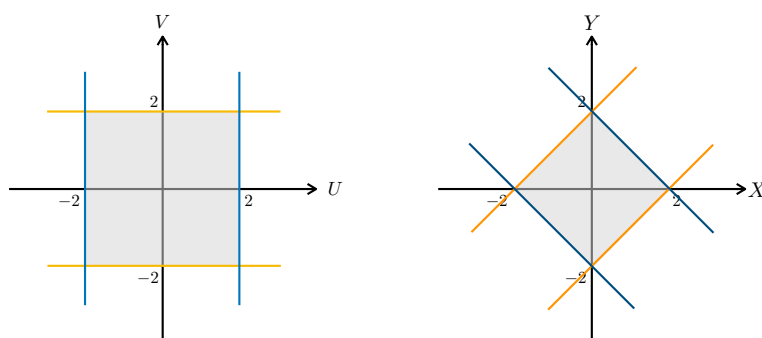
ดังนั้น สำหรับแต่ละเส้นแนวนอนเมื่อ $u = -2, -1, 0, 1, 2$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$x + y = -2, \quad x + y = -1, \quad x + y = 0, \quad x + y = 1, \quad x + y = 2$$

และสำหรับแต่ละเส้นแนวตั้งเมื่อ $v = -2, -1, 0, 1, 2$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$x - y = -2, \quad x - y = -1, \quad x - y = 0, \quad x - y = 1, \quad x - y = 2$$

โดยเส้นแนวนอนและเส้นแนวตั้งในระนาบ UV สามารถแสดงเป็นเส้นในระนาบ XY ได้ดังภาพ 1.45 ซึ่งจะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีถูกปิดล้อมด้วย $u = -2, u = 2, v = -2$ และ $v = 2$ ในระนาบ UV สามารถพิจารณาได้โดยเส้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x + y = -2, x + y = 2, x - y = -2$ และ $x - y = 2$ ดังภาพ 1.46



ภาพที่ 1.46. สี่เหลี่ยมจัตุรัสในระนาบ UV และสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่หมุนในระนาบ XY

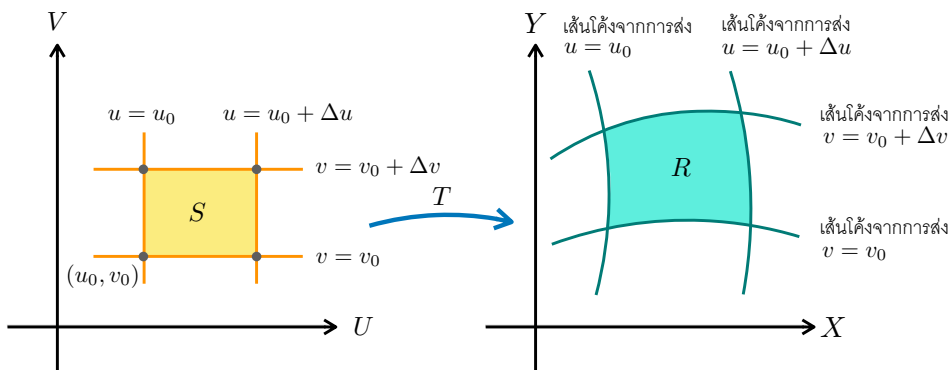
ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.8.1 เราสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ UV และระนาบ XY ได้จากการพิจารณาพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ในระนาบ UV กับพื้นที่ที่ถูกแปลงไปในระนาบ XY ภายใต้การแปลง T ก่อนอื่นสมมติให้

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v)$$

สมมติว่า Δu และ Δv เป็นจำนวนจริงบวก พิจารณามapping ที่เปลี่ยนพื้นที่ S ในระนาบ UV ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง

$$u = u_0, \quad u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0, \quad v = v_0 + \Delta v$$

ถ้า $f(u, v)$ และ $g(u, v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $\Delta u, \Delta v$ ไม่ใหญ่มากแล้ว ภาพ S ที่ถูกส่งไปในระนาบ XY จะเป็นบริเวณใน R ซึ่งคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกบิด ดังภาพ 1.47 โดยที่บริเวณใน R ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งคงที่ u และ v ที่สัมพันธ์กับด้านของ S



ภาพที่ 1.47. การส่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากระนาบ UV ไปยังสี่เหลี่ยมด้านขนานบิดในระนาบ XY

ถ้าเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของ (u, v) ในระนาบ UV แล้ว จะได้ว่าเส้นโค้งคงที่ u และ v ในระนาบ XY เมื่อ $u = u_0$ และ $v = v_0$ จะเขียนได้เป็น

$$\mathbf{r}(u, v_0) = f(u, v_0)\mathbf{i} + g(u, v_0)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(u_0, v) = f(u_0, v)\mathbf{i} + g(u_0, v)\mathbf{j}$$

ถ้าสมมติว่า Δu และ Δv เล็กๆ จะเห็นว่า บริเวณ R สามารถประมาณได้ด้วยสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ ดังภาพ 1.48 (บน)

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

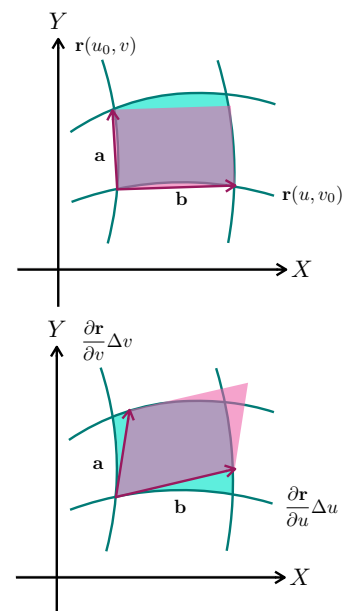
ดังนั้น เวกเตอร์ $\mathbf{a}$ สามารถประมาณได้ด้วยเวกเตอร์ที่สัมผัสเส้นโค้ง คือเวกเตอร์ $\mathbf{r}'$ ดังภาพ 1.48 (ล่าง) กล่าวคือ เวกเตอร์ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ประมาณได้โดย

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u} \Delta u \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u} \mathbf{j} \right) \Delta u$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v} \Delta v \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v = \left(\frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v} \mathbf{j} \right) \Delta v$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในบริเวณ R ในระนาบ XY สามารถประมาณได้โดย

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$



ภาพที่ 1.48. (บน) เวกเตอร์ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ สำหรับการหาพื้นที่ในระนาบ XY (ล่าง) การประมาณเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ ในระนาบ XY

$$\text{ซึ่งจะเห็นว่า } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

เราจึงนิยามดีเทอร์มิแนนต์หน้าส่วนประกอบ $\mathbf{k}$ ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.8.1 ให้ $x = f(u, v)$ และ $y = g(u, v)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในบริเวณหนึ่ง **จาโคเบียน** (Jacobian) J ของการแปลง f, g ในสองมิติ เทียบกับ u, v นิยามโดย

$$J(u, v) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวทำให้เราได้ว่า เมื่อ Δu และ Δv เล็กเพียงพอ กล่าวคือ เมื่อให้ $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$ พื้นที่ของบริเวณ R ในระนาบ XY มีขนาดเป็น $|J(u, v)|$ เท่าของพื้นที่ S ในระนาบ UV นั่นคือ

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)} \frac{A_{xy}}{A_{uv}} = |J(u, v)|$$

เมื่อ A_{xy} และ A_{uv} คือพื้นที่ในระนาบ XY และ UV ตามลำดับ ดังนั้น จากที่แสดงข้างต้น เราจึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ UV และระนาบ XY ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.2 ให้ x, y, u, v สัมพันธ์โดย

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) & y &= g(u, v) \\ u &= F(x, y) & v &= G(x, y) \end{aligned}$$

โดยที่ f, g, F, G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องแล้ว

$$A_{xy} = |J(u, v)| A_{uv} \quad \text{และ} \quad A_{uv} = |J(x, y)| A_{xy}$$

เมื่อ A_{xy} และ A_{uv} คือพื้นที่ในระนาบ XY และ UV ตามลำดับ และ

$$J(u, v) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}, \quad J(x, y) = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

ตัวอย่าง 1.8.3 ให้ R_{uv} เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย

$$R_{uv} : 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u + v = 1$$

กำหนดการแปลงซึ่งแปลง บริเวณในระนาบ UV ไปยัง ระนาบ XY ด้วย ความสัมพันธ์

$$x = 3u + 4v \quad y = 4u$$

1. จงพิจารณาบริเวณ R_{xy} ในระนาบ XY
2. จงคำนวณ $|J(u, v)|$

3. จงหาพื้นที่ A_{xy} ของบริเวณ R_{xy} ในระนาบ XY

4. จงคำนวณ $|J(x, y)|$

วิธีทำ 1. บริเวณในระนาบ UV เป็นบริเวณรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จากความสัมพันธ์ที่กำหนด เราจึงพิจารณาขอบเขตของบริเวณแต่ละเส้นที่ส่งมา ซึ่งบริเวณที่ปิดล้อมสามารถแสดงได้ดังภาพ 1.49

- สำหรับเส้นตรงที่ $u = 0$ จะได้เส้นตรง $y = 0$
- สำหรับเส้นตรงที่ $v = 0$ ทำให้ได้ว่า $x = 3u$ และจาก $y = 4u$ จะได้เส้นตรง $4x = 3y$
- สำหรับเส้นตรง $u + v = 1$ ทำให้ได้เส้นตรง $x + y = 3u + 4$ และจาก $y = 4u$ จึงได้เส้นตรง $4x + y = 16$

2. จะเห็นว่า

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

ดังนั้น $|J(u, v)| = 16$

3. จากความสัมพันธ์ ทำให้ได้ว่า $A_{xy} = |J(u, v)|A_{uv}$ และเนื่องจากเราทราบว่า $A_{uv} = 1/2$ ดังนั้น $A_{xy} = (16)(\frac{1}{2}) = 8$ ตารางหน่วย

4. จากการแปลงที่กำหนดให้ จะสร้างสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ u, v ในเทอมของ x, y ทำให้เราได้ว่า

$$u = \frac{1}{4}y \quad v = \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}y$$

ดังนั้น

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}$$

นั่นคือ $|J(x, y)| = \frac{1}{16}$ ตามต้องการ

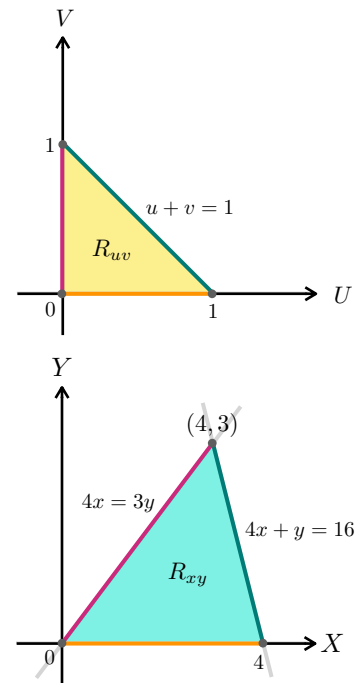
ตัวอย่าง 1.8.4 พิจารณาระบบพิกัดฉากในระนาบ XY และระบบพิกัดเชิงขั้ว $r\theta$ กำหนดการแปลงบริเวณระหว่างระนาบ XY และยังระนาบ $r\theta$ ด้วยความสัมพันธ์

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

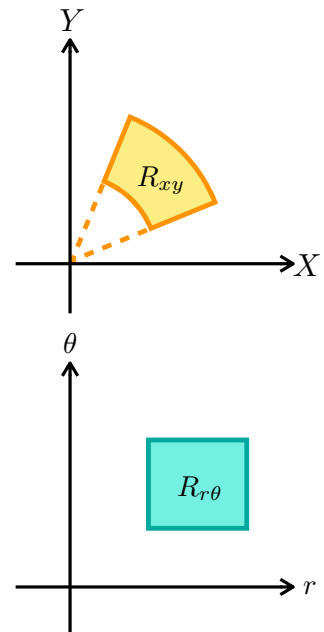
จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ XY และระนาบ $r\theta$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ของการแปลง จะเห็นว่า $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ หากพิจารณาริเวณสี่เหลี่ยมในระนาบ XY จะพบว่า มีความสัมพันธ์กับบริเวณในระนาบ $r\theta$ ดังภาพ 1.50 เราจึงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ กล่าวคือ

$$A_{xy} = |J(r, \theta)|A_{r\theta}$$



ภาพที่ 1.49. (บน) บริเวณในระนาบ UV
(ล่าง) บริเวณในระนาบ XY หลังการส่ง



ภาพที่ 1.50. (บน) บริเวณในระนาบ XY
(ล่าง) บริเวณในระนาบ $r\theta$

ดังนั้น จึงพิจารณา

$$J(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

จึงได้ว่า $|J(r, \theta)| = r$ นั่นคือ

$$A_{xy} = r A_{r\theta}$$

ในการทำงานเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร เราสามารถนิยามจาโคเบียนได้ ดังนี้

บทนิยาม 1.8.2 ถ้า $x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ณ บริเวณหนึ่งแล้ว จาโคเบียนการแปลง J ของการแปลง f, g, h ในสามมิติ เทียบกับ u, v, w นิยามโดย

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix}$$

หากพิจารณาการแปลงจากปริภูมิสามมิติหนึ่งไปยังอีกปริภูมิสามมิติหนึ่ง เราจะได้ความสัมพันธ์ในแง่ของปริมาตรระหว่างสองปริภูมิ ซึ่งพิจารณาได้ในทำนองคล้ายกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.5 ให้ x, y, z, u, v, w สัมพันธ์โดย

$$\begin{aligned} x &= f(u, v, w) & y &= g(u, v, w) & z &= h(u, v, w) \\ u &= F(x, y, z) & v &= G(x, y, z) & w &= H(x, y, z) \end{aligned}$$

โดยที่ f, g, h, F, G, H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องแล้ว

$$V_{xyz} = |J(u, v, w)| V_{uvw} \quad \text{และ} \quad V_{uvw} = |J(x, y, z)| V_{xyz}$$

เมื่อ V_{xyz} และ V_{uvw} คือปริมาตรในระนาบ XYZ และ UVW ตามลำดับ และ

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}, \quad J(x, y, z) = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ทำได้ในทำนองคล้ายกัน โดยในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (spanned parallelepiped) หากมีเวกเตอร์ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน สามารถหาได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามมิติ (scalar triple product) นั่นคือ $V = \|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\|$

ตัวอย่าง 1.8.6 กำหนดฟังก์ชันแฝง

$$f(x, y, z, u, v, w) = x - u \sin v \cos w$$

$$g(x, y, z, u, v, w) = y - u \sin v \sin w$$

$$h(x, y, z, u, v, w) = z - u \cos v$$

จงคำนวณจาโคเบียน $\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}$ และ $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}$

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} &= \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\sin v \cos w & -u \cos v \cos w & u \sin v \sin w \\ -\sin v \sin w & -u \cos v \sin w & -u \sin v \cos w \\ -\cos v & u \sin v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -u^2 \sin v \end{aligned}$$

และเราได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)} &= \begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -u \cos v \cos w \\ 0 & -u \cos v \sin w \end{vmatrix} \\ &= -u \cos v \sin w \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.8.7 พิจารณาระบบพิกัดฉากในปริภูมิ XYZ และระบบพิกัดทรงกระบอก $r\theta Z$ กำหนดการแปลงบริเวณระหว่างปริภูมิ XYZ กับปริภูมิ $r\theta Z$ ด้วยความสัมพันธ์

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรในปริภูมิ XYZ และปริภูมิ $r\theta Z$

วิธีทำ เราจึงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร กล่าวคือ

$$V_{xyz} = |J(r, \theta, z)| V_{r\theta z}$$

ดังนั้น จึงพิจารณา

$$J(r, \theta, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

นั่นคือ

$$V_{xyz} = r V_{r\theta z}$$

1.8.2 ฟังก์ชันแฝง และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง

ความสัมพันธ์หลาย ๆ ความสัมพันธ์ปรากฏอยู่ในรูปของฟังก์ชันแฝง ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ การเลือกว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรต้น อีกตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตาม อาจกำหนดได้ยาก เช่น ในบางย่านจุดเปิด เราอาจสร้างความสัมพันธ์ให้ตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตาม และตัวแปรอื่น ๆ เป็นตัวแปรต้นได้ แต่เมื่อเปลี่ยนย่านจุดเปิด ความสัมพันธ์ที่กำหนดไว้แต่ต้นก็ไม่เป็นเช่นนั้น

คำถามที่เราให้ความสนใจคือ เราจะสามารถหาสูตรของอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงนั้นได้หรือไม่ และฟังก์ชันแฝงเหล่านั้นจะสามารถหาอนุพันธ์ได้หรือไม่ เราจะมาเริ่มต้นพิจารณาสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.8 ให้ u และ v เป็น ฟังก์ชัน แฝง ใน พจน์ของ x, y กำหนด โดย $F(x, y, u, v) = 0$ และ $G(x, y, u, v) = 0$ แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\end{aligned}$$

พิสูจน์ ให้ $F(x, y, u, v) = 0, G(x, y, u, v) = 0, u = u(x, y)$ และ $v = v(x, y)$ พิจารณารูปผลต่างเชิงอนุพันธ์ของ F และ G ดังนี้

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0 \quad (1.8.3)$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial v} dv = 0 \quad (1.8.4)$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

แทน du และ dv ในสมการ (1.8.3) และ (1.8.4) และรวมพจน์ dx, dy จะได้ว่า

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

เพื่อความสะดวกในการเขียน ต่อจากนี้ไปจะขอใช้สัญลักษณ์ตัวพิมพ์น้อยสำหรับอนุพันธ์ย่อย

เนื่องจาก dx และ dy เป็นอิสระเชิงเส้น กล่าวคือ สำหรับ A, B ถ้า $A dx + B dy = 0$ แล้ว $A = 0$ และ $B = 0$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}F_x + F_u u_x + F_v v_x &= 0, & F_y + F_u u_y + F_v v_y &= 0 \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x &= 0, & G_y + G_u u_y + G_v v_y &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงได้ระบบสมการในพจน์ของ u_x, v_x และ u_y, v_y สองระบบสมการ คือ

$$\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -G_x \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_y \\ -G_y \end{bmatrix}$$

โดยกฎของคราเมอร์ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} \\ v_x &= \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} \\ u_y &= \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} \\ v_y &= \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

สำหรับฟังก์ชันแฝง มีทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญที่ช่วยรับประกันการมีอนุพันธ์ ทฤษฎีบทนี้มีชื่อว่า ทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง (implicit function theorem) ซึ่งครอบคลุมผลของทฤษฎีบทที่ได้กล่าวมาข้างต้น เราจะยกทฤษฎีบทนี้มาโดยละการพิสูจน์ไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.8.9 (ทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง) ให้ $f(x, y, u, v)$ และ $g(x, y, u, v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (เมื่อเทียบกับแต่ละตัวในสี่ตัวแปร) ต่อเนื่องในย่านจุดเปิดของจุด $\hat{P}_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ โดยที่ $f(x, y, u, v) = 0$ และ $g(x, y, u, v) = 0$ แล้ว

- ถ้า $\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \Big|_{\hat{P}_0} \neq 0$ แล้ว สำหรับฟังก์ชันแฝง $f(x, y, u, v) = 0$ และ $g(x, y, u, v) = 0$ จะสามารถนิยามฟังก์ชันต่อเนื่อง $u = u(x, y)$ และ $v = v(x, y)$ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยแต่ละตัวต่อเนื่องในย่านจุดเปิดของจุด $P_0(x_0, y_0)$ โดยที่ฟังก์ชันเหล่านี้มีสมบัติว่า

$$u_0 = u(x_0, y_0) \quad \text{และ} \quad v_0 = v(x_0, y_0)$$

2. อนุพันธ์ย่อยของ u และ v ที่ P_0 จะหาได้จากอัตราส่วนของจาโคเบียน

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.8.10 กำหนด

$$u^2 - v = 3x + y, \quad u - 2v^2 = x - 2y$$

จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

วิธีทำ เราสมมติให้ $F(x, y, u, v) = u^2 - v - 3x - y = 0$ และ $G(x, y, u, v) = u - 2v^2 - x + 2y = 0$ โดยทฤษฎีบท 1.8.8 จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1 - 12v}{1 - 8uv}$$

และทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{-4u - 1}{1 - 8uv}$$

เมื่อ $1 - 8uv \neq 0$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายผลของจาโคเบียนไประบบสมการซึ่งมีสมการสามสมการ และมีตัวแปรต้นอย่างน้อยสองตัวแปรได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับการพิสูจน์ทำได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 1.8.8

ทฤษฎีบท 1.8.11 ให้ u, v และ w เป็นฟังก์ชันแฝงในพจน์ของ x, y กำหนดโดย $F(x, y, u, v, w) = 0, G(x, y, u, v, w) = 0$ และ $H(x, y, u, v, w) = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

ตัวอย่าง 1.8.12 ให้ u, v, w เป็นฟังก์ชันแฝงของตัวแปร x, y จงหา u_x เมื่อกำหนดฟังก์ชันดังระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} xy^2 + u^2v + w &= 5 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 &= 0 \\ xu + yv + xyw &= 0 \end{aligned}$$

จงหา u_x ที่ $x = 1, y = 0, u = 0, v = 1, w = 0$

วิธีทำ เราสมมติให้

$$\begin{aligned} F(u, v, w, x, y) &= xy^2 + u^2v + w - 5 \\ G(u, v, w, x, y) &= x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 \\ H(u, v, w, x, y) &= xu + yv + xyw \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v & F_w \\ G_x & G_v & G_w \\ H_x & H_v & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} y^2 & u^2 & 1 \\ 2x & 2v & 2w \\ u + yw & y & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2uv & u^2 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ x & y & xy \end{vmatrix}} \\ &= \frac{uv - u^3w + vwy - u^2w^2y - xy + u^2x^2y + wy^3 - vxy^3}{vx - u^2wx - uy + 2uvwy + u^3xy - 2uv^2xy} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 1, y = 0, u = 0, v = 1, w = 0$ จะได้ว่า $u_x = 0$ ตามต้องการ

1.8.3 สมบัติของจาโคเบียน

เราพิจารณาสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับจาโคเบียน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.13 (กฎลูกโซ่สำหรับจาโคเบียน)

ให้ $x = f(u, v), y = g(u, v)$ เป็นการแปลง โดยที่ u, v มีความสัมพันธ์กับตัวแปร s, t ดังการแปลง $u = \phi(s, t), v = \psi(s, t)$ และ f, g, ϕ, ψ หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

พิสูจน์ เราสามารถเขียน x, y ในรูปการประกอบ การแปลงได้ คือ

$$x = f(u, v) = f(\phi(s, t), \psi(s, t)) \quad y = g(u, v) = g(\phi(s, t), \psi(s, t))$$

จากนิยามของจาโคเบียน จะได้ว่า

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial s} & \frac{\partial f(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial t} \\ \frac{\partial g(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial s} & \frac{\partial g(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial t} \end{vmatrix}$$

ซึ่งสำหรับแต่ละพจน์ โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial s} &= f_u \phi_s + f_v \psi_s = x_u u_s + x_v v_s \\ \frac{\partial f(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial t} &= f_u \phi_t + f_v \psi_t = x_u u_t + x_v v_t \\ \frac{\partial g(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial s} &= g_u \phi_s + g_v \psi_s = y_u u_s + y_v v_s \\ \frac{\partial g(\phi(s, t), \psi(s, t))}{\partial t} &= g_u \phi_t + g_v \psi_t = y_u u_t + y_v v_t \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} &= \begin{vmatrix} x_u u_s + x_v v_s & x_u u_t + x_v v_t \\ y_u u_s + y_v v_s & y_u u_t + y_v v_t \end{vmatrix} \\ &= (x_u u_s + x_v v_s)(y_u u_t + y_v v_t) - (y_u u_s + y_v v_s)(x_u u_t + x_v v_t) \\ &= x_u u_s y_u u_t + x_u u_s y_v v_t + x_v v_s y_u u_t + x_v v_s y_v v_t \\ &\quad - y_u u_s x_u u_t - y_u u_s x_v v_t - y_v v_s x_u u_t - y_v v_s x_v v_t \\ &= x_u u_s y_v v_t + x_v v_s y_u u_t - y_u u_s x_v v_t - y_v v_s x_u u_t \\ &= u_s v_t (x_u y_v - x_v y_u) - u_t v_s (x_u y_v - x_v y_u) \\ &= (x_u y_v - x_v y_u)(u_s v_t - u_t v_s) \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 1.8.13 เราจะสามารถขยายกฎลูกโซ่ไปสู่กรณีฟังก์ชันหลายตัวแปรได้เช่นกัน และสำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกันของจาโคเบียนของการแปลงที่เป็นการแปลงผกผันซึ่งกันและกัน เมื่อจาโคเบียนไม่เป็นศูนย์

ทฤษฎีบท 1.8.14 (ตัวผกผันของจาโคเบียน)

ให้ $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ เป็นการแปลงโดยที่ความสัมพันธ์ผกผันกับตัวแปร u, v ดังการแปลง $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ ซึ่ง $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ และ $J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ แล้ว $J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ เป็นการแปลงผกผันของ $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ จึงได้ว่า $s = x$ และ $t = y$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.8.13 จะได้

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1$ และ $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ จึงได้ว่า

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}$$

นั่นคือ $J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)}$ ตามต้องการ $\square$

สมบัติดังกล่าวนี้ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญอีกทฤษฎีบทหนึ่ง คือ ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน (inverse function theorem) ซึ่งมีประโยชน์ในการศึกษาประเด็นต่าง ๆ เช่น ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางประเภท ในบางครั้ง สมการเดิมอาจแก้ได้ไม่ถนัดนัก แต่หากมีการแปลงสมการดังกล่าวไปยังสมการอื่นที่แก้ได้ง่ายขึ้น ซึ่งทฤษฎีบทดังกล่าวจะช่วยให้เรายืนยันว่า เราสามารถทำการแปลงระหว่างระบบพิกัดสองระบบพิกัดได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.8.15 (ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน)

ให้ x, y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์ต่อเนื่องในเทอมของ u, v ในบางย่านจุดเปิด $P_0(u_0, v_0)$ ในระนาบ UV นิยามโดย

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v)$$

แล้ว ถ้า ณ จุด P_0 จาคอเบียน $J(x, y) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} \neq 0$ แล้ว การแปลง

$x = f(u, v), y = g(u, v)$ สามารถหาตัวผกผัน $u(x, y), v(x, y)$ ได้ในบางย่านจุดเปิด $P_0(u_0, v_0)$ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ x, y ต่อเนื่องในบางย่านจุดเปิดของจุด $(x_0, y_0) = (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0))$ ในระนาบ XY

พิสูจน์ นิยามฟังก์ชัน F และ G โดย

$$F(x, y, u, v) = f(u, v) - x, \quad G(x, y, u, v) = g(u, v) - y$$

ดังนั้นฟังก์ชัน F, G มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องเทียบกับตัวแปรทั้งสี่ และ F, G มีค่าเป็นศูนย์ที่จุด $\hat{P}_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$

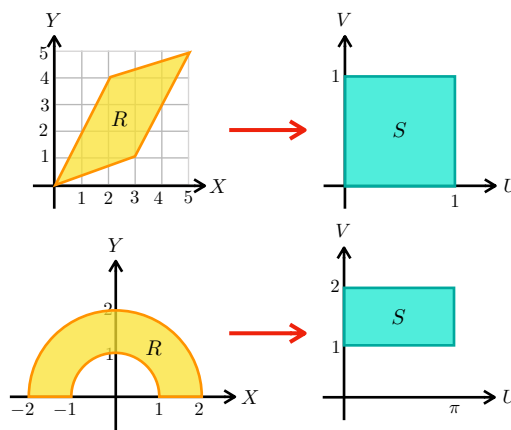
โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง ถ้า

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \right|_{\hat{P}_0} = \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right|_{\hat{P}_0} = J(x, y)$$

มีค่าไม่เป็นศูนย์แล้ว สำหรับ $F = G = 0$ จะสามารถหาฟังก์ชัน u, v ในเทอมของ x, y ได้ ซึ่งจะได้การแปลง $x = f(u, v), y = g(u, v)$ ตามต้องการ $\square$

แบบฝึกหัดที่ 1.8

- กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาจาโคเบียน $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$
 - $x = u + 4v, y = 3u - 5v$
 - $x = \sin u + \cos v, y = -\cos u + \sin v$
 - $u = 2x - 5y, v = x + 2y$
 - $u = x^2 + y^2, y = x^2 + y^2 (x > 0, y > 0)$
- กำหนดการแปลง $x = 2u, y = 3v$ โดยที่บริเวณ S ในระนาบ UV คือวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$
 - จงวาดบริเวณในระนาบ XY
 - จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ UV และระนาบ XY
- กำหนดบริเวณ R ในระนาบ XY สมมติว่าบริเวณ R ถูกส่งไปเป็นบริเวณ S ในระนาบ UV
 - จงหาการแปลงที่สอดคล้องกับภาพที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง
 - จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ XY และระนาบ UV



- กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x, y, u, v, w) = x^2y + u \sin v + wy^3$$

$$g(x, y, u, v, w) = e^{xy} + w \ln(1 + v + y^2) + xu^2$$

$$h(x, y, u, v, w) = \sin(x + y + u + v)$$

จงคำนวณจาโคเบียนต่อไปนี้

- $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$

- $\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}$

- $\frac{\partial(f, h)}{\partial(v, w)}$

- $\frac{\partial(f, h, g)}{\partial(u, x, v)}$

5. กำหนดฟังก์ชัน

$$F(x, y, u, v) = xu + yu - uv$$

$$G(x, y, u, v) = u \sin(xy)$$

$$H(x, y, u, v) = x^2 - y^2 + u^2 + v^2$$

จงคำนวณหาโคเบียนต่อไปนี้ ที่จุด $(x, y, u, v) = (0, 1, 1, 2)$

(a) $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$

(c) $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, u)}$

(b) $\frac{\partial(G, F)}{\partial(u, x)}$

(d) $\frac{\partial(G, F, H)}{\partial(u, v, y)}$

6. กำหนดการแปลงเชิงเส้นที่นิยามโดย $x = u + v + w$, $y = u - v + w$, $z = u + v - w$

(a) จงพิจารณาบริเวณ R_{uvw} ในปริภูมิ UVW เมื่อบริเวณ R_{xyz} ในปริภูมิ XYZ คือลูกบาศก์ซึ่ง $0 \leq x, y, z \leq 1$

(b) จงใช้การหาปริมาตรโดยตรงเพื่อแสดงว่า

$$|J(x, y, z)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \frac{V_{xyz}}{V_{uvw}}$$

เมื่อ V_{xyz} คือปริมาตรของลูกบาศก์ R_{xyz} ในปริภูมิ XYZ และ V_{uvw} คือปริมาตรของบริเวณ R_{uvw}

7. พิจารณาระบบพิกัดทรงกลมซึ่งมีการแปลงคือ $x = u \sin v \cos w$, $y = u \sin v \sin w$ และ $z = u \cos v$

(a) จงพิจารณาบริเวณ R_{xyz} ในปริภูมิ XYZ เมื่อบริเวณ R_{uvw} ในปริภูมิ UVW คือลูกบาศก์ซึ่งปิดล้อมด้วย $u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v$, $w_0 \leq w \leq w_0 + \Delta w$ โดยที่ $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq n\pi$ และ $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ เป็นจำนวนจริงบวกที่เล็ก ๆ

(b) จงใช้การหาปริมาตรโดยตรงเพื่อแสดงว่า

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v, \Delta w) \rightarrow (0, 0, 0)} \left(\frac{\text{ปริมาตรของ } R_{xyz}}{\text{ปริมาตรของลูกบาศก์ } R_{uvw}} \right) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$$

8. ถ้า $u = \frac{x+y}{1-xy}$ และ $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ แล้ว

(a) จงหา $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$

(b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง u และ v เมื่อ $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$

9. ถ้า $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ และ $F(x, y, z) = 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dx + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dy + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dz = 0$$

10. ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันของ u, v, w และ u, v, w เป็นฟังก์ชันของ r, s, t จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)}$$

11. สมมติให้ $F(u, v, w, x, y) = 0, G(u, v, w, x, y) = 0, H(u, v, w, x, y) = 0$ จากสมการดังกล่าว เราสามารถพิจารณาให้ตัวแปรสามตัวแปรในห้าตัวแปร เป็นตัวแปรตาม โดยมีอีกสองตัวแปรที่เหลือเป็นตัวแปรต้น เช่น หากพิจารณา $\frac{\partial v}{\partial y}$ เราจะ

เห็นว่า v เป็นตัวแปรตาม โดยที่ y เป็นตัวแปรต้น แต่เรายังไม่ทราบว่าตัวแปรอิสระที่เหลือเป็นตัวแปรอะไร เราจึงกำหนดสัญลักษณ์ $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_x$ หมายถึง การหา $\frac{\partial v}{\partial y}$ โดยที่ x

เป็นค่าคงที่ และเป็นตัวแปรต้นอีกตัวหนึ่ง

$$\text{จงหา } \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_x, \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_w, \left. \frac{\partial w}{\partial u} \right|_y$$

12. ในทางเทอร์โมไดนามิกส์ ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน P ปริมาตร V และอุณหภูมิ T กำหนดโดย $F(P, V, T) = 0$ สำหรับฟังก์ชัน F ใดๆ ในเทอมของ P, V, T

(a) จงหา $\left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V, \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P$

(b) จงแสดงว่า $\left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V, \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P, \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T = -1$

1.9 การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์หลายชั้น

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยทำการเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f(g(u))g'(u)) du \quad (1.9.1)$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งไม่ว่า g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด เราสามารถเขียนสมการ (1.9.1) ให้อยู่ในรูป

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta (f(g(u))|g'(u)|) du \quad (1.9.2)$$

เมื่อ α, β เป็นขอบเขตของปริพันธ์ โดยที่ $\alpha < \beta$

จะเห็นว่า การเปลี่ยนตัวแปรดังกล่าวมีพจน์ $|g'(u)|$ ซึ่งทำให้เกิดการเปลี่ยนตัวแปรได้ ดังนั้น สำหรับกรณีปริพันธ์หลายชั้น การเปลี่ยนระบบพิกัดก็ควรดำเนินการสอดคล้องกัน ซึ่งเราได้พัฒนาแนวคิดของจาโคเบียนการแปลงแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา

จากสมบัติที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่และปริมาตรระหว่างสองระบบพิกัดดังปรากฏในทฤษฎีบท 1.8.2 และ 1.8.5 ทำให้เราสามารถเปลี่ยนระบบพิกัดการอินทิเกรตของปริพันธ์หลายชั้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.9.1 (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สองชั้น)

ถ้าการแปลง $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ส่งบริเวณ S ในระนาบ UV ไปยังบริเวณ R ในระนาบ XY และจาโคเบียน $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ไม่เป็นศูนย์ และไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน S แล้ว จะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราทราบว่าปริพันธ์สองชั้น $\iint_R f(x, y) dA_{xy}$ เปรียบเสมือนกับการหาปริมาตรที่มีพื้นที่ฐานคือ R และปิดล้อมด้านบน ซึ่งเป็นความสูงด้วย $f(x, y)$ โดยขั้นตอนโดยคร่าว ๆ ในการหาปริพันธ์สองชั้นตามปกติ ดังภาพ 1.51 คือ

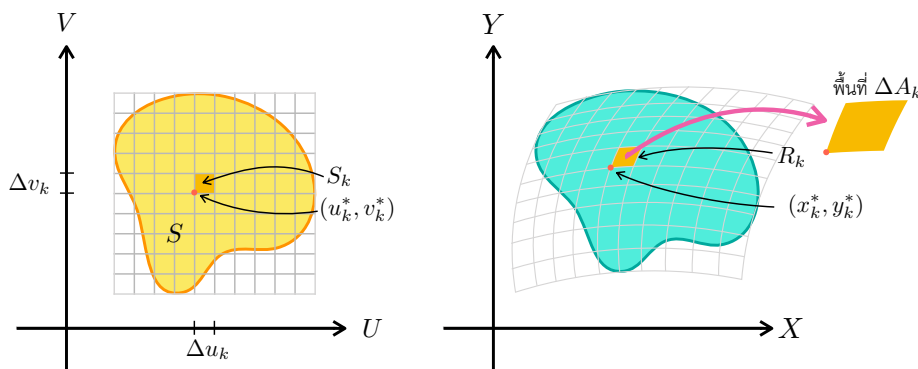
1. แบ่งบริเวณ R ออกเป็นตารางช่องเล็ก ๆ n ช่อง สมมติให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ช่องที่ k คือ ΔA_k
2. ในพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าช่องที่ k เลือกจุด (x_k^*, y_k^*) ซึ่งจะได้ความสูงของแท่งปริซึมฐานสี่เหลี่ยมนี้ ณ จุด (x_k^*, y_k^*) คือ $f(x_k^*, y_k^*)$ ทำให้ได้ปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมคือ $f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ และผลรวมของปริมาตรของปริซึม n แท่งคือ

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

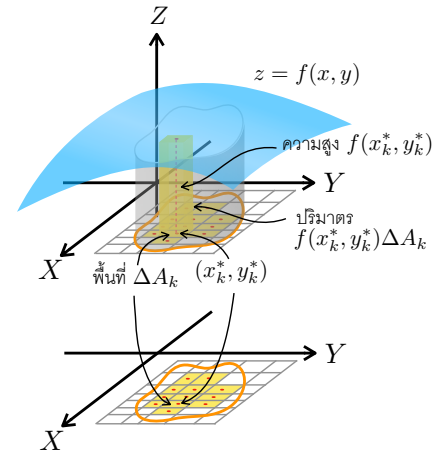
3. เมื่อเพิ่มจำนวนแท่งปริซึมให้ $n \rightarrow \infty$ จะทำให้ได้ปริมาตรที่ใกล้เคียงตามที่ต้องการ นั่นคือ

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

ในกรณีที่มีการเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์สองชั้น เราสามารถพิจารณาปัญหาดังกล่าวได้ในทำนองคล้ายกัน ดังภาพ 1.52 กล่าวคือ



ภาพที่ 1.52. การส่งสี่เหลี่ยมบริเวณจากระนาบ UV ไปยังบริเวณในระนาบ XY



ภาพที่ 1.51. นิยามของปริพันธ์สองชั้นและบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก

1. จากตารางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระนาบ UV สมมติให้ช่องที่ k คือ S_k มีความกว้าง Δu_k และความสูง Δv_k ในที่นี้ เราจะเลือกจุด (u_k^*, v_k^*) โดยไม่เสียไร้วไป เราจะเลือกจุด (u_k^*, v_k^*) เป็นจุดมุมซ้ายล่างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
2. การแปลง T ในสมมติฐานของทฤษฎีบท 1.9.1 ซึ่งแปลง $x = x(u, v), y = y(u, v)$ จะส่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า S_k ไปยังรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเชิงโค้ง R_k ในระนาบ XY และจุด (u_k^*, v_k^*) จะถูกส่งไปยังจุด $(x_k^*, y_k^*) = (x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*))$ ในบริเวณ R_k สมมติว่าพื้นที่ R_k แทนด้วย ΔA_k
3. จากความสัมพันธ์ของการแปลงของพื้นที่ ทำให้เราสามารถพิจารณาได้ว่า

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA_{xy} &\approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \\ &\approx \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u_k \Delta v_k \end{aligned}$$

โดยที่จาโคเบียนคำนวณที่จุด (u_k^*, v_k^*)

4. เมื่อให้ $n \rightarrow \infty$ ทำให้เราได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.9.2 จงคำนวณ

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x - y = 0, x - y = 1, x + y = 1, x + y = 3$

วิธีทำ จะเห็นว่า การหาปริพันธ์โดยวิธีปกติทำได้ไม่มากนัก เนื่องจากบริเวณที่หาปริพันธ์ไม่สามารถระบุขอบเขตได้ง่าย อย่างไรก็ตาม หากสังเกตจากตัวถูกปริพันธ์และขอบเขตของบริเวณที่หาปริพันธ์ จะเห็นว่า เราสมมติให้

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

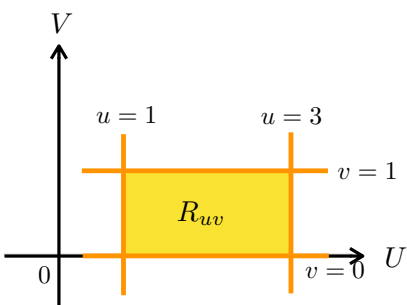
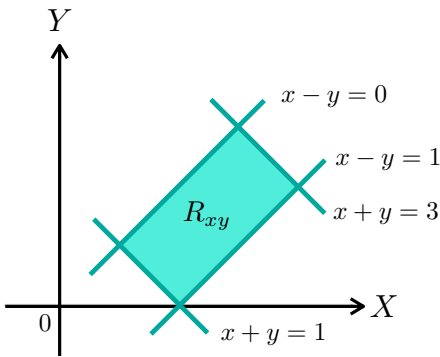
ทำให้ขอบเขตของบริเวณในระนาบ XY เปลี่ยนแปลงเป็น $u = 1, u = 3, v = 0, v = 1$ ดังภาพ 1.53

เพื่อจะใช้ทฤษฎีบท 1.9.1 เราจะหาจาโคเบียนการแปลง $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ ดังนั้น เราจึงสร้างความสัมพันธ์ x, y ในพจน์ของ u, v นั่นคือ เราได้ว่า

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

ซึ่งเราได้ว่า

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$



ภาพที่ 1.53. (บน) บริเวณในระนาบ XY
(ล่าง) บริเวณในระนาบ UV

ดังนั้น เราจึงได้ปริพันธ์สองชั้น คือ

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA &= \iint_S \frac{v}{u} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA_{uv} \\ &= \iint_S \frac{v}{u} \left| -\frac{1}{2} \right| dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_1^3 \frac{v}{u} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v \ln |u| \Big|_{u=1}^3 dv \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \int_0^1 v dv = \frac{1}{4} \ln 3\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.9.3 จงคำนวณ

$$\iint_R e^{xy} dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$

วิธีทำ เราจะเห็นว่า ตัวถูกปริพันธ์เป็นพจน์ของ e^{xy} ซึ่งการหาปริพันธ์บนบริเวณที่ปิดล้อมสามารถพิจารณาโดยวิธีปกติได้ยาก แต่หากเราทำการแปลง โดยพิจารณาขอบที่ปิดล้อม เขียนได้ในรูป

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{x} = 1, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

ดังนั้น เราสามารถแปลงขอบเขต โดยให้

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy$$

ดังนั้น ขอบเขตในระนาบ UV จะเปลี่ยนแปลงเป็น $u = 1/2, u = 1, v = 1, v = 2$ ดังภาพ 1.54 ซึ่งเราสามารถหาความสัมพันธ์ x, y ในพจน์ของ u, v ได้โดย

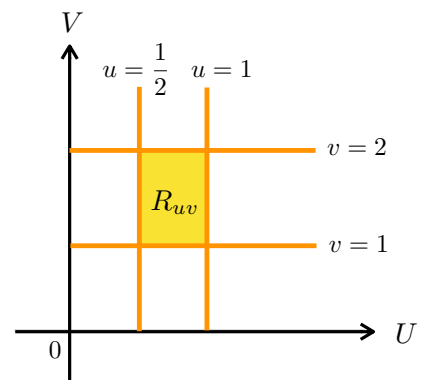
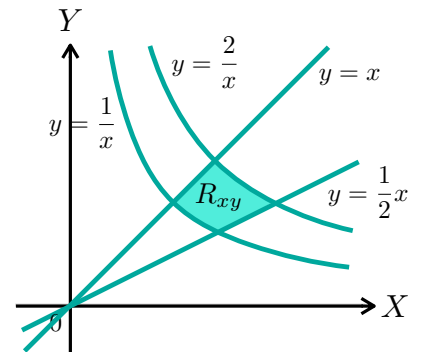
$$x = \sqrt{v/u}, \quad y = \sqrt{uv}$$

ซึ่งเราสามารถหาจาโคเบียนได้โดย

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}$$

ดังนั้น เราจึงได้ปริพันธ์สองชั้น คือ

$$\begin{aligned}\iint_R e^{xy} dA &= \iint_S e^v \left| -\frac{1}{2u} \right| dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \frac{1}{u} e^v dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{u} e^v du dv\end{aligned}$$



ภาพที่ 1.54. (บน) บริเวณในระนาบ XY
(ล่าง) บริเวณในระนาบ UV

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 e^v \ln |u| \Big|_{u=1/2}^1 dv \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 \int_1^2 e^v dv = \frac{1}{2} (e^2 - e) \ln 2
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ สังเกตว่า เราอาจใช้ทฤษฎีบท 1.8.14 ช่วยในการคำนวณหาโคเบียนได้ หากทราบว่าจาโคเบียนไม่เป็นศูนย์ เพื่อที่จะได้ไม่ต้องจัดรูป u, v ในเทอมของ x, y

ในการทำงานเดียวกันกับปริพันธ์สองชั้น ทำให้เราสามารถได้ผลสำหรับปริพันธ์สามชั้นได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.9.4 (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สามชั้น)

ถ้าการแปลง $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ ส่งบริเวณ S ในปริภูมิ UVW ไปยังบริเวณ R ในปริภูมิ XYZ และจาโคเบียน $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ ไม่เป็นศูนย์ และไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน S แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \iiint_R f(x, y, z) dR_{xyz} \\
 = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dR_{uvw}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะเห็นว่า ในการศึกษาแคลคูลัสพื้นฐานที่มีการเปลี่ยนระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉาก เป็นระบบพิกัดอื่น ๆ เช่น ระบบพิกัดเชิงขั้ว ระบบพิกัดทรงกระบอก หรือระบบพิกัดทรงกลม การเปลี่ยนระบบพิกัดนั้นต้องใช้จาโคเบียนการแปลงทั้งสิ้น ซึ่งผู้อ่านได้เห็นความสัมพันธดังกล่าวแล้วในตัวอย่าง 1.8.4, 1.8.7 และ 1.8.6

แบบฝึกหัดที่ 1.9

1. จงใช้การแปลง $u = x - 2y, v = 2x + y$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R \frac{x - 2y}{2x + y} dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x - 2y = 1, x - 2y = 4, 2x + y = 1, 2x + y = 3$

2. จงใช้การแปลง $u = x + y, v = x - y$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R (x - y) e^{x^2 - y^2} dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x + y = 0, x + y = 1, x - y = 1, x - y = 4$

3. จงใช้การแปลง $u = x^2 - y^2, v = x^2 + y^2$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R xy \, dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16$

4. จงใช้การแปลง $u = x, v = z - y, w = xy$ สำหรับคำนวณ

$$\iiint_G (z - y)^2 xy \, dV$$

เมื่อ G เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = 1, x = 3, z = y, z = y + 1, xy = 2, xy = 4$

5. จากกฎลูกโซ่ของจาโคเบียน กล่าวคือ

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1$$

จงหาปริมาตร V ของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งปิดล้อมด้วยระนาบ $x + y + 2z = \pm 3, x - 2y + z = \pm 2, 4x + y + z = \pm 6$

6. จงเลือกการแปลงที่เหมาะสมสำหรับการเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์สองชั้น เมื่อกำหนดบริเวณให้ดังนี้

(a) $\iint_R \frac{y - 4x}{y + 4x} \, dA$ เมื่อ R ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 4x, y = 4x + 2, y = 2 - 4x, y = 5 - 4x$

(b) $\iint_R \frac{\sin(x - y)}{\cos(x + y)} \, dA$ เมื่อ R ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 0, y = x, x + y = \pi/4$

(c) $\iint_R e^{(y-x)/(y+x)} \, dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีจุดยอดคือ $(0, 1), (1, 0), (0, 4), (4, 0)$

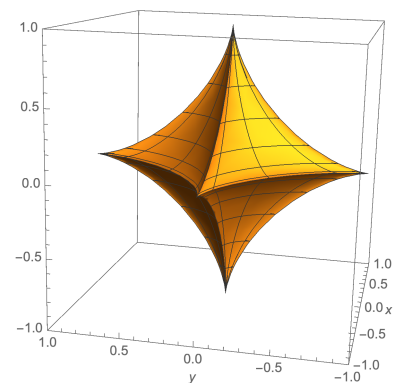
7. “ทรงกลมดาวเคราะห์น้อย” (asteroidal sphere) ดังภาพ 1.55 กำหนดสมการ

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$$

จงหาปริมาตรของทรงกลมดาวเคราะห์น้อยโดยใช้ปริพันธ์สามชั้น เมื่อกำหนด

$$x = \rho(\sin \phi \cos \theta)^3, \quad y = \rho(\sin \phi \sin \theta)^3, \quad z = \rho(\cos \phi)^3$$

โดยที่ $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$



ภาพที่ 1.55. ทรงกลมดาวเคราะห์น้อย

1.10 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

จากนิยามของอนุพันธ์ย่อย หาก f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ x, y อนุพันธ์ย่อยเทียบกับแต่ละตัวแปรก็เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรเช่นเดียวกัน หากอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ หาค่าได้แล้ว เราจะเรียกอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของอนุพันธ์ย่อยได้เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว โดยใช้นิยาม

บทนิยาม 1.10.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ f_x และ f_y หาค่าได้แล้ว อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f สามารถหาได้โดย

1. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ x เขียนแทนด้วย $f_{xx}, \partial^2 f / \partial x^2, D_{xx}f(x, y)$ หรือ $f_{xx}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$

2. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ y เขียนแทนด้วย $f_{yy}, \partial^2 f / \partial y^2, D_{yy}f(x, y)$ หรือ $f_{yy}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_y(x, y + \Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y}$$

3. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ x ก่อน แล้วจึงเทียบกับ y เขียนแทนด้วย $f_{xy}, \partial^2 f / \partial y \partial x, D_{xy}f(x, y)$ หรือ $f_{xy}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$

4. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ y ก่อน แล้วจึงเทียบกับ x เขียนแทนด้วย $f_{yx}, \partial^2 f / \partial x \partial y, D_{yx}f(x, y)$ หรือ $f_{yx}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตดังกล่าวหาค่าได้

สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสองในแบบที่ 3 และ 4 ตามนิยาม 1.10.1 จะเรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยผสม** (mixed second-order partial derivatives) ทั้งนี้ อนุพันธ์ย่อย $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ อาจเรียกว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง

เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าสองได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะเห็นว่า สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสาม จะมีอนุพันธ์ย่อยอันดับสามทั้งหมดแปดแบบ (2^3 รูปแบบที่เป็นไปได้นั่นเอง)

ตัวอย่าง 1.10.1 กำหนดให้ $f(x, y) = e^x \cos y + 2xy + y^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ จะเห็นว่า

$f_x = e^x \cos y + 2y$	$f_y = -e^x \sin y + 2x + 2y$
$f_{xx} = e^x \cos y$	$f_{yy} = -e^x \cos y + 2$
$f_{xy} = -e^x \sin y + 2$	$f_{yx} = -e^x \sin y + 2$

1.10.1 เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการเท่ากันของอนุพันธ์อันดับสูง

จากตัวอย่าง 1.10.1 จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อยผสม $f_{xy} = f_{yx}$ คำถามที่น่าสนใจ คือ อนุพันธ์ย่อยผสม f_{xy} และ f_{yx} เท่ากันเสมอในทุกกรณีหรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ไม่เสมอไปที่อนุพันธ์ย่อยผสมจะเท่ากัน

ตัวอย่างค่าน 1.10.2 (ฟังก์ชันเดียวกันกับตัวอย่าง 1.4.4) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f_{xy} และ f_{yx} เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 1.4.4 เราได้แสดงแล้วว่า

$$f_x(0, y) = \begin{cases} -y & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

และ

$$f_y(x, 0) = \begin{cases} x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f_{xy} และ f_{yx} หาได้จาก

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0 + \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1 \end{aligned}$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{yx}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(0 + \Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0, 0)$

ก่อนอื่น จะขอนิยามชั้น (class) ของฟังก์ชัน ดังนี้

บทนิยาม 1.10.2 ให้ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ และ $p \in \mathbb{N}$ แล้ว

1. f จะเป็นฟังก์ชันในชั้น C^p บนเซต V ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ย่อยอันดับ $k \leq p$ ของ f แต่ละตัว หาค่าได้และต่อเนื่องบนเซต V
2. f จะเป็นฟังก์ชันในชั้น C^∞ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันในชั้น C^p บนเซต V สำหรับทุก $p \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 1.10.3 ฟังก์ชัน $f(x, y) = e^{xy}$ เป็นฟังก์ชันในชั้น C^∞

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า อนุพันธ์ย่อยแบบผสมของฟังก์ชันมีค่าเท่ากัน หากอนุพันธ์ย่อยแบบผสมมีความต่อเนื่องบนเซตเปิด

ทฤษฎีบท 1.10.4 (ทฤษฎีบทของยัง : Young's Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนย่านใกล้เคียงจุด $N((x_0, y_0); r)$ และอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} หาค่าได้ใน $N((x_0, y_0); r)$

ถ้า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องใน $N((x_0, y_0); r)$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

พิสูจน์ ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดในย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ พิจารณา

$$D = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) \quad (1.10.1)$$

เราจะนิยามฟังก์ชัน

$$\phi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y) \quad (1.10.2)$$

$$\psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y) \quad (1.10.3)$$

ดังนั้น จะเห็นว่า D สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชัน ϕ, ψ ได้โดย

$$D = \phi(x_0, y_0+k) - \phi(x_0, y_0)$$

$$D = \psi(x_0+h, y_0) - \psi(x_0, y_0)$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า มี $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$ ที่ทำให้

$$D = k\phi_y(x_0, y_0 + \theta_1 k) = k[f_y(x_0+h, y_0 + \theta_1 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)]$$

$$D = h\psi_x(x_0 + \theta_2 h, y_0) = h[f_x(x_0 + \theta_2 h, y_0+k) - f_x(x_0 + \theta_2 h, y_0)]$$

จากนั้น ใช้ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานฟังก์ชันตัวแปรเดียวอีกครั้ง จะได้ว่า มี $0 < \theta_3 < 1$ และ $0 < \theta_4 < 1$ ที่ทำให้

$$D = hk[f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k)] \quad (1.10.4)$$

$$D = hk[f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)] \quad (1.10.5)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k) = f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)$$

เนื่องจากข้อสมมติฐานที่ว่า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องใน $N((x_0, y_0); r)$ จะได้ว่าเมื่อให้ $h \rightarrow 0$ และ $k \rightarrow 0$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

ตามต้องการ



เราอาจลดเงื่อนไขการต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อยอันดับสองตัวใดตัวหนึ่งได้ โดยที่อนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งมีค่า ก็จะสามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกันโดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมา

ทฤษฎีบท 1.10.5 (ทฤษฎีบทของชวาช : Schwarz's Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ ในโดเมนของ f ถ้าอนุพันธ์ย่อย f_y หาค่าได้ใน $N((x_0, y_0); r)$ และ f_{yx} ต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) แล้ว $f_{xy}(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และเท่ากับ $f_{yx}(x_0, y_0)$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิจารณาการสลับลำดับของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงได้ หากอนุพันธ์ย่อยสอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบท 1.10.4 เช่น หากจะพิจารณาว่า

$$f_{xyx}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y)$$

ถ้าพิจารณาได้ว่า อนุพันธ์ย่อย f ต่อเนื่องในย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ สำหรับบาง r เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 1.10.4 แสดงได้ว่า $f_{xyx} = f_{yxx}$ นั่นคือ

$$f_{yxx} = f_x(f_{yx}) = f_x(f_{xy}) = f_x(f_y(f_x)) = f_y(f_x(f_x)) = f_y(f_{xx}) = f_{xyx}$$

1.10.2 ปัญหาการเปลี่ยนตัวแปร

ในเรื่องจาโคเบียนของการแปลง เราสามารถใช้จาโคเบียนในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงได้ดังทฤษฎีบท 1.8.8 กล่าวคือ ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x, y ทำการเปลี่ยนตัวแปร x, y ในเทอมของตัวแปร u, v โดยความสัมพันธ์ $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$ หากต้องการหาอนุพันธ์ของ z เทียบกับ u, v ผ่านตัวแปร x, y หรือหาอนุพันธ์ของ z เทียบกับ x, y ในเทอมของ u, v ได้

เราทราบเคยทราบว่า

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

ดังนั้น โดยการแก้ระบบสมการ ทำให้ได้พจน์ $\partial z / \partial x$ และ $\partial z / \partial y$ กล่าวคือ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \quad (1.10.6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C \frac{\partial z}{\partial u} + D \frac{\partial z}{\partial v} \quad (1.10.7)$$

เมื่อ $A = \frac{\partial y}{\partial v} \bigg/ J, B = -\frac{\partial y}{\partial u} \bigg/ J, C = -\frac{\partial x}{\partial v} \bigg/ J, D = \frac{\partial x}{\partial u} \bigg/ J$ โดยที่ J คือ

$$\text{จาโคเบียน } J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

จะเห็นว่า สมการ (1.10.6) และ (1.10.7) เป็นสมการในพจน์ของ A, B, C, D และ $\partial z / \partial u, \partial z / \partial v$ ซึ่งไม่ปรากฏตัวแปร x, y

สร้างตัวดำเนินการจาก (1.10.6) และ (1.10.7) กำหนดโดย

$$\frac{\partial}{\partial x} = A \frac{\partial}{\partial u} + B \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = C \frac{\partial}{\partial u} + D \frac{\partial}{\partial v}$$

เมื่อแทน z ในสมการ (1.10.6) ด้วย $\partial z / \partial x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \left(A \frac{\partial}{\partial u} + B \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= A \frac{\partial}{\partial u} \left(A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) + B \frac{\partial}{\partial v} \left(A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= A^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2AB \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + B^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \\ &\quad \left(A \frac{\partial A}{\partial u} + B \frac{\partial A}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + A \left(B \frac{\partial B}{\partial u} + B \frac{\partial B}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

และเมื่อแทน z ในสมการ (1.10.7) ด้วย $\partial z / \partial y$ ก็จะได้ผลสำหรับ $\partial^2 z / \partial y^2$ เช่นกัน

เมื่อมีการเปลี่ยนตัวแปร เราสนใจว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันที่ถูกเปลี่ยนตัวแปรไป จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตัวแปรเดิม ปัญหาเหล่านี้มีความสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) เพื่อแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 1.10.6 ให้ V เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y และ $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial V}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial V}{\partial y}\end{aligned}$$

จากนั้น ทำการแก้ระบบสมการเพื่อหา $\partial V / \partial x$ และ $\partial V / \partial y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\end{aligned}$$

นิยามตัวดำเนินการ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \\
 &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\
 &\quad + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial V}{\partial r}
 \end{aligned}$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\
 &\quad - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial V}{\partial r}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

□

หมายเหตุ .

1. สำหรับฟังก์ชัน V ในพจน์ของ x, y **ลาปลาเซียน** (Laplacian) ของ V เขียนแทนด้วย $\nabla^2 V$ นิยามโดย

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

สมการ $\nabla^2 V = 0$ เรียกว่า สมการลาปลาเซียน (Laplacian equation) และฟังก์ชัน V ที่สอดคล้องกับ $\nabla^2 V = 0$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันฮาร์โมนิก (harmonic function)

2. ถ้าฟังก์ชัน V สอดคล้องกับ $\nabla^4 V = 0$ แล้ว จะเรียก f ว่า ฟังก์ชันไบฮาร์โมนิก (biharmonic function) โดยที่กำหนดตัวดำเนินการ

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2), \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}, \nabla^2 = \nabla(\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3. สมการ (1.10.6) ด้านขวา ซึ่งเกิดจากการแปลงพิกัดจากเป็นพิกัดเชิงขั้ว จะเรียกว่า รูปเชิงขั้วของสมการลาปลาซ (the polar form of Laplacian equation)

แบบฝึกหัดที่ 1.10

- กำหนดให้ $\phi(x, y) = x^4y + e^{x^2y}$
 - จงหา $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yx}, \phi_{yy}$
 - $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
- ให้ $z = f(u)$ และ $u = g(x, y)$ จงแสดงว่า
 - $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{dz}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 z}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$
 - $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{dz}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{d^2 z}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$
 - $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{d^2 z}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$
- กำหนดให้ $z = x^2 \arctan(y/x)$ จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ที่ $(1, 1)$
- กำหนดให้ $w = \ln(e^r + e^s + e^t + e^u)$ จงแสดงว่า $w_{rstu} = -6e^{r+s+t+u-4w}$
(คำใบ้: ใช้ความสัมพันธ์ $e^w = e^r + e^s + e^t + e^u$)
- กำหนดให้ $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ จงแสดงว่า U เป็นไม่ฟังก์ชันฮาร์มอนิก
- กำหนดให้ $z = \arctan \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} \right)$
 - จงแสดงว่า z เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก
 - จงใช้การแปลง $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ เพื่อแสดงว่า การแปลงดังกล่าวสอดคล้องกับรูปเชิงขั้วของสมการลาปลาซ
- กำหนดฟังก์ชัน $u(x, y), v(x, y)$ สมการโคชี-รีมันน์ (Cauchy-Riemann equations) คือสมการที่สอดคล้องกับ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- จงแสดงว่า $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์
 - กำหนดการแปลง $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ จงหารูปเชิงขั้วของสมการโคชี-รีมันน์ (the polar form of the Cauchy-Riemann equations)
- กำหนดให้ $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) จงแสดงว่า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบท 1.10.4 (คำใบ้: แสดงว่า f_{yx} ไม่ต่อเนื่องที่ $(0, 0)$)
- (b) จงแสดงว่า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบท 1.10.5 (คำใบ้: แสดงว่า f_x หรือ f_y หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0, 0)$)
- (c) จงแสดงว่า $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$

10. ถ้า $F(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2 แล้ว จงแสดงว่า

$$x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2F$$

11. กำหนดการแปลง $u = x - ct, v = x + ct$ สำหรับค่าคงที่ c จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ สามารถลดรูปได้เป็นสมการ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

12. กำหนดให้ V เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y และ $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

(a) จงหา $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ ในเทอมของ $\partial V / \partial r$ และ $\partial V / \partial \theta$

(b) จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}$

(c) จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$

1.11 อนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียว สมมติให้ f หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่จุด x_0 แล้ว **อนุกรมเทเลอร์** (Taylor series) ของ f กระจายรอบจุด $x = x_0$ สามารถเขียนได้เป็น

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots$$

ทั้งนี้ เมื่อกระจายพหุนามเทเลอร์รอบจุด $x = x_0$ ถึงพจน์ที่ n จะได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}$$

โดยที่ R_{n+1} คือพจน์เศษเหลือ นั่นคือ $R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$ สำหรับบาง $0 < \theta < 1$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายแนวคิดของอนุกรมเทเลอร์จากฟังก์ชันตัวแปรเดียว ไปสู่อนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.11.1 ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ $n + 1$ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) โดยที่จุด $(x_0 + h, y_0 + k)$ อยู่ในโดเมนแล้ว มีจำนวนจริงบวก $0 < \theta < 1$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

เมื่อ $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f = hf_x + kf_y$, $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$ โดยที่ $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n$ อยู่ในรูปการกระจายทวินาม และ **พจน์เศษเหลือ** (remainder term)

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

พิสูจน์ ให้ $x = x_0 + th, y = y_0 + tk$ สำหรับตัวแปรเสริม t ซึ่ง $0 \leq t \leq 1$ นิยามฟังก์ชัน

$$f(x, y) = f(x_0 + th, y_0 + tk) = \phi(t)$$

เนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ n ของ f ต่อเนื่องในโดเมน ดังนั้น $\phi^{(n)}(t)$ ต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \\ \phi''(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \\ &\vdots \\ \phi^{(n)}(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อพิจารณาอนุกรมเทเลอร์ของ $\phi(t)$ รอบ $t = 0$ จะได้ว่า

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2!}\phi''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}\phi^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta t)$$

สำหรับบาง $0 < \theta < 1$ ถ้าให้ $t = 1$ จะได้ว่า

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + \dots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta)$$

แต่เนื่องจาก $\phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$ และ $\phi(0) = f(x_0, y_0)$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ \phi''(0) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) \\ &\vdots \\ \phi^{(n+1)}(\theta) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1}\end{aligned}$$

และมีพจน์พจน์พิเศษเหลือคือ

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

ซึ่ง $0 < \theta < 1$

□

ตัวอย่าง 1.11.2 จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \arctan(y/x)$ รอบจุด $(1, 1)$ จนถึงพจน์ที่มีระดับชั้น 2

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} & f(1, 1) &= \frac{\pi}{4} \\ f_x(x, y) &= -\frac{y}{x^2 + y^2} & f_x(1, 1) &= -\frac{1}{2} \\ f_y(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} & f_y(1, 1) &= \frac{1}{2} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & f_{xx}(1, 1) &= \frac{1}{2} \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & f_{xy}(1, 1) &= 0 \\ f_{yy}(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & f_{yy}(1, 1) &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

สมมติให้ $x = 1 + h, y = 1 + k$ โดยทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\arctan \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 \right] + \dots$$

ทั้งนี้ หากกระจายถึงพจน์ที่มีระดับชั้น 2 จะสามารถหาพจน์เศษเหลือได้คือ

$$R_3 = \frac{1}{3!} \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1))$$

โดยที่ $0 < \theta < 1$

เราอาจแทนตัวดำเนินการ $D^n = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n$ ดังนั้น อนุกรมเทเลอร์ในทฤษฎีบท 1.11.1 สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} D^2 f(x_0, y_0) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} D^n f(x_0, y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

โดยที่ $\frac{1}{(n+1)!} D^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$

ทั้งนี้ เราสามารถขยายแนวคิดของอนุกรมเทเลอร์ดังกล่าวในกรณีที่มีฟังก์ชันมากกว่าสองตัวแปรได้ โดยใช้การเขียนสัญลักษณ์แบบการกระจายทวินามเช่นกัน

นอกจากรูปแบบที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว เราอาจเขียนอนุกรมเทเลอร์ได้อีกรูปแบบ กล่าวคือ เมื่อให้ $x = x_0 + h, y = y_0 + k$ จะได้ว่า อนุกรมเทเลอร์ของ f รอบจุด (x_0, y_0) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_0, y_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

โดยที่

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x_0 + (x-x_0)\theta, y_0 + (y-y_0)\theta)$$

ซึ่ง $0 < \theta < 1$

ตัวอย่าง 1.11.3 จงเขียนพหุนาม $x^2y + 3y - 2$ ในพจน์ของ $x-1$ และ $y+2$ โดยกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $(x_0, y_0) = (1, -2)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$f(x, y) = x^2y + 3y - 2$	$f(1, -2) = -10$
$f_x(x, y) = 2xy$	$f_x(1, -2) = -4$
$f_y(x, y) = x^2 + 3$	$f_y(1, -2) = 4$
$f_{xx}(x, y) = 2y$	$f_{xx}(1, -2) = -4$
$f_{xy}(x, y) = 2x$	$f_{xy}(1, -2) = 2$
$f_{yy}(x, y) = 0$	$f_{yy}(1, -2) = 0$

$$f_{xxx}(x, y) = 0 = f_{yyy}(x, y)$$

$$f_{yxx}(1, -2) = 2 = f_{xyx}(1, -2)$$

ซึ่งจะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่เป็นต้นไปทั้งหมด มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} x^2y + 3y - 2 &= -10 - (x-1) + 4(y+2) + \frac{1}{2}[-4(x-1)^2 + 4(x-1)(y+2)] \\ &\quad + \frac{1}{3!}3(x-1)^2(y+2)(2) + 0 \\ &= -10 - (x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) \\ &\quad + (x-1)^2(y+2) \end{aligned}$$

ในกรณีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถทำการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามเทเลอร์ได้ ซึ่งมีความหมายคือ การหาเส้นโค้งพหุนามที่จุด $x = x_0$ ซึ่งถ้าเราเลือกจุดที่อยู่ใกล้ ๆ x_0 ก็จะได้เส้นกราฟของ $p_n(x)$ ที่ใกล้เคียง $f(x)$ ในย่านใกล้ ๆ x_0 ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร เราสามารถหาพื้นผิวที่ใช้ในการประมาณค่าของพื้นผิวเดิมได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.11.4 จงประมาณพื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $P_0(0, 1, e)$

วิธีทำ พื้นผิวของ f แสดงดังภาพ 1.56 (บน) จะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องสำหรับทุกอันดับ ดังนั้น เราจึงสามารถประมาณค่าของ f รอบจุด $(x, y) = (0, 1)$ ได้โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ กล่าวคือ ถ้าทำการประมาณค่าด้วยพหุนามเทเลอร์ระดับชั้น 1 จะได้ว่า

$$z = f(x, y) \approx f(0, 1) + xf_x(0, 1) + (y-1)f_y(0, 1)$$

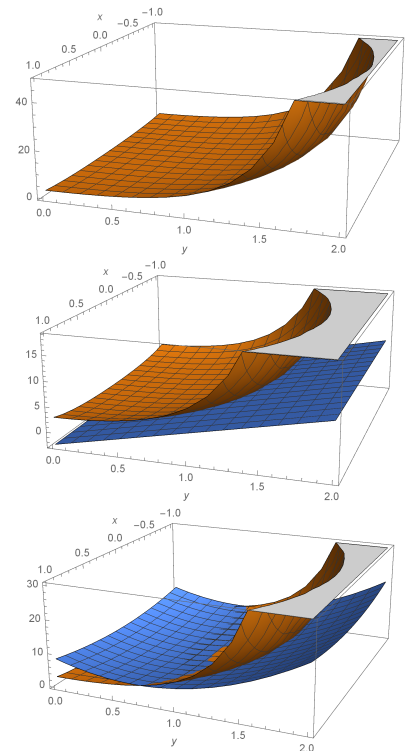
นั่นคือ พื้นผิวของ f ใกล้ ๆ จุด P สามารถประมาณได้โดยระนาบ

$$z = e + 2e(y-1)$$

ดังภาพ 1.56 (กลาง) และทำนองเดียวกัน ถ้าทำการประมาณ $f(x, y)$ ด้วยพหุนามเทเลอร์ระดับชั้น 2 จะทำให้ได้พื้นผิวประมาณ

$$\frac{z}{e} = \frac{2}{3} + x^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2$$

ดังภาพ 1.56 (ล่าง)



ภาพที่ 1.56. (บน) กราฟของ f , (กลาง) กราฟของ f และการประมาณด้วยระนาบ, (ล่าง) กราฟของ f และการประมาณด้วยพาราโบลอยด์

แบบฝึกหัดที่ 1.11

1. จงกระจายพจน์ $x^4 + x^2y^2 - y^4$ รอบจุด $(1, 1)$ จนถึงระดับชั้น 2 พร้อมทั้งหา R_3
2. จงกระจายพจน์ $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ รอบจุด $(0, 0)$ จนถึงระดับชั้น 2 พร้อมทั้งหา R_3
3. จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin x \sin y$ รอบจุด $(0, 0)$ จนถึงระดับชั้น 4 และเปรียบเทียบผลกับการหาผลคูณระหว่างอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin x$ และ $\sin y$
4. จงแสดงว่า การกระจาย $\sin xy$ ในรูปของกำลังของ $x - 1$ และ $y - \frac{\pi}{2}$ จนถึงระดับชั้น 2 อยู่ในรูป

$$1 - \frac{1}{8}\pi^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}\pi(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

5. จงกระจาย $e^x \arctan y$ รอบจุด $(1, 1)$ จนถึงระดับชั้น 2 ในรูปของกำลังของ $(x-1)$ และ $(y-1)$
6. จงแสดงว่า สำหรับ $0 < \theta < 1$ แล้ว

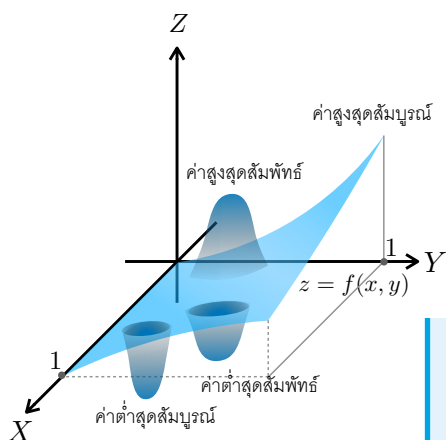
$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6}[(x^3 + 3xy^2) \cos \theta x \sin \theta y + (y^3 + 3x^2y) \sin \theta x \cos \theta y]$$

7. จงแสดงว่า

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$, $x > 0$, $y > 0$ (คำใบ้: กระจายอนุกรมเทเลอร์ โดยให้พจน์เศษเหลือเป็นพจน์ที่มีอนันต์อันดับหนึ่ง)

1.12 ค่าสูงสุดและต่ำสุด



ภาพ ที่ 1.57. ค่า สูงสุด สัมพัทธ์ และ สัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

มิ่งในการประยุกต์ที่สำคัญในทางคณิตศาสตร์คือการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจากฟังก์ชันกำหนดให้ ในแคลคูลัสพื้นฐานเราได้ศึกษาวิธีการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ทั้งฟังก์ชันตัวแปรเดียวและฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในหัวข้อนี้เราจะเริ่มต้นจากการทบทวนนิยามพื้นฐาน จากนั้นจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เคยศึกษาในแคลคูลัสพื้นฐาน และศึกษาการหาค่าเหมาะที่สุดโดยวิธีพื้นฐาน โดยที่นี้จะศึกษาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปรและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 1.12.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ x, y

1. จะกล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้ามีย่านจุดเปิด $N((x_0, y); r)$ ซึ่ง $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y); r)$
2. จะกล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในโดเมนของ f
3. จะกล่าวว่า f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้ามีย่านจุดเปิด $N((x_0, y_0); r)$ ซึ่ง $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y_0); r)$

$$N((x_0, y_0); r)$$

4. จะกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในโดเมนของ f

ถ้า f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเรียกว่า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) และถ้า f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์ จะเรียกว่า f มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extremum) ภาพ 1.57 แสดงให้เห็นถึงค่าสุดขีดต่าง ๆ ในบริเวณที่กำหนด

การพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์จำเป็นต้องพิจารณาค่าของฟังก์ชันบริเวณขอบของบริเวณที่สนใจด้วย เราจะยกทฤษฎีดังกล่าวโดยไม่พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.12.1 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : Extremum-value Theorem)

ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R ซึ่งเป็นบริเวณปิดและมีขอบเขตแล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน R

เราจะเริ่มต้นหาค่าสุดขีดจากการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ซึ่งก่อนอื่นเราจะพิจารณาสมบัติที่เกี่ยวข้อง เมื่อฟังก์ชันมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.12.2 ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ f หาค่าได้ที่จุดดังกล่าวแล้ว จะได้ว่า

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{และ} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์กรณี f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ สำหรับกรณีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) ดังนั้น จะมีย่านจุดเปิด $N((x_0, y_0); r)$ ที่ทำให้ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y_0); r)$ จะแสดงว่า $f_x(x_0, y_0) = 0$

ดังนั้น สำหรับจุด $(x_0 + \Delta x, y_0) \in N((x_0, y_0); r)$ จะได้ว่า $f(x_0 + \Delta x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ นั่นคือ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0 \quad (1.12.1)$$

ต่อมา หารอสมการ (1.12.1) ด้วย Δx ทั้งอสมการ ทำให้ต้องแบ่งกรณีดังนี้
ถ้า $\Delta x > 0$ จะได้อสมการ

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\Delta x \rightarrow 0^+$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

ถ้า $\Delta x < 0$ จะได้อสมการ

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\Delta x \rightarrow 0^-$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

แต่เนื่องจาก $f_x(x_0, y_0)$ หาค่าได้ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

จากสมการทั้งสอง จึงได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = 0$$

นั่นคือ $f_x(x_0, y_0) = 0$ ตามต้องการ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า $f_y(x_0, y_0) = 0$ รวมถึงกรณีที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันว่า $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ $\square$

เราทราบว่าสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จุดวิกฤติ $x = x_0$ ของฟังก์ชัน f คือจุด x_0 ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = x_0$ ดังนั้นเราจึงสามารถขยายไปสู่กรณีฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

บทนิยาม 1.12.2 จุด (x_0, y_0) ในโดเมนของฟังก์ชัน $f(x, y)$ จะเรียกว่า **จุดวิกฤติ** (critical point) ถ้า $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ หรืออนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งหมดของ f ที่จุด (x_0, y_0) หาค่าไม่ได้

จากทฤษฎีบท 1.12.2 จะเห็นว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่จุดวิกฤติ อย่างไรก็ตามหากเราพิจารณาจุดวิกฤติ อาจมีบางจุดวิกฤติที่ไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือบทกลับของทฤษฎีบท 1.12.2 ไม่จริงเสมอไป ดังตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้

ตัวอย่างค้าน 1.12.3 พิจารณาไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ ดังภาพ 1.58 กำหนดสมการ

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

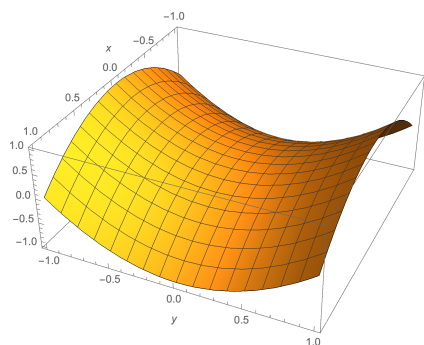
จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y) = -2x$ และ $f_y(x, y) = 2y$ ซึ่งจะพบว่า $f_x(0, 0) = 0$ และ $f_y(0, 0) = 0$ แต่ f ไม่เกิดทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(0, 0)$

จุดที่เกิดเหตุการณ์ดังกล่าวตามตัวอย่างค้าน 1.12.3 จะนิยามดังนี้

บทนิยาม 1.12.3 สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ แล้ว จุด (x_0, y_0) เป็น **จุดอานม้า** (saddle point) ของฟังก์ชัน f ถ้ามีระนาบแนวตั้งสองระนาบที่ต่างกันที่ผ่านจุด (x_0, y_0) ซึ่งรอยตัดระหว่างพื้นผิว z กับระนาบหนึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) และอีกระนาบหนึ่งมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0)

ดังนั้น จุด $(0, 0)$ ในตัวอย่าง 1.12.3 เป็นจุดวิกฤติที่เป็นจุดอานม้า

คำถามที่น่าสนใจคำถามหนึ่งคือ เราจะสามารถจำแนกลักษณะของค่าของฟังก์ชันที่



ภาพที่ 1.58. กราฟของ $f(x, y) = y^2 - x^2$ ซึ่งเกิดจุดอานม้า

เกิดจากจุดวิกฤตได้หรือไม่ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะตอบคำถามดังกล่าว

ทฤษฎีบท 1.12.4 ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรโดยที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและสองต่อเนื่องในย่านจุดเปิด $N((x_0, y_0); r)$ และสมมติว่า $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$ แล้ว

1. ถ้า $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ แล้ว $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ แล้ว $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
3. ถ้า $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$ แล้ว จุด (x_0, y_0) เป็นจุดอานม้าของ f
4. ถ้า $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0$ แล้ว ไม่สามารถสรุปได้

แนวคิด ในส่วนนี้เราจะแสดงว่า $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือสูงสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น เราจึงหยิบจุด $(x_0 + h, y_0 + k)$ ใด ๆ ในย่านจุดเปิด $N((x_0, y_0); r)$ เพื่อจะแสดงว่า ถ้า $f(x_0, y_0) \geq f(x_0 + h, y_0 + k)$ แล้ว $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และทำนองเดียวกันก็จะแสดงว่า ถ้า $f(x_0, y_0) \leq f(x_0 + h, y_0 + k)$ แล้ว $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

พิสูจน์ สมมติให้จุด $(x_0 + h, y_0 + k)$ เป็นจุดในย่านจุดเปิด $N((x_0, y_0); r)$ จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์จนถึงพจน์ที่มีระดับชั้น 1 พร้อมพจน์เศษเหลือ จะได้ว่า สำหรับ $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + [hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2!} [h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \\ &\quad + 2hk f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$ และเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับสองมีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) จึงได้ว่า มี ρ_1, ρ_2, ρ_3 ที่เป็นฟังก์ชันของ h, k ซึ่ง $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \rightarrow 0$ เมื่อ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xx}(x_0, y_0) &= \rho_1 \\ f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xy}(x_0, y_0) &= \rho_2 \\ f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{yy}(x_0, y_0) &= \rho_3 \end{aligned}$$

ดังนั้น เราเขียน $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ ได้ในรูป

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + \rho] \quad (1.12.2)$$

เมื่อ $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \rightarrow 0$ เมื่อ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ และไม่ทราบเครื่องหมายของ ρ ดังนั้น เราจึงจะพิจารณาเครื่องหมายตามแต่ละกรณีของ $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ ซึ่ง จะ ขึ้น อยู่ กับ เครื่องหมาย ของ พจน์ $f_{xx}(x_0, y_0)h^2 +$

$2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + \rho$ ดังนี้

สมมติให้ $G = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$ ดังนั้น สมการ (1.12.2) จะพิจารณาได้เป็น

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}[G + \rho] \quad (1.12.3)$$

สมมติให้ $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ จะเห็นว่า G เขียนได้อยู่ในรูป

$$G = \frac{(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 + k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0))}{f_{xx}(x_0, y_0)} \quad (1.12.4)$$

สำหรับพจน์ทางขวามือ เราสามารถพิจารณาเป็นกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. กรณี G ไม่เป็นศูนย์และไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย เนื่องจาก $\rho \rightarrow 0$ เมื่อ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ $G + \rho$ คือเครื่องหมายเดียวกันกับ G ดังนั้น เครื่องหมายของ $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ ก็จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ G
2. กรณี G สามารถเปลี่ยนเครื่องหมายได้ เนื่องจาก $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ และ G มีเครื่องหมายเหมือนกัน เมื่อ ρ เล็ก ๆ ดังนั้น $f(x_0, y_0)$ ไม่เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์
3. กรณี G เป็นศูนย์ จะเห็นว่าเครื่องหมายของ $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ ขึ้นอยู่กับ ρ เราจึงไม่สามารถสรุปได้

จาก สมการ (1.12.3) จะพบว่า เครื่องหมายของ G ขึ้นอยู่กับ เครื่องหมายของ $(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 + k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0))$ เราจึงแยกกรณีย่อยได้ต่อไปนี้

- ถ้า $\frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)}{f_{xx}(x_0, y_0)} > 0$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ G ขึ้นอยู่กับ f_{xx} เราจึงได้ว่า
 - ถ้า $f_{xx} > 0$ แล้ว $G > 0$ จะได้ว่า $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geq 0$ นั่นคือ $f(x_0, y_0)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
 - ถ้า $f_{xx} < 0$ แล้ว $G < 0$ จะได้ว่า $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0$ นั่นคือ $f(x_0, y_0)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $\frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)}{f_{xx}(x_0, y_0)} < 0$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ G อาจจะเป็นบวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับ $(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 > k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)) < 0$ หรือ $(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 < k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)) < 0$ ขึ้นอยู่กับค่าของ (h, k) ดังนั้น G จะไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์
- ถ้า $\frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)}{f_{xx}(x_0, y_0)} = 0$ จะได้ว่า ตัวเศษของ G เป็นพจน์กำลังสองสมบูรณ์ แต่อาจมีค่าเป็นศูนย์ ขึ้นอยู่กับ (h, k) ที่ซึ่ง $f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k = 0$ ซึ่งทำให้ไม่สามารถสรุปได้

จากกรณีต่าง ๆ ทำให้สามารถสรุปทฤษฎีได้ตามต้องการ

□

ตัวอย่าง 1.12.5 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

วิธีทำ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 12$$

ทำการหาจุดวิกฤติ โดยให้ $f_x(x, y) = 0$ และ $f_y(x, y) = 0$ จะได้ว่า

$$x = 1, -1 \text{ และ } y = 2, -2$$

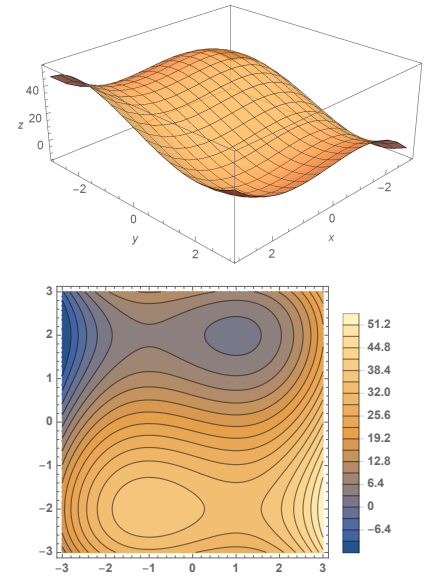
ดังนั้น จุดวิกฤติจะมี 4 จุด ประกอบด้วย $(1, 2), (-1, 2), (1, -2), (-1, -2)$ ต่อไปจะนำจุดวิกฤติทั้งสี่ไปตรวจสอบ พิจารณา

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 6y$$

โดยใช้ทฤษฎีบท 1.12.4 จะสรุปผลการตรวจสอบ ดังนี้

จุด (x_0, y_0)	f_{xx}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	สรุปผล
$(1, 2)$	$6 > 0$	$72 > 0$	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์, $f(1, 2) = 2$
$(-1, 2)$	$-6 < 0$	$-72 < 0$	เป็นจุดอานม้า
$(1, -2)$	$6 > 0$	$-72 < 0$	เป็นจุดอานม้า
$(-1, -2)$	$-6 < 0$	$72 > 0$	ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์, $f(-1, -2) = 37$

นั่นคือ f เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1, 2)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1, 2) = 2$
และ f เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-1, -2)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1, -2) = 37$



ภาพที่ 1.59. (บน) กราฟของ f ในตัวอย่าง 1.12.5 (ล่าง) เส้นชั้นความสูงของ f

1.12.1 ค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด

นิยามของค่าสุดขีดสัมบูรณ์นิยาม 1.12.1 สำหรับการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด เราจำเป็นต้องหาค่าสุดขีดของทุก ๆ จุด ซึ่งนอกเหนือจากจุดที่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์แล้ว จุดที่อยู่บริเวณขอบของบริเวณที่สนใจจะต้องถูกนำมาพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบค่า และก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมบูรณ์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

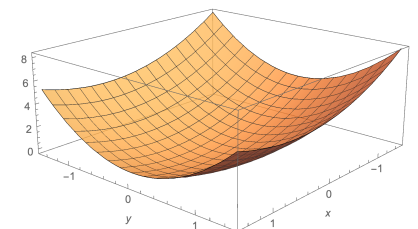
ตัวอย่าง 1.12.6 จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ บนบริเวณปิด $x^2 + y^2 \leq 1$

วิธีทำ ก่อนอื่น เราจะพิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f ดังขั้นตอนต่อไปนี้

$$f_x(x, y) = 2x - 1, \quad f_y(x, y) = 4y$$

ทำการหาจุดวิกฤติ โดยให้ $f_x(x, y) = 0$ และ $f_y(x, y) = 0$ จะได้ว่า

$$x = \frac{1}{2} \text{ และ } y = 0$$



ภาพที่ 1.60. กราฟของ f ในตัวอย่าง 1.12.6

ดังนั้น จุดวิกฤติจึงมีหนึ่งจุด คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ต่อไป นำจุดวิกฤติไปตรวจสอบ จะเห็นว่า

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 4$$

และเนื่องจาก $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0$ โดยที่ $f_{xx} = 2 > 0$ จึงได้ว่า f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

ต่อไปเราจะพิจารณาจุดที่อยู่บนขอบของบริเวณวงกลม $x^2 + y^2 \leq 1$ พิจารณาความสัมพันธ์

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

ดังนั้น เมื่อแทน $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ใน f นั่นคือ

$$f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x^2 + 2(1-x^2) - x = 2 - x - x^2$$

สมมติให้ $g(x) = 2 - x - x^2$ พบว่า จะหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f ภายใต้เงื่อนไขของค่า x คือ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น เราจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวก่อน นั่นคือ ทำการหาจุดวิกฤติของ g โดยให้ $g'(x) = 0$ นั่นคือ

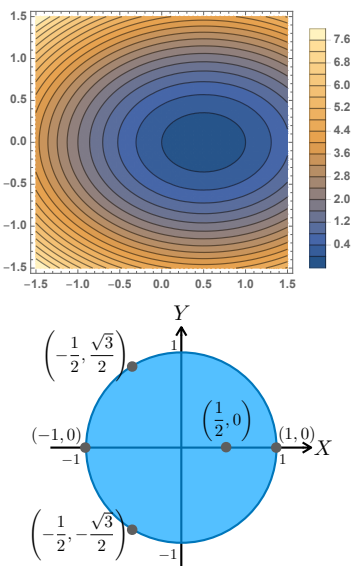
$$g'(x) = -1 - 2x = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$ โดยการตรวจสอบด้วยวิธีอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $g''(x) = -2 < 0$ แสดงว่า $x = -\frac{1}{2}$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ g

- เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ จะได้ว่า $y = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ คู่อันดับซึ่งสอดคล้องกับ $x = -\frac{1}{2}$ และ f คือ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- พิจารณาจุดขอบของ g จะเห็นว่า เมื่อ $x = 1, -1$ จะได้ว่า $y = 0$ ดังนั้น คู่อันดับทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของจุดขอบคือ $(1, 0), (-1, 0)$

นำจุดทั้งหมดมาพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน สรุปได้ดังตาราง

จุด (x_0, y_0)	ค่าของ $f(x_0, y_0)$	สรุปผล
$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$-\frac{1}{4}$	ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{9}{4}$	ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{9}{4}$	ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์
$(-1, 0)$	0	
$(1, 0)$	$2 < 0$	



ภาพที่ 1.61. (บน) เส้นชั้นความสูงของ f (ล่าง) จุดในบริเวณปิดทั้งหมดของโดเมนที่นำมาพิจารณา

ตัวอย่าง 1.12.7 จงหาความกว้าง ยาว และสูงของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฝาเปิด ซึ่งมีปริมาตร V โดยต้องการให้ใช้วัสดุในการทำกล่องที่น้อยที่สุด

วิธีทำ ก่อนอื่น สมมติให้ V เป็นปริมาตรของกล่อง x แทนความกว้างของกล่อง y แทนความยาวของกล่อง และ z แทนความสูงของกล่อง โดยที่ S คือพื้นที่ผิวของกล่อง เราต้องการทำให้พื้นที่ผิวของกล่องมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ ต้องการหาค่าต่ำสุดของ

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$V = xyz$$

จากปัญหาดังกล่าว จะเห็นว่าฟังก์ชัน S เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เมื่อ $x, y, z > 0$ อย่างไรก็ตาม เราสามารถลดตัวแปรลงได้หนึ่งตัวแปรจากเงื่อนไข $z = V/xy$ ดังนั้น S จะเขียนได้เป็น

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \quad (1.12.5)$$

ดังนั้น S จึงเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y ต่อไปจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ โดยการหาจุดวิกฤติของ S นั่นคือ

$$S_x = -\frac{2V}{x^2} + y, \quad S_y = -\frac{2V}{y^2} + x$$

หาจุดวิกฤติ โดยให้ $S_x = 0 = S_y$ จึงได้ว่า

$$y = \frac{2V}{x^2} \text{ และ } x = \frac{2V}{y^2}$$

แก้ระบบสมการทั้งสอง โดยการแทนค่า $y = \frac{2V}{x^2}$ ลงใน $x = \frac{2V}{y^2}$ จะได้ว่า

$$0 = x - \frac{2V}{4V^2}x^4 = x \left(1 - \frac{x^3}{2V} \right)$$

เนื่องจาก $x \neq 0$ ดังนั้น $x = \sqrt[3]{2V}$ จะได้ว่า $y = \sqrt[3]{2V}$ จะได้จุดวิกฤติคือ $(x = \sqrt[3]{2V}, y = \sqrt[3]{2V})$

ทำการทดสอบจุดวิกฤติ โดยพบว่า

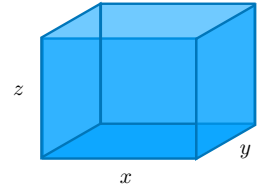
$$S_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3}$$

พบว่า ที่จุด $(x = \sqrt[3]{2V}, y = \sqrt[3]{2V})$ ได้ว่า

$$S_{xx} = 2, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy} = 2$$

เนื่องจาก $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$ โดยที่ $f_{xx} = 2 > 0$ จึงได้ว่า f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ โดยมีค่า $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ และมีพื้นที่ผิวคือ

$$S(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}) = 3\sqrt[3]{4V^2}$$



ภาพที่ 1.62. กล่องที่ต้องการหาพื้นที่ผิว

ต่อไป จะพิจารณาว่าที่จุด $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วยหรือไม่ นั่นคือ ถ้า $(x, y) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์จริง จะได้ว่า $3\sqrt[3]{4V^2} < S(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในจุดภาคที่หนึ่ง

จากสมการ (1.12.5) ถ้า $3\sqrt[3]{4V^2} < S$ แล้ว จะเห็นว่า เงื่อนไขดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับอสมการ

$$xy > 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{y} > 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{x} > 3\sqrt[3]{4V^2}$$

อย่างน้อยหนึ่งอสมการ

ดังนั้น เพื่อที่จะแสดงว่า $3\sqrt[3]{4V^2} \leq S$ บรรดาเซตของจุด (x, y) จึงสามารถลดมาพิจารณาบรรดาจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับระบบอสมการ

$$xy \leq 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{y} \leq 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{x} \leq 3\sqrt[3]{4V^2}$$

นั่นคือ อสมการดังกล่าวสามารถพิจารณาได้เป็น

$$xy \leq 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad y \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{2V}, \quad x \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{2V}$$

ซึ่งนิยามบริเวณปิด R ได้ดังภาพ 1.63

เนื่องจาก S เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณปิด R ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.12.1 จะได้ว่า S มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ณ จุดในบริเวณ R เนื่องจากจุด $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ อยู่ในบริเวณ R และ $3\sqrt[3]{4V^2} < S$ บนขอบของ R จึงได้ว่า ค่าต่ำสุดของ S จึงต้องเกิดบริเวณจุดภายในของ S

ดังนั้น พื้นที่ผิวสูงสุดของกล่องมีค่าเท่ากับ $3\sqrt[3]{4V^2}$ ตารางหน่วย เมื่อมีความกว้าง ยาว และสูงของกล่องเป็น $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ หน่วย ตามลำดับ

มีข้อสังเกตที่พึงระวังว่า ทฤษฎีบททางทฤษฎีในฟังก์ชันตัวแปรเดียว อาจไม่เป็นจริงในฟังก์ชันหลายตัวแปร เช่น ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทในฟังก์ชันตัวแปรเดียว

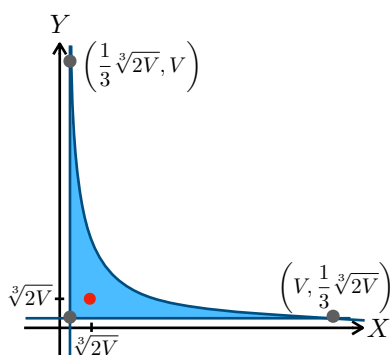
ทฤษฎีบท 1.12.8 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่มีความต่อเนื่อง และมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ค่าเดียวบนช่วงที่จุด x_0 แล้ว จะได้ว่า ถ้า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ [สูงสุดสัมพัทธ์] ที่จุด x_0 แล้ว $f(x_0)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ [สูงสุดสัมบูรณ์] บนช่วงนั้น

อย่างไรก็ตาม ผลในทฤษฎีบทดังกล่าวอาจไม่จริงสำหรับกรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร ดังตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้ ซึ่งจะให้ผู้อ่านแสดงเป็นแบบฝึกหัด

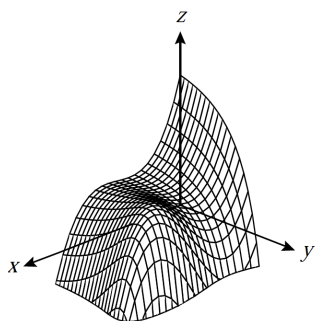
ตัวอย่างค้าน 1.12.9 ฟังก์ชัน $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ มีจุดวิกฤติเพียงจุดเดียว และมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤตินั้น แต่ f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์

กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างค้าน 1.12.9 แสดงดังภาพที่ 1.64 โดยทฤษฎีบทดังกล่าวจึงเป็นเหตุผลที่เราจะต้องแสดงว่า สำหรับตัวอย่าง 1.12.7 คำตอบที่ได้ซึ่งเกิดขึ้นในบริเวณที่พิจารณานั้น ค่าที่ได้เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์อย่างแท้จริง

ทั้งนี้ ในแบบฝึกหัดที่ 1.12 ข้อที่ 6 มีสถานการณ์ในทำนองคล้ายกันเช่นกัน



ภาพที่ 1.63. บริเวณ R ในการพิจารณาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์



ภาพที่ 1.64. ฟังก์ชัน $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

แบบฝึกหัดที่ 1.12

- กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า (ถ้ามี)
 - $f(x, y) = x^2 + xy + 4y + 2x + 3$
 - $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$
 - $f(x, y) = xe^{y+1}$
 - $f(x, y) = e^x \cos y$
 - $f(x, y) = e^{-x^2+y^2+4x}$
- หาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ บนบริเวณปิดและมีขอบเขต R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 - $f(x, y) = xy - x - 3y$ บนบริเวณ R รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดคือ $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(5, 0)$
 - $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ บนบริเวณ R รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดยอดคือ $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$
 - $f(x, y) = xy^2$ บนบริเวณ R ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$
- จงหาจำนวนจริงบวกสามจำนวนซึ่งผลบวกสามจำนวนมีค่าเท่ากับ 36 โดยที่ผลคูณของสามจำนวนมีค่ามากที่สุด
- จงหาจุดบนพื้นผิว $x^2 - yz = 9$ ซึ่งอยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด
- จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีหน้าสามหน้าของกล่องเป็นส่วนหนึ่งของระนาบ XY, YZ, ZX และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ในอัฐภาคที่ 1 บนระนาบ $x + y + z = 1$
- ผลลัพธ์ต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

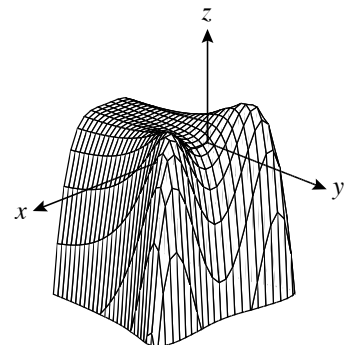
ทฤษฎีบท 1.12.10 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่มีความต่อเนื่อง โดยที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์สองค่าในช่วงที่พิจารณาแล้ว จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หนึ่งค่าที่อยู่ระหว่างค่าสูงสุดสัมพัทธ์ทั้งสองนั้น

โจทย์ต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวไม่สามารถขยายไปสู่กรณีฟังก์ชันสองตัวแปรได้

จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์สองค่า แต่ไม่มีจุดวิกฤตอื่น ๆ เลย

- ในทางสถิติ **ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด** (method of least squares) เป็นวิธีที่หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาเส้นโค้งที่ดีที่สุดที่ใกล้เคียงกับชุดข้อมูล

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

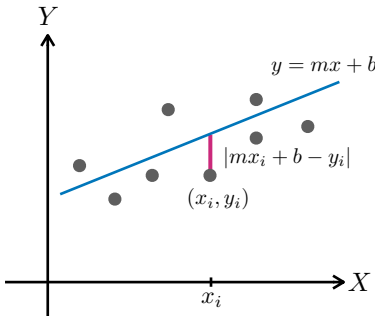


ภาพที่ 1.65. ฟังก์ชัน $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

สมมติว่าข้อมูลชุดหนึ่งมีความสัมพันธ์คล้ายกับเส้นตรง เราต้องการทำการประมาณชุดข้อมูลนี้ด้วยสมการเส้นตรง $y = mx + b$ โดยปกติแล้ว ข้อมูลที่เก็บมาได้มักเกิดความคลาดเคลื่อน และไม่อยู่บนเส้นตรงนั้น ดังนั้น เราจึงต้องทำการหาเส้นตรงที่ดีที่สุดที่สามารถประมาณชุดข้อมูลทั้งหมด นั่นคือ เราจะหา m และ b ที่ทำให้ระยะของความคลาดเคลื่อนระหว่างชุดข้อมูลกับค่าที่ได้จากสมการที่สร้างขึ้นมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ เราจะหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$g(m, b) = \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)^2$$

ความหมายทางเรขาคณิตของปัญหานี้ ปรากฏดังภาพ 1.66



ภาพที่ 1.66. ความหมายทางเรขาคณิตของระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด

- (a) เพื่อหาค่าต่ำสุดของ g เราจะหา (m, b) ที่สอดคล้องกับ $\frac{\partial g}{\partial m} = 0$ และ $\frac{\partial g}{\partial b} = 0$ จงแสดงว่า สมการของจุดวิกฤติจะสอดคล้อง ถ้า m และ b สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) m + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) m + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

- (b) กำหนดให้ $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ จงใช้ความจริงที่ว่า

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \geq 0$$

แสดงว่า

$$n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 0$$

- (c) สมมติว่า x_i แต่ละตัวแตกต่างกัน (แต่อาจซ้ำได้บางตัว) จงแสดงว่า สมการในข้อ (a) มีผลเฉลยเพียงอย่างเดียว นั่นคือ

$$\begin{aligned} m &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ b &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i \right) \end{aligned}$$

- (d) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $g_{mm}(m, b)$, $g_{bb}(m, b)$, $g_{mb}(m, b)$ และใช้ทฤษฎีบท 1.12.4 ในการตรวจสอบว่า g มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤติในข้อ (a)

1.13 ตัวคูณลากรางจ์

ปัญหาในตัวอย่าง 1.12.7 คือปัญหาที่เราหาค่าต่ำสุดของ

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$V = xyz$$

ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาในกรณีเฉพาะของปัญหาการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสามตัวแปร ภายใต้เงื่อนไข (constraint) หนึ่งเงื่อนไข กล่าวคือ

หาค่าสูงสุด (maximize) หรือ หาค่าต่ำสุด (minimize) ของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ ภายใต้เงื่อนไข (subject to) $g(x, y, z) = 0$

ทั้งนี้ ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

หาค่าสูงสุด (maximize) หรือ หาค่าต่ำสุด (minimize) ของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ภายใต้เงื่อนไข (subject to) $g(x, y) = 0$

ฟังก์ชัน f มักจะเรียกว่า **ฟังก์ชันจุดประสงค์** (objective function) และเงื่อนไข g มักเรียกว่า **เงื่อนไข** หรือ **ข้อจำกัด** (constraint)

ในหัวข้อที่ผ่านมา เช่น ตัวอย่าง 1.12.7 เราศึกษาปัญหาของการหาค่าเหมาะที่สุดในกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรภายใต้เงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไข จะเห็นว่าในตัวอย่างดังกล่าว เราใช้วิธีการลดตัวแปรของฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) ด้วยการนำเงื่อนไขไปแทนในฟังก์ชันจุดประสงค์ อย่างไรก็ตาม หากเงื่อนไขที่มีไม่สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันชัดเจน การแทนค่าดังกล่าวก็อาจทำได้ยาก

เพื่อให้การแก้ปัญหาค่าสุดขีดสะดวกมากยิ่งขึ้น จึงมีการเสนอระเบียบวิธี **ตัวคูณลากรางจ์** (method of Lagrange multiplier)

1.13.1 ระเบียบวิธีของตัวคูณลากรางจ์ที่มีหนึ่งเงื่อนไข

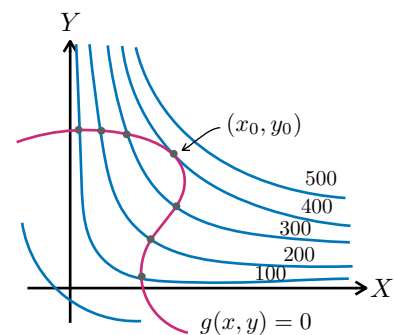
เราจะเริ่มกล่าวถึงกรณีฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขก่อน ดังนี้

สมมติว่าฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ต้องการหาค่าสูงสุดของ f ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ปัญหานี้สามารถพิจารณาได้ว่า เราจะหาจุด (x_0, y_0) บนเส้นโค้งของ g ที่ทำให้ $f(x, y)$ มีค่ามากที่สุด พิจารณาตัวอย่างดังภาพ 1.67 โดยที่ตัวเลขแทนด้วยค่า c ของ $f(x, y) = c$ จะเห็นว่า เราสามารถหาจุดตัดระหว่างเส้นชั้นความสูง $f(x, y)$ และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ซึ่งจุดตัดเหล่านี้เป็นคำตอบที่อาจเป็นไปได้สำหรับปัญหาการหาค่ามากที่สุดนี้ ซึ่งจากภาพ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชัน f ที่มากที่สุดคือ 400

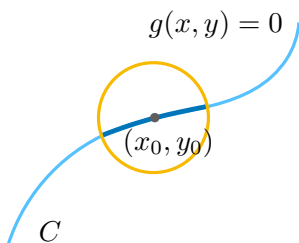
จากปัญหาดังกล่าว จะพบว่า $\nabla f(x_0, y_0)$ ตั้งฉากกับเส้นชั้นความสูง $f(x, y) = 400$ ที่จุด (x_0, y_0) และทำนองเดียวกัน $\nabla g(x_0, y_0)$ ก็ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) ด้วย ดังนั้น เราจึงได้ว่า เวกเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\nabla g(x_0, y_0)$ นั่นคือ มี λ ซึ่งทำให้

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

เพื่อยามปัญหาให้รัดกุมยิ่งขึ้น จึงขอยกคำศัพท์พื้นฐานต่าง ๆ ดังนี้



ภาพที่ 1.67. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นชั้นความสูงของ f และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่ให้ค่าสูงสุด



ภาพที่ 1.68. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด เกิดขึ้นที่จุด (x_0, y_0) เนื่องจากมีเส้นโค้งย่อยทั้งสองด้านของจุด (x_0, y_0)

บทนิยาม 1.13.1 ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$

1. จะกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ภายใต้ข้อจำกัด [ต่ำสุด] (constrained absolute maximum) [(minimum)] ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0)$ เป็นค่ามากที่สุด [น้อยสุด] ของ f บนเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$
2. จะกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด [ต่ำสุด] (constrained relative maximum) [(minimum)] ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0)$ เป็นค่ามากที่สุด [น้อยสุด] ของ f สำหรับบางส่วนของเส้นโค้งย่อยของเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ทั้งสองด้านของจุด (x_0, y_0)

ภาพ 1.68 แสดงให้เห็นถึงตัวอย่างของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัดของ $f(x, y)$ บนเส้น $g(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0)

สมมติว่าค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัดเกิดขึ้น ณ จุด (x_0, y_0) และสมมติให้ $g(x, y) = 0$ เขียนได้ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(s) \quad y = y(s)$$

โดยที่ s คือตัวแปรเสริมของความยาวของส่วนโค้ง โดย $s = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) ดังนั้น $z = f(x(s), y(s))$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $s = 0$ นั่นคือ $dz/ds = 0$ ณ จุด (x_0, y_0) โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0) \end{aligned}$$

เมื่อ $\mathbf{T}(0)$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0)

จากความสัมพันธ์ $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0) = 0$ ทำให้ได้ว่า เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{0}$ หรือตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุดซึ่งเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด แต่เนื่องจาก $g(x, y) = 0$ เป็นเส้นโค้งระดับหนึ่งของฟังก์ชัน $g(x, y)$ ดังนั้น ถ้า $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ แล้ว $\nabla g(x_0, y_0)$ จะตั้งฉากกับเส้นโค้งนี้ที่จุด (x_0, y_0) กล่าวคือ มีสเกลาร์ $\lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0} \quad (1.13.1)$$

สำหรับสเกลาร์ λ จะเรียกว่า **ตัวคูณลากรางจ์** (Lagrange multiplier) ดังนั้น ระเบียบวิธีตัวคูณลากรางจ์จึงเป็นวิธีการที่หาจุดบนเส้นโค้งเงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ที่สอดคล้องกับสมการ (1.13.1) สำหรับบางสเกลาร์ λ

เมื่อพิจารณาความหมายของ λ เราสามารถพิจารณาได้ว่า

$$\lambda = \frac{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}{\|\nabla g(x_0, y_0)\|}$$

ซึ่งมีความหมายเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของฟังก์ชันจุดประสงค์ต่อขนาดของฟังก์ชันที่เป็นข้อจำกัดนั่นเอง

ดังนั้น ดังที่กล่าวมาข้างต้น จึงสามารถสรุปวิธีการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขโดยระเบียบวิธีตัวคูณลากรางจ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.13.1 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุเส้นโค้งของเงื่อนไข $g(x, y) = 0$ โดยที่ $\nabla g \neq \mathbf{0}$ ที่จุดใด ๆ บน g ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่มีเงื่อนไขแล้ว ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่จุด (x_0, y_0) บนเส้นโค้งเงื่อนไขซึ่งเวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ และ $\nabla g(x_0, y_0)$ ขนานกัน กล่าวคือ มี λ ที่ทำให้

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0} \quad (1.13.2)$$

จะเห็นว่า หากเราสร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

การหาจุดวิกฤติ $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ ของ F จะทำให้ได้เงื่อนไขดังสมการ (1.13.2) ในทฤษฎีบท 1.13.1 นั่นคือ

$$F_x = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0$$

$$F_y = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0$$

$$F_\lambda = g(x, y) = 0$$

กล่าวโดยสรุปแล้ว เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ที่ต้องการหาค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ เราสามารถพิจารณาระเบียบวิธีตัวคูณลากรางจ์ได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันสามตัวแปรของ x, y, λ โดย

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. หาจุดวิกฤติของฟังก์ชัน F นั่นคือ ทำการหา (x, y, λ) ที่ทำให้

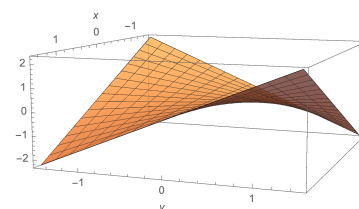
$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

3. กำหนด λ เพื่อหาจุด (x, y) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด
4. นำจุดวิกฤติของฟังก์ชันดังกล่าวมาพิจารณาว่าเกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ด้วยการตีความหมายทางเรขาคณิตของแต่ละปัญหา

ตัวอย่าง 1.13.2 จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์

วิธีทำ เนื่องจากวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ เป็นเซตปิดและมีขอบเขต และ $f(x, y) = xy$ มีความต่อเนื่อง ณ จุดใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$ โดยทฤษฎีบท 1.12.1 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ เราจึงจะพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$ เราทำการสร้างฟังก์ชันเงื่อนไข

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$



ภาพที่ 1.69. กราฟของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$

ดังนั้น สร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

หาจุดวิกฤติของ F จะได้ว่า

$$F_x = y + \lambda(2x) = 0$$

$$F_y = x + \lambda(2y) = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = 0$ และถ้า $y = 0$ แล้ว $x = 0$ เช่นกัน แต่เนื่องจาก $(x, y) = (0, 0)$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$ จึงจะสมมติว่า $x \neq 0$

จาก $x \neq 0$ จะได้ว่า $y \neq 0$ ดังนั้นจะเขียน λ ได้ในรูป

$$\lambda = \frac{y}{2x}, \quad \lambda = \frac{x}{2y}$$

นั่นคือ

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

ได้ว่า

$$x^2 = y^2$$

เพราะฉะนั้น จากเงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$ จะได้เงื่อนไข

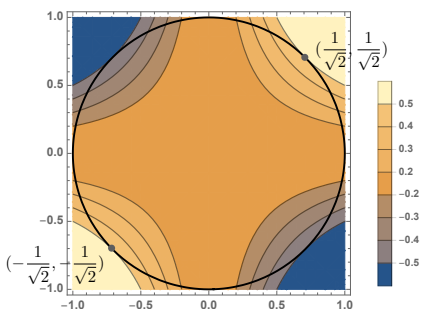
$$2x^2 - 1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ จึงได้ว่า $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น จุดวิกฤติ ทั้งหมด คือ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

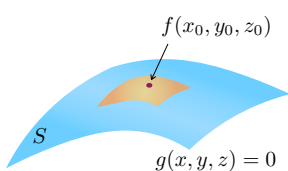
นำจุดวิกฤติทั้งหมดไปแทนใน f เพื่อตรวจสอบ ได้ผลดังตาราง

(x, y)	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
xy	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น ค่า สูงสุด สัมบูรณ์ มี ค่า เท่ากับ $\frac{1}{2}$ เกิด ขึ้น ที่ จุด $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ และ $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ จากตัวอย่างดังกล่าว เราสามารถพิจารณาเส้นชั้นความสูงที่ค่าสูงสุด สัมบูรณ์ปรากฏอยู่ดังภาพ 1.70



ภาพที่ 1.70. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นชั้นความสูงของ f และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์



ภาพที่ 1.71. ค่าสูงสุดของ $f(x, y, z)$ บนพื้นผิว S

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ f เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร และ g เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ f เราก็สามารถพิจารณาปัญหาดังกล่าวได้ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับความหมายในกรณีที่ f และ g เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร จะเห็นว่า สำหรับ $g(x, y, z) = 0$ คือพื้นผิว S ในสามมิติ ดังนั้น ปัญหานี้จะเป็นการพิจารณาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ $f(x, y, z)$ เมื่อ (x, y, z) อยู่บนพื้นผิว S ดังภาพ 1.71 ซึ่งแสดงค่าสูงสุดของ $f(x, y, z)$ กล่าวคือ $f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$ สำหรับทุก (x, y, z) บน S ใกล้เคียง (x_0, y_0, z_0)

ดังนั้น สำหรับกระบวนการหาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันสามตัวแปร $f(x, y, z)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y, z) = 0$ เราสามารถพิจารณาได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x, y, z, λ โดย

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

2. หาจุดวิกฤติของฟังก์ชัน F นั่นคือ ทำการหา (x, y, z, λ) ที่ทำให้

$$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$$

3. กำหนด λ เพื่อหาจุด (x, y, z) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

4. พิจารณาจุดวิกฤติตามปัญหาที่พิจารณา

ตัวอย่าง 1.13.3 การแก้ปัญหาในตัวอย่าง 1.12.7 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข $V = xyz$ เมื่อ V เป็นค่าคงที่ โดยใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรางจ์

วิธีทำ จากเงื่อนไขดังกล่าว จะได้ฟังก์ชันเงื่อนไข

$$g(x, y, z) = xyz - V$$

ทำการสร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = (xy + 2xz + 2yz) + \lambda(xyz - V)$$

หาจุดวิกฤติของ F จะได้ว่า

$$F_x = y + 2z + \lambda yz = 0 \quad (1.13.3)$$

$$F_y = x + 2z + \lambda xz = 0 \quad (1.13.4)$$

$$F_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \quad (1.13.5)$$

$$F_\lambda = xyz - V = 0 \quad (1.13.6)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$y + 2z = -\lambda yz, \quad x + 2z = -\lambda xz, \quad 2x + 2y = -\lambda xy$$

จากเงื่อนไขที่ว่า x, y, z ไม่เป็นศูนย์ จึงได้ว่า

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = -\lambda, \quad \frac{1}{z} + \frac{2}{x} = -\lambda, \quad \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = -\lambda$$

โดยสมการที่หนึ่งและสอง จะได้ว่า

$$y = x \quad (1.13.7)$$

และจากสมการที่หนึ่งและสาม จะได้ว่า

$$z = \frac{1}{2}x \quad (1.13.8)$$

เราจึงแทน (1.13.7) และ (1.13.8) ลงใน $xyz = V$ ได้ว่า

$$\frac{x^3}{2} = V$$

เพราะฉะนั้น $x = \sqrt[3]{2V}$ โดยเงื่อนไขของ (1.13.7) และ (1.13.8) จึงได้ว่า $y = \sqrt[3]{2V}$

และ $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ ซึ่งได้ผลสอดคล้องกับตัวอย่าง 1.12.7 ตามต้องการ

1.13.2 ระเบียบวิธีของตัวคูณลากรางจ์ที่มีมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชัน $n + m$ ตัวแปร กล่าวคือ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

โดยที่มีเงื่อนไข m เงื่อนไข กล่าวคือ

$$g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0, r = 1, \dots, m$$

เราทำการสร้างฟังก์ชัน

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$$

จากนั้น หาจุดวิกฤติ และทำในทำนองเดียวกันกับกรณีที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไข

สำหรับกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีสองเงื่อนไข เราสามารถพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตได้ กล่าวคือ สมมติ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยที่มีเงื่อนไข

$$g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$$

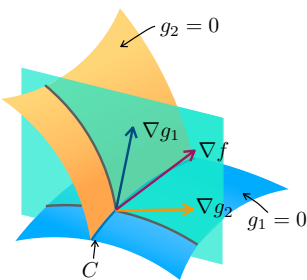
โดยที่เกรเดียนต์ ∇g_1 และ ∇g_2 ซึ่งตั้งฉากกับพื้นผิว $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$ ที่จุด (x, y, z) ไม่ขนานกัน สมมติ $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$ ตัดกันที่เส้นโค้งเรียบ C บนเส้น C ดังกล่าว เราสามารถหาจุดบนเส้นโค้ง C ซึ่ง f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ ทั้งนี้เราสามารถหาจุดบนเส้นโค้ง C ซึ่ง ∇f ตั้งฉากกับ C แต่เนื่องจาก $\nabla g_1, \nabla g_2$ ตั้งฉากกับ C ที่จุดนั้น เนื่องจาก C อยู่บนพื้นผิว $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$

ดังนั้น ∇f อยู่ในระนาบเดียวกันกับ $\nabla g_1, \nabla g_2$ นั่นคือ มี λ_1, λ_2 ที่ทำให้ $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ ดังภาพ 1.72 จึงได้เงื่อนไขของระเบียบวิธีตัวคูณลากรางจ์ในกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีสองเงื่อนไขดังกล่าว

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีเงื่อนไขสองเงื่อนไข เราสร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

จากนั้นทำการหาจุดวิกฤติ และแก้ระบบสมการเพื่อหาจุด (x, y, z) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด



ภาพที่ 1.72. เกรเดียนต์ $\nabla g_1, \nabla g_2$ และ เวกเตอร์ ∇f บนระนาบเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.13.4 ระบาย $x + y + z = 1$ ตัดกับทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ใ้รอยตัดเป็นวงรี จงหาจุด (x, y, z) บนวงรีดังกล่าวที่ระยะระหว่างจุดนั้นกับจุดกำเนิดมีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุด

วิธีทำ สมมติให้ $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ เป็นฟังก์ชันที่วัดระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดบนวงรีซึ่งเป็นรอยตัดของพื้นผิวสองพื้นผิวดังกล่าว ปัญหาในตัวอย่างนี้ เราต้องการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน h ซึ่งจะเห็นว่า หาก h ได้ค่าสุดขีดแล้ว h^2 ก็จะได้ค่าสุดขีดด้วย ดังนั้น เพื่อความสะดวก เราจะแปลงปัญหาเป็นการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

โดยมีเงื่อนไขสองเงื่อนไข คือ

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

ดังนั้น เราสร้างฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z - 1) \end{aligned}$$

ต่อมา หาจุดวิกฤติ โดยให้

$$F_x = 2x + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0 \quad (1.13.9)$$

$$F_y = 2y + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0 \quad (1.13.10)$$

$$F_z = 2z + \lambda_2 = 0 \quad (1.13.11)$$

$$F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1.13.12)$$

$$F_{\lambda_2} = x + y + z - 1 = 0 \quad (1.13.13)$$

จากสมการ (1.13.11) ได้ว่า $\lambda_2 = -2z$ จากสมการ (1.13.9) และ (1.13.10) จึงได้ว่า

$$2x + \lambda_1(2x) - 2z = 0 \quad \text{ได้ว่า } (1 + \lambda_1)x = z$$

$$2y + \lambda_1(2y) - 2z = 0 \quad \text{ได้ว่า } (1 + \lambda_1)y = z$$

ดังนั้น $\lambda_1 = -1$ และ $z = 0$ หรือ $\lambda_1 \neq -1$ และ $x = y = \frac{z}{1 + \lambda_1}$ จึงแบ่งเป็นสองกรณี ดังนี้

กรณี $\lambda_1 = -1$ และ $z = 0$

ทำการแก้ระบบสมการ (1.13.12), (1.13.13) ทำให้ได้ว่า $x = 0, 1$ นั่นคือ จุด $(0, 1, 0)$ และ $(1, 0, 1)$ ซึ่งต่างก็อยู่บนวงรีดังกล่าว สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

กรณี $\lambda_1 \neq -1$ และ $x = y = \frac{z}{1 + \lambda_1}$

จากสมการ (1.13.12) และ (1.13.13) จะได้ว่า

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$x + x + z = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$2x + z = 1$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

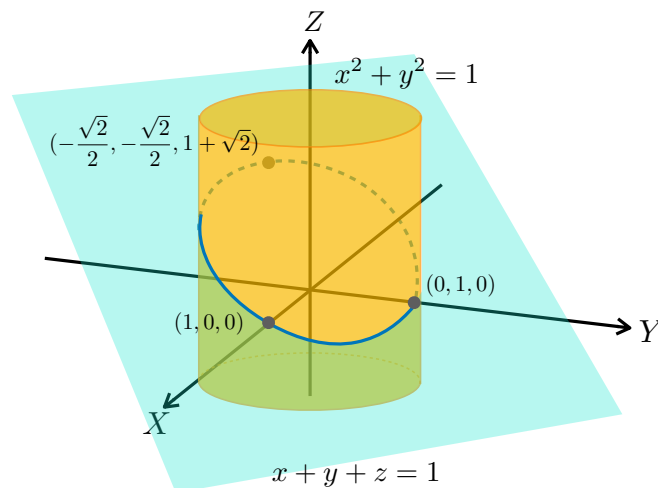
$$z = 1 \mp \sqrt{2}$$

จึงได้ว่า มีจุดที่เป็นไปได้คือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$ แต่จุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของวงรีมีเพียงสองจุดคือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$ และ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$

นำจุดวิกฤติทั้งหมดไปแทนใน f เพื่อตรวจสอบ ได้ผลดังตาราง

(x, y)	$(0, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$
xy	1	1	$4 - 2\sqrt{2}$	$4 + 2\sqrt{2}$

ดังนั้น จุด $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ บนวงรี ให้ระยะทางน้อยที่สุดจากจุดกำเนิด และจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$ บนวงรี ให้ระยะทางมากที่สุดจากจุดกำเนิด สอดคล้องกับสถานการณ์ดังภาพ 1.73



ภาพที่ 1.73. จุดบนวงรีที่อยู่ใกล้ที่สุดและไกลที่สุดจากจุดกำเนิด

แบบฝึกหัดที่ 1.13

- จงใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลาгранจ์ หาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดต่อไปนี้
 - $f(x, y) = xy$ ภายใต้ $4x^2 + 8y^2 = 64$
 - $f(x, y) = x^2 - y^2$ ภายใต้ $x^2 + y^2 = 16$
 - $f(x, y, z) = 2x + y - 2$ ภายใต้ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
 - $f(x, y, z) = xyz$ ภายใต้ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 - (ค่าสูงสุด) $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ ภายใต้ $2x - y = 0$ และ $y + z = 0$
 - (ค่าต่ำสุด) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ภายใต้ $x + 2y + 3z = 6$ และ $x + 3y + 9z = 9$
- จงหาจุดบนเส้นตรง $2x - 4y = 4$ ที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด
- จงหาจุดบนระนาบ $4x + 3y + z = 2$ ที่อยู่ใกล้กับจุด $(1, -1, 1)$ มากที่สุด
- จงหรัศมีและความสูงของทรงกระบอกมุมฉากซึ่งมีฐานเป็นวงกลมที่มีพื้นที่ผิวมากที่สุดที่สามารถแนบในทรงกลมรัศมี a จากนั้นจงหาพื้นที่ผิวที่มากที่สุดนั้น
- สมมติว่าอุณหภูมิ ณ จุด (x, y) บนแผ่นโลหะ กำหนดดังสมการ

$$T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$

มดตัวหนึ่งเดินบนแผ่นโลหะดังกล่าว โดยมีเส้นทางเดินเป็นวงกลมที่มีรัศมี 5 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จงหาอุณหภูมิที่สูงที่สุดและต่ำที่สุดบนแผ่นโลหะในแนวเส้นทางเดินที่มดเดินผ่าน

- จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ บนรอยตัดระหว่างทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ และระนาบ $z = 1$
- จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x, y, z) = xy + z^2$ บนวงกลมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y - x = 0$ และทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- จงหาจุดที่อยู่บนรอยตัดระหว่างระนาบ $y + 2z = 12$ และ $x + y = 6$ ที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด
- ปัญหาระนาบกำลังสองที่น้อยที่สุด** (a least squares plane) เป็นปัญหาที่คล้ายกับปัญหาเส้นโค้งกำลังสองมากที่สุด สำหรับข้อนี้เราจะหาระนาบ $z = Ax + By + C$ ที่ใช้ประมาณชุดข้อมูล (x_k, y_k, z_k)

สมมติว่าชุดข้อมูลประกอบด้วย $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, -1)$ จงหาค่า A, B, C ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อน

$$\sum_{k=1}^4 (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

มีค่าน้อยที่สุด

10. พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

- (a) จงแสดงว่า ค่าสูงสุดของ $a^2b^2c^2$ บนทรงกลมรัศมี r ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดในระบบพิกัด ABC คือ $(r^2/3)^3$
- (b) จงใช้ผลจากข้อ (a) แสดงอสมการดังกล่าวคืออสมการ AM-GM สำหรับจำนวนจริงสามจำนวน กล่าวคือ สำหรับจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ a, b, c

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

11. ในตัวอย่าง 1.6.2 เราได้กล่าวถึงสมการ Cobb-Douglas ซึ่งเป็นสมการที่นิยมในทางเศรษฐศาสตร์เพื่อใช้ในการผลิตสินค้า โดยปริมาณการผลิต P เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับการทำงาน x หน่วย และปัจจัยทุน y หน่วย กำหนดโดย

$$P(x, y) = kx^\alpha y^{1-\alpha}$$

โดยที่ k และ α เป็นค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับบริษัทหรือระบบเศรษฐกิจนั้น ๆ

- (a) จงแสดงว่า หากเพิ่มแรงงานและต้นทุนเป็นสองเท่า จะได้ว่า ผลผลิต P ก็เพิ่มขึ้น 2 เท่าตามไปด้วย
- (b) สำหรับบริษัทแห่งหนึ่ง สมมติว่า $k = 120$, $\alpha = 3/4$ หากต้นทุนของแรงงานเท่ากับ 250 บาทต่อหน่วย และต้นทุนของปัจจัยทุนต่อหน่วยเท่ากับ 400 บาท โดยที่ค่าใช้จ่ายทั้งหมดไม่เกิน 100,000 บาท จงหาผลผลิตรวมมากที่สุดของบริษัทนี้
- (c) สำหรับค่าคงที่ k, α ถ้าต้นทุนต่อหน่วยของการทำงานคือ c_1 และต้นทุนต่อหน่วยของปัจจัยทุนคือ c_2 โดยที่บริษัทสามารถลงทุนได้ไม่เกิน B บาทแล้ว ฟังก์ชันผลผลิตรวมจะมีเงื่อนไขคือ $c_1x + c_2y = B$ จงแสดงว่า ระดับการผลิตสูงสุดซึ่งขึ้นอยู่กับการเงิน จะเกิดขึ้นที่

$$x = \frac{\alpha B}{c_1}, \quad y = \frac{(1-\alpha)B}{c_2}$$

ปริพันธ์จำกัดเขต

บทที่

2

การจัดการเรียนการสอน บทที่ 2 ปริพันธ์จำกัดเขต

กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus)
ชื่อผู้สอน อ.ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
เวลาที่ใช้ 6 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

- นักศึกษาสามารถคำนวณค่าปริพันธ์บางปริพันธ์โดยใช้นิยามปริพันธ์จำกัดเขตได้
- นักศึกษาสามารถอธิบายทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส และใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้
- นักศึกษาสามารถใช้ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์สำหรับหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ได้
- นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ และสลับลำดับการหาปริพันธ์ของปริพันธ์สองชั้น เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเสริม โดยใช้ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ได้
- นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

- การบรรยายในชั้นเรียน
- การยกตัวอย่าง การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องในแต่ละหัวข้อ
- นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัดจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน
- นักศึกษาทำแบบฝึกหัดทบทวน และทำการบ้านเพื่อพัฒนาทักษะการพิสูจน์

สื่อการเรียนการสอน

- เอกสารประกอบการเรียนการสอน กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง
- กระดาน ปากกา กระดาษ เครื่องฉายทึบแสง
- กระดาษชาร์ตสำหรับเขียนคำตอบหน้าชั้นเรียน

เอกสารอ้างอิง

1. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ชั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
2. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ชั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. อติชาติ เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสชั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4. Amazigo, J. C., & Rubinfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.
5. Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.
6. Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis. 4th edition, NJ: Wiley.
7. Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.
8. Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley
9. Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
10. Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
11. Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.
12. Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
13. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.

ปริพันธ์จำกัดเขต

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ทำการศึกษาประเด็นของแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียวในเรื่องอนุพันธ์ และปริพันธ์ รวมถึงกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองแนวคิด สำหรับรายละเอียดที่เกี่ยวข้องในเชิงลึกของปริพันธ์ จะกล่าวถึงในกระบวนวิชา การวิเคราะห์เชิงจริง (real analysis)

สำหรับกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษารายละเอียดที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขตที่ขยายความมากขึ้นจากแคลคูลัสพื้นฐานในบริบทที่มีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันหลายตัวแปร อาทิ การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ เป็นต้น

2.1 บทนิยามและสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

ปัญหาดั้งเดิมของปริพันธ์จำกัดเขตคือ การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ ก่อนอื่น เราจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขตดังนี้

พิจารณาปัญหาพื้นที่ จากภาพ 2.1 สำหรับช่วงปิด $I = [a, b]$ ผลแบ่งกัน (partition) $\mathcal{P}$ ของ I คือเซตจำกัดของจุด $\mathcal{P} := \{x_0, \dots, x_n\}$ ใน I ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

ดังนั้น บรรดาจุดใน $\mathcal{P}$ จะแบ่งช่วง I เป็น n ช่วงย่อย

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], \dots, \quad I_n := [x_{n-1}, x_n]$$

กำหนดให้ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ต่อไป เรานิยาม **นอร์ม** (norm) ของ $\mathcal{P}$ เขียนแทนด้วย $\|\mathcal{P}\|$ คือ ความกว้างของช่วงย่อยที่มากที่สุด กล่าวคือ

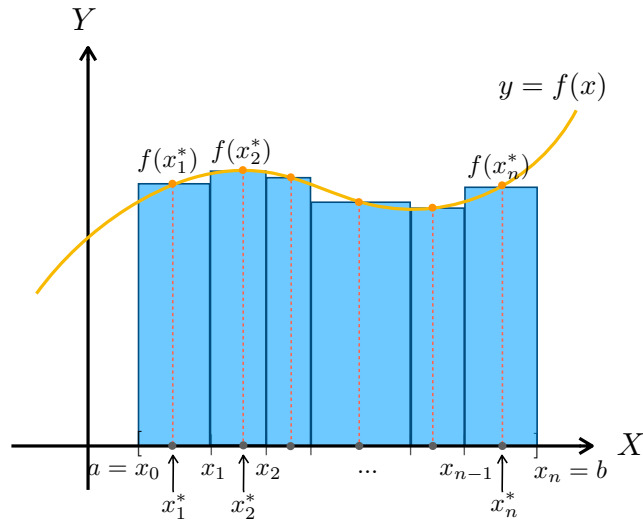
$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

เมื่อเลือกจุด x_k^* ใด ๆ ในช่วงย่อย I_k นั่นคือ $x_k^* \in I_k$ จะสร้าง **ผลบวกรีมันน์** (Riemann's sum)

$$S(f; \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \quad (2.1.1)$$

เมื่อแบ่งช่วงย่อย I_k ให้มีจำนวนมากขึ้นจน $n \rightarrow \infty$ จะทำให้ได้ว่า $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ นั่นคือ จะนิยาม **ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) โดย

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \quad (2.1.2)$$



ภาพที่ 2.1. การแบ่งพื้นที่ใต้ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$

บทนิยาม 2.1.1 จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ (Riemann integrable) ถ้าสำหรับผลแบ่งกัน $\mathcal{P}$ บน $[a, b]$ ลิมิตของผลบวกรีมันน์มีค่าเมื่อ $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ โดยจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขต โดย

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f; \mathcal{P})$$

โดยที่ $f(x)$ เรียกว่า **ปริพันธ์** (integrand) หรือตัวถูกอินทิเกรต, $[a, b]$ เรียกว่า **ช่วงการหาปริพันธ์** (range of integration), a เรียกว่า **ขีดจำกัดล่าง** (lower limit) และ b เรียกว่า **ขีดจำกัดบน** ของการหาปริพันธ์

ชั้น (class) ของฟังก์ชัน f ซึ่ง f หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ จะเขียนแทนด้วย $\mathcal{R}[a, b]$

หมายเหตุ นิยามที่เป็นทางการของนิยาม 2.1.1 สามารถกล่าวได้ในรูป $\delta - \epsilon$ ได้ว่า ฟังก์ชัน $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ ถ้ามีจำนวนจริง $L \in \mathbb{R}$ ซึ่งสำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับผลแบ่งกัน $\mathcal{P}$ ใด ๆ ซึ่ง $\|\mathcal{P}\| < \delta$ แล้ว

$$|S(f; \mathcal{P}) - L| < \epsilon$$

เมื่อ $f(x) \geq 0$ ความหมายในทางเรขาคณิตของผลบวก (2.1.1) คือ การประมาณพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แบ่งสี่เหลี่ยมย่อยแต่ละแท่งมีความกว้าง Δx_k และความสูง $f(x_k^*)$ ดังภาพ 2.1 เราจึงกล่าวได้ว่า ผลบวก (2.1.1) คือการประมาณพื้นที่ใต้กราฟของ f บนช่วง $[a, b]$ และปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ แสดงพื้นที่ใต้กราฟของ f บนช่วงปิด $[a, b]$

ทั้งนี้ ในช่วงที่ $f(x) < 0$ กล่าวคือ ค่าของ f เป็นลบ จะทำให้ผลบวกในส่วนที่ $f(x) < 0$ มีค่าเป็นลบ ทำให้ (2.1.1) และ $\int_a^b f(x) dx$ ไม่สามารถแสดงความหมายของพื้นที่ใต้ f อีกต่อไป แต่ปริพันธ์จำกัดเขตจะแสดงพื้นที่เครื่องหมายสุทธิ (net-signed area) ของ f บนช่วงปิด $[a, b]$

จากนิยาม 2.1.1 เราสามารถเลือกช่วงย่อยให้มีความยาวช่วงย่อยเท่ากัน และเลือกจุดในช่วงย่อยเป็นจุดใด ๆ ได้ เพื่อความสะดวกอาจเลือกเป็นจุดที่ทำให้คำนวณค่าของฟังก์ชันได้ง่าย กล่าวคือ

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x) dx$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการหาคำนวณค่าปริพันธ์จำกัดเขต โดยการสร้างผลบวกรีมันน์

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ พิจารณาปัญหาดังกล่าวดังภาพ 2.2 ก่อนอื่น ทำการแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย โดยไม่เสียศูนย์ทั่วไป สมมติว่าทำการแบ่งช่วงย่อยออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน นั่นคือ เลือกผลแบ่งกัน $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_0 + \frac{1}{n}, \dots, x_0 + \frac{n-1}{n}, x_n = 1\}$ โดยที่ $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ สำหรับทุก $k = 1, \dots, n$

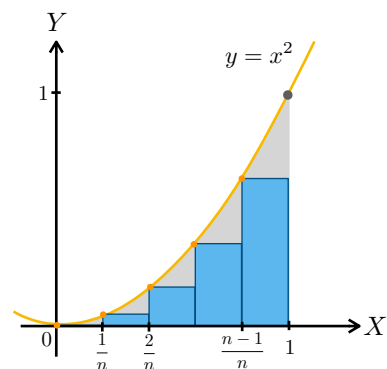
ขั้นตอนต่อไป ทำการเลือกจุด x_k^* ซึ่งเราสามารถเลือกจุด x_k^* ได้อย่างอิสระ ในที่นี้ สมมติว่าเลือกจุด x_k^* เป็นจุดปลายช่วงย่อยด้านซ้ายมือของช่วงย่อย $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า แต่ละจุดในช่วงย่อย I_k เขียนได้ในรูป $x_k^* := 0 + \frac{k-1}{n}$ ดังนั้น จะได้ผลบวกรีมันน์

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k &= f(x_1^*) \Delta x_1 + \dots + f(x_n^*) \Delta x_n \\ &= f(0) \frac{1}{n} + f\left(0 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + f\left(0 + \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(0 + \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อให้ $n \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n \right) = \frac{1}{3}$$

นั่นคือ $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$



ภาพที่ 2.2. พื้นที่ใต้กราฟ $f(x) = x^2$ บน $[0, 1]$

ในการวิเคราะห์เชิงจริง มีการศึกษาฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ ที่หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ เราจะกล่าวอ้างผลดังกล่าวโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[a, b]$

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ (piecewise-defined function) แล้ว $f \in \mathcal{R}[a, b]$
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแล้ว $f \in \mathcal{R}[a, b]$
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotonic function) แล้ว $f \in \mathcal{R}[a, b]$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ (piecewise-defined function) คือ ฟังก์ชันที่นิยามอย่างแตกต่างกัน บนช่วงที่แตกต่างกัน เช่น ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ สามารถพิจารณาตามเงื่อนไขในแต่ละช่วงได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

2. จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotonic function) บน $[a, b]$ ถ้า สำหรับทุก $x_1, x_2 \in [a, b]$ ซึ่ง $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$ หรือ $f(x_1) \geq f(x_2)$ ทั้งนี้ เมื่อ $f(x_1) \leq f(x_2)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) และเมื่อ $f(x_1) \geq f(x_2)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.3 ให้ f, g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ และ k เป็นค่าคงที่แล้ว

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$
2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
3. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
4. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
5. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$
6. ถ้า $c \in [a, b]$ และ f หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, c]$ และ $[c, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

พิสูจน์ เราจะแสดงให้เห็นเฉพาะข้อ 4 สำหรับข้ออื่น ๆ ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ ทำการเลือก $\mathcal{P}$ และจุด $x_1^*, \dots, x_n^*$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(x_k^*) + g(x_k^*)) \Delta x_k \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(x_k^*) \Delta x_k \right) \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k + \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(x_k^*) \Delta x_k \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมการที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.4 ให้ f, g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว

1. ถ้า f มีขอบเขต กล่าวคือ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

2. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

3. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

พิสูจน์ เราจะแสดงข้อ 1, 3 ส่วนข้อ 2 ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

1. ให้ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยผลแบ่งกันซึ่งกำหนดโดยจุด $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

เนื่องจาก $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า $m \leq f(x_k^*) \leq M$ สำหรับทุก $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ เพราะฉะนั้น

$$m \Delta x_k = m(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k^*) \Delta x_k \leq M(x_k - x_{k-1}) = M \Delta x_k$$

เมื่อรวมผลลัพธ์สำหรับทุกช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า

$$m(b-a) \leq \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \leq M(b-a)$$

นั่นคือ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ ตามต้องการ

3. สำหรับผลแบ่งกัน $\mathcal{P}$ ใด ๆ โดยอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k^*)| \Delta x_k$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \right| \leq \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(x_k^*)| \Delta x_k$$

เนื่องจาก $g(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}$ จึงได้ว่า

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \right| = \left| \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \right| \leq \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(x_k^*)| \Delta x_k$$

นั่นคือ $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงเขียนผลบวก $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$ ในรูปของปริพันธ์จำกัดเขต

วิธีทำ ลิมิตของผลบวกดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูปลิมิตของผลบวกรีมันน์ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n(1 + \frac{i}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + i/n} \end{aligned}$$

จากนิยามของผลบวกรีมันน์ จะได้ว่า ผลบวกดังกล่าวคือผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{1+x}$ บนช่วงปิด $[0, 1]$ เมื่อแบ่ง $[0, 1]$ เป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

ซึ่ง $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ สามารถคำนวณได้จากวิธีที่จะศึกษาในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 2.1.6 จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx = 0$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| dx$$

เนื่องจาก $|\sin nx| \leq 1$ และ $\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ และจากแคลคูลัสพื้นฐาน จะได้ว่า

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2} dx = \frac{2\pi}{n^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n^2} = 0$$

นั่นคือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx = 0$$

ตัวอย่าง 2.1.7 หากทราบว่า $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{12}$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} dx \right| \leq \int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} \right| dx$$

เนื่องจาก $|\sin x| \leq 1$ และสำหรับทุก $x \in [1, \sqrt{3}]$ ได้ว่า $-\frac{1}{e^{\sqrt{3}}} \leq e^{-x} \leq \frac{1}{e}$ นั่นคือ $|e^{-x}| \leq \frac{1}{e}$ จะได้ว่า

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} \right| dx \leq \frac{1}{e} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขต คำนวณค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\int_0^1 x^3 dx$

(b) $\int_0^2 (3x + 1) dx$

(c) $\int_3^6 (x^2 - 4x) dx$

2. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขต พิสูจน์ว่า $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$

3. จงเขียนผลบวกต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปปริพันธ์จำกัดเขต

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{t}{n} + \sin \frac{2t}{n} + \dots + \sin \frac{nt}{n} \right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 4x_k^* (1 - 3x_k^*) \Delta x_k^* \text{ เมื่อกำหนด } a = -3, b = 3$$

4. จงแสดงว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right) = \ln(1 + \sqrt{2})$$

5. จงแสดงว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos^2 \frac{\theta}{n} + \cos^2 \frac{2\theta}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n\theta}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4\theta}$$

$$6. \text{ สำหรับ } m > -1 \text{ จงแสดงว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} \right) = \frac{1}{m+1}$$

$$7. \text{ จงแสดงว่า } \left| \int_0^1 \frac{\cos nx}{x+1} dx \right| \leq \ln 2 \text{ สำหรับทุก } n$$

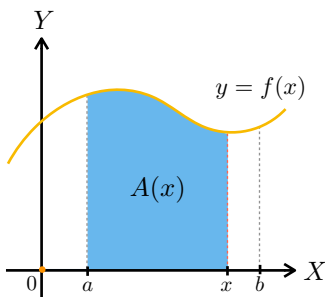
$$8. \text{ จงแสดงว่า } \int_0^{\pi/2} \sqrt{x \sin x} dx \leq \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2}$$

2.2 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

จากนิยาม 2.1.1 การหาปริพันธ์จำกัดเขตสามารถทำได้โดยการหาผลบวกรีมันน์ อย่างไรก็ตาม การคำนวณหาผลบวกรีมันน์นั้นมีความซับซ้อน เราจึงเริ่มต้นพิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตจากกระบวนการที่ตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ คือ การปฏิยานุพันธ์นั่นเอง

บทนิยาม 2.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ f ถ้า $F'(x) = f(x)$ เขียนแทนด้วยปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) โดย

$$F(x) = \int f(x) dx$$



ภาพที่ 2.3. ฟังก์ชัน พื้นที่ $A(x)$ เมื่อ $A'(x) = f(x)$

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันว่า เป็นกระบวนการที่ทำย้อนกลับกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งสำหรับปัญหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ เราพิจารณาปัญหาดังนี้

สมมติให้ $A(x)$ คือฟังก์ชันของพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, x]$ ดังนั้น สำหรับปัญหาการหาพื้นที่ใต้กราฟ f บนช่วง $[a, b]$ เราจะหาฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า $A'(x) = f(x)$, $A(a) = 0$ และ $A(b) = A$ เมื่อ A คือพื้นที่ใต้กราฟดังกล่าว ดังภาพ 2.3

จากการกำหนด $A'(x) = f(x)$ คือ A เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ทำให้ได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ F อื่นๆ ของ f เขียนได้ในรูป $F(x) = A(x) + C$ ดังนั้น เมื่อพิจารณา $F(b) - F(a)$ จะได้ว่า

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A + 0 = A$$

และเนื่องจากเราทราบว่า $\int_a^b f(x) dx = A$ ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญ นั่นคือ

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

กล่าวคือ ปริพันธ์จำกัดเขตของ f ตามนิยาม 2.1.1 สามารถคำนวณค่าได้จากค่าของปฏิยานุพันธ์ของขอบเขตบน ลบกับค่าของปฏิยานุพันธ์ของขอบเขตล่าง

2.2.1 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1

จากข้อเท็จจริงดังกล่าว ทำให้เราได้ทฤษฎีบทที่มีความสำคัญมากในแคลคูลัส คือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งมีอยู่สองส่วน โดยก่อนอื่นเราจะแสดงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus) ส่วนที่หนึ่ง ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

พิสูจน์ ให้ $\mathcal{P} := \{x_0, \dots, x_n\}$ เป็นเซตของจุดใน $[a, b]$ ที่เป็นผลแบ่งกันบนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

โดยเกิดช่วงย่อย $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ เมื่อ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

จากสมมติฐาน $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน 1.4.2 บนช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า มี $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ซึ่ง $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= F'(x_1^*)(x_1 - x_0) = f(x_1^*)\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= F'(x_2^*)(x_2 - x_1) = f(x_2^*)\Delta x_2 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= F'(x_n^*)(x_n - x_{n-1}) = f(x_n^*)\Delta x_n \end{aligned}$$

รวมสมการทุกสมการ จะได้ว่า

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k$$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ จึงได้ว่า เมื่อให้ $n \rightarrow \infty$ ทำให้ได้ว่า $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ จึงได้ว่า

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

ตามต้องการ

□

เราอาจเขียนสัญลักษณ์การคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้ กล่าวคือ หากปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ คือ $F(x)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_{x=a}^b = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่าง 2.2.2 จากตัวอย่าง 2.1.1 จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1
คำนวณค่าปริพันธ์ $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ เราทราบว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ สำหรับค่าคงที่ C ใด ๆ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \left. \frac{x^3}{3} + C \right|_{x=0}^1 \\ &= \left[\frac{1^3}{3} + C \right] - \left[\frac{0^3}{3} + C \right] = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.2.2 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราทำการสร้างฟังก์ชันพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บน $[a, x]$ และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในส่วนที่หนึ่งทำให้เราทราบว่า ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขตมีความสัมพันธ์กัน ดังนั้น เราจึงนิยามปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้จากปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

บทนิยาม 2.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์บนช่วง $[a, b]$ ฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad t \in [a, b]$$

จะเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของ f

เนื่องจากปริพันธ์จำกัดเขต มีค่าขึ้นอยู่กับกรหาลิมิตของปริพันธ์ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ตัวแปรอื่น ๆ นอกเหนือจากตัวแปร x ได้ เช่น

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

ตัวแปรเหล่านี้ จะเรียกว่า **ตัวแปรหุ่น** (dummy variable)

เราทราบว่า F ซึ่งเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f มีความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 ดังนั้น หากปฏิยานุพันธ์ของ f นิยามโดยปริพันธ์ไม่จำกัดเขตดังนิยาม 2.2.2 แล้ว คำถามที่น่าสนใจคือ $F'(x)$ จะมีความสัมพันธ์ในลักษณะอย่างไร ก่อนที่จะตอบคำถามเหล่านั้น จะขอยกทฤษฎีบทที่สำคัญที่ใช้ในการพิสูจน์ ดังนี้

ในทฤษฎีบท 1.12.1 เราได้กล่าวในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร สำหรับกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถกล่าวได้เช่นกัน ในที่นี้ขอยกทฤษฎีบทดังกล่าวโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.3 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีดสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

นอกจากนี้ หาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะทำให้ได้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate-value theorem) ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.4 (ทฤษฎีบทระหว่างกลาง)

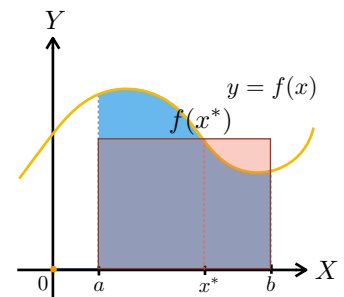
ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ k อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว จะมี $x \in [a, b]$ ที่ทำให้ $f(x) = k$ มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

ในทฤษฎีบท 1.4.2 เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับอนุพันธ์ ในทำนองคล้ายกัน เราสามารถพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ (The mean-value theorem for integrals) ได้เช่นกัน สำหรับหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ในรูปอย่างอ่อน (weak form) เท่าที่เพียงพอในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป ทั้งนี้ เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัธยฐานแบบวางนัยทั่วไปในหัวข้อถัดไป

ทฤษฎีบท 2.2.5 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว มีจุด $x^* \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a)$$



ภาพที่ 2.4. ความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.12.1 สมมติว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a, b]$ เท่ากับ M และ m ตามลำดับ นั่นคือ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $m \leq f(x) \leq M$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.1.4 จะได้ว่า

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

เพราะฉะนั้น

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad (2.2.1)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่ง f ให้ค่าเป็น m และ M โดยทฤษฎีบทค่าสุดขีด (ทฤษฎีบท 2.2.3) และสอดคล้องกับเงื่อนไข (2.2.1) โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (ทฤษฎีบท 2.2.4) จะได้ว่า มี $x^* \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = f(x^*)$$

หรือได้ว่า

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a)$$

ตามต้องการ □

ความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ สามารถพิจารณาได้ดังภาพ 2.4 กล่าวคือ เราสามารถหาจุด x^* ในช่วง $[a, b]$ ที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง $b - a$ ความสูง $f(x^*)$ เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บน $[a, b]$

เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.6 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2)

ถ้า f มีความต่อเนื่องบนช่วง แล้ว f มีปฏิยานุพันธ์บนช่วงนั้น และถ้า x เป็นจุดในช่วงนั้นแล้ว F ซึ่งนิยามโดย

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วง กล่าวคือ

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

พิสูจน์ ก่อนอื่นจะแสดงว่า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ที่ทุก x บนช่วง ๆ หนึ่ง

จะเห็นว่า ถ้า $x > a$ และ x อยู่ในช่วงนั้นแล้ว พื้นที่เครื่องหมายสุทธิที่นิยามโดย $\int_a^x f(t) dt$ บนช่วง $[a, x]$ และ จาก f มีความต่อเนื่อง ทำให้ปฏิยานุพันธ์ $F(x)$ มีค่า ในกรณีที่ $x \leq a$ โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 2 ก็จะสามารถแสดงได้ว่า $F(x)$ มีค่าเช่นกัน

ต่อไปจะแสดงว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วง ถ้า x ไม่เป็นจุดปลายช่วงแล้ว โดยนิยามของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี x^* ที่ทำให้

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} [f(x^*)(x+h-x)] = f(x^*)$$

โดยที่ $x \leq x^* \leq x+h$ ดังนั้น เมื่อให้ $h \rightarrow 0$ จะได้ว่า $x^* \rightarrow x$ และเนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบนช่วง ทำให้ได้ว่า

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x^*) = f(x)$$

ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ x เป็นจุดปลายช่วง จะแสดงได้โดยใช้ลิมิตด้านเดียวและทำได้ในทำนองเดียวกัน จึงจบการพิสูจน์ตามต้องการ $\square$

จากทฤษฎีบท 2.2.6 แสดงให้เห็นว่า $F(x)$ ที่นิยามหาอนุพันธ์ได้ จึงสรุปได้ว่า $F(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วงเช่นกัน

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาค่า $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x e^{t^2} \sin t \, dt \right]$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(t) = e^{t^2} \sin t$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x e^{t^2} \sin t \, dt \right] = e^{x^2} \sin x$$

จะเห็นว่า จากทฤษฎีบท 2.2.6 เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน F เทียบกับ x เมื่อ x เป็นตัวแปรที่อยู่ที่ขอบเขตบนของการหาปริพันธ์ ดังนั้น ในกรณีที่ขอบเขตบนอยู่ในรูปของฟังก์ชันอื่น ๆ รวมถึงขอบเขตล่างไม่ได้เป็นจุด a การหาอนุพันธ์ของปริยานุพันธ์ดังกล่าวจึงมีการเปลี่ยนรูป ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.8 ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$, u, v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้โดยที่เรนจ์ $R_u, R_v \subset [a, b]$ แล้ว

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

พิสูจน์ ให้ $F[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $F(x) = \int_c^x f(t) \, dt$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ เพราะฉะนั้น

$$(F \circ v)(x) = \int_c^{v(x)} f(t) \, dt$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า $(F \circ v)'(x) = F'(v(x))v'(x) = f(v(x))v'(x)$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^c f(t) \, dt = f(v(x))v'(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt &= \frac{d}{dx} \left(\int_{u(x)}^c f(t) \, dt + \int_c^{v(x)} f(t) \, dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(- \int_c^{u(x)} f(t) \, dt + \int_c^{v(x)} f(t) \, dt \right) \\ &= - \frac{d}{dx} \int_c^{u(x)} f(t) \, dt + \frac{d}{dx} \int_c^{v(x)} f(t) \, dt \\ &= -f(u(x))u'(x) + f(v(x))v'(x) \\ &= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 2.2.9 จงหาค่า $\frac{d}{dx} \left[\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt \right]$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.2.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt \right] &= \frac{\sin x^2}{x^2} \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{dx} \\ &= \frac{2 \sin x^2}{x} - \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

2.2.3 การเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยได้ศึกษาการเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์ (integration by substitution) เมื่อเราไม่สามารถหาปริพันธ์โดยตรงได้โดยตรง ในส่วนนี้เราจะพิสูจน์การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

หมายเหตุ จะกล่าวว่า $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$ หรือ $f(x) > f(y)$

ทฤษฎีบท 2.2.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ ϕ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บน $[\alpha, \beta]$ โดยที่ $\alpha = \phi(a)$, $\beta = \phi(b)$ และ ϕ' หาอนุพันธ์ได้แบบปริมันน์บน $[\alpha, \beta]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

พิสูจน์ สมมติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ดังนั้น ϕ มีตัวผกผัน กล่าวคือ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า $\alpha = \phi^{-1}(a)$ และ $\beta = \phi^{-1}(b)$

เลือกผลแบ่งกัน $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ บนช่วง $[a, b]$ และ $Q = (\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta)$ บนช่วง $[\alpha, \beta]$ โดยที่ $t_i = \phi^{-1}(x_i)$

โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า สำหรับแต่ละ t_k^* บนช่วงย่อย $[t_{k-1}, t_k]$

$$\Delta x_k = \phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) = \phi'(t_k^*) \Delta t_k$$

ให้ $x_k^* = \phi(t_k^*)$ โดยที่ x_k^* อยู่ในช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ สร้างผลบวกรีมันน์

$$S(f; P) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\phi(t_k^*)) \phi'(t_k^*) \Delta t_k$$

เนื่องจาก ϕ หาอนุพันธ์ได้ จึงได้ว่า ϕ มีความต่อเนื่อง จึงได้ว่า เมื่อ $\|P\| \rightarrow 0$ แล้ว $\|Q\| \rightarrow 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

ตามต้องการ



ตัวอย่าง 2.2.11 จงหาค่า $\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

วิธีทำ ให้ $x = \phi(t) = \sqrt{t}$ สำหรับ $t \in [1, 4]$ จะเห็นว่า $\phi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ซึ่งมีความ

ต่อเนื่องบน $[1, 4]$ ถ้าให้ $f(x) = 2 \sin x$ แล้ว ปริพันธ์จะอยู่ในรูป $(f \circ \phi) \cdot \phi'$

ดังนั้นสำหรับขอบเขตการหาปริพันธ์จะเปลี่ยนไป จาก $t = 1$ จะได้ $x = \phi(1) = 1$ และถ้า $t = 4$ จะได้ $x = \phi(4) = 2$ นั่นคือ

$$\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = \int_1^2 2 \sin x dx = -2 \cos x \Big|_1^2 = 2(\cos 1 - \cos 2)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\int_{-1}^2 4x(1-x^2) dx$

(b) $\int_{-\sqrt{2}}^{-2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

(d) $\int_0^{3\pi/4} |\cos x| dx$

(e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^4}} dx$

2. กำหนดฟังก์ชัน $F(x)$ โดย $F(x) = \int_1^x (3t^2 - 3) dt$ จงหาอนุพันธ์ $\frac{dF(x)}{dx}$ โดย

(a) ใช้การหาปริพันธ์โดยตรง จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ x

(b) ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $\frac{d}{dx} \left[\int_1^x \sin(t^2) dt \right]$

(b) $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x e^{\sqrt{t}} dt \right]$

(c) $\frac{d}{dx} \left[\int_x^0 t \sec t dt \right]$

(d) $\frac{d}{dx} \left[\int_1^{\sin x} (1-t^2) dt \right]$

(e) $\frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t dt \right]$

(f) $\frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$

4. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $F(x) = \int_x^{5x} \frac{1}{t} dt$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง $(0, +\infty)$ พร้อมหาค่าคงที่นั้น (คำใบ้ : พิจารณาจากอนุพันธ์ของ F)

5. กำหนดให้ $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$ สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$

(a) จงหาค่า x ที่ทำให้ F ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(b) จงหาช่วงของ x ที่ F เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด

(c) จงหาช่วงของ x ที่ F มีความเว้าขึ้น และเว้าลง

6. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

7. จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ a ใด ๆ

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

8. จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ $\alpha > 1$

$$\int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

9. จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{ex^2/\pi - e\pi/4 + \int_x^{\pi/2} e^{\sin t} dt}{1 + \cos 2x}$

10. **ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ** (natural logarithm function) $\ln x$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริพันธ์จำกัดเขต

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

(a) จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่ 2 แสดงว่า $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$

(b) จงใช้นิยามที่กล่าวมาข้างต้น แสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก a, c จะได้ว่า $\ln(ac) = \ln a + \ln c$ (คำใบ้ : สร้างฟังก์ชัน $f(x) = \ln(ax)$ แล้วพิจารณาเทียบ $\ln(ax)$ กับ $\ln x$)

2.3 ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ในรูปแบบอ่อน ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัธยฐานฉบับสมบูรณ์ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการประมาณค่าของปริพันธ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.1 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานแบบที่หนึ่งทั่วไปสำหรับปริพันธ์)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยที่ $g(x) \neq 0$ และ $g(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายบน $[a, b]$ แล้ว จะมี $\xi \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

พิสูจน์ เราจะแสดงในกรณีที่ $g(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ สำหรับกรณี $g(x) < 0$ จะสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a, b]$ สมมติว่าค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์นั้นคือ M และ m ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M \\ mg(x) &\leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \\ m \int_a^b g(x) dx &\leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก $g(x) > 0$ จึงได้ว่า

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $m \leq f(x) \leq M$ โดยทฤษฎีบท 2.2.4 จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

นั่นคือ มี $\xi \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

ตามต้องการ □

หมายเหตุ จะเห็นว่า ในทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้าให้ $g(x) = 1$ จะได้ว่า ทฤษฎีบท 2.3.1 ลดรูปเป็นรูปอย่างอ่อนในทฤษฎีบท 2.2.5 กล่าวคือ มี $\xi \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ $\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, \frac{1}{2}]$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0, \frac{1}{2}]$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกตลอดบนช่วงดังกล่าว โดยทฤษฎีบท 2.2.5 จะได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ ที่ทำให้

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx = \left(\frac{1}{2} - 0\right) f(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\xi^2}\right)$$

เนื่องจาก $1 \leq f(\xi) \leq \frac{4}{3}$ จึงได้ว่า $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}f(\xi) \leq \frac{2}{3}$ นั่นคือ

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{สำหรับทุก } k^2 < 2$$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.3.1 เลือก $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ จะเห็นว่า $g(x)$ ไม่เปลี่ยนแปลงเครื่องหมายบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$ จึงได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} [\sin^{-1} x]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{6} f(\xi) \end{aligned}$$

ต่อไปจะพิจารณาขอบเขตของ f ที่เกิดขึ้น จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$

เมื่อ $k^2 < 2$ นั่นคือ $f(0) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$

เนื่องจาก $f(0) \leq f(\xi) \leq f(\frac{1}{2})$ จึงได้ว่า

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} f(\xi) \leq \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \leq \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$$

ตามต้องการ

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาการหาปริพันธ์ กรณีที่ปริพันธ์อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน คือ การหาปริพันธ์แบบแบ่งส่วน เราจะทำการพิสูจน์ผลของการหาปริพันธ์โดยวิธีการแบ่งส่วน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.4 (การหาปริพันธ์แบบแบ่งส่วน)

ให้ $F(x), G(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ และให้ $f(x) = F'(x)$ และ $g(x) = G'(x)$ หาปริพันธ์ได้แบบปริมันน์แล้ว

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(FG)(x)$ หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ ดังนั้น

$$(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

เนื่องจาก F, G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ f, g หาปริพันธ์ได้ ดังนั้น fG และ Fg หาปริพันธ์ได้แบบปริมันน์ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 (ทฤษฎีบท 2.2.1) จะได้ว่า

$$F(x)G(x)|_a^b = \int_a^b (FG)'(x) dx = \int_a^b f(x)G(x) dx + \int_a^b F(x)g(x) dx$$

นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทค่ามัธยฐานที่สองสำหรับปริพันธ์

ทฤษฎีบท 2.3.5 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานแบบที่สองสำหรับปริพันธ์)

ให้ f เป็นฟังก์ชันทางเดียว และ f, f', g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่ามี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

พิสูจน์ ให้ $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ จะเห็นว่า $G(a) = 0$ และเนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 (ทฤษฎีบท 2.2.6) จะได้ว่า $G'(x) = g(x)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b f(x)G'(x) dx \\ &= f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x) dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หาปริพันธ์ได้ และ f เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่ต่อเนื่อง

บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= f(b)G(b) - G(\xi) \int_a^b f'(x) dx \\ &= f(b)G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)] \\ &= f(b)[G(b) - G(\xi)] + f(a)G(\xi) \\ &= f(b) \left[\int_a^b g(t) dt - \int_a^\xi g(t) dt \right] + f(a)G(\xi) \\ &= f(b) \int_\xi^b g(x) dx + f(a) \int_a^\xi g(x) dx \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.3.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

พิสูจน์ จะเห็นว่า เราสามารถเขียนปริพันธ์ในโจทย์ได้ในรูป

$$\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx + \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$$

สำหรับ $\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx &= f(\xi) \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{n}{1+n^2x^2} dx \\ &= f(\xi) \tan^{-1} \sqrt{n} \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า เมื่อ $n \rightarrow \infty$ จะได้ $\xi \rightarrow 0$ และ $\tan^{-1} \sqrt{n} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ นั่นคือ $f(\xi) \tan^{-1} \sqrt{n} \rightarrow \frac{\pi}{2} f(0)$

ต่อไปจะพิจารณาพจน์ $\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$ โดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ที่ทำให้

$$\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = f(\xi_1) \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2} dx$$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน $[0, 1]$ จะได้ว่า f มีขอบเขต กล่าวคือ มีจำนวนจริงบวก K ซึ่ง $|f(x)| \leq K$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx \right| &\leq K \left| \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2} dx \right| \\ &= K |\tan^{-1} n - \tan^{-1} \sqrt{n}| \end{aligned}$$

เมื่อ $n \rightarrow \infty$ จะได้ $|\tan^{-1} n - \tan^{-1} \sqrt{n}| \rightarrow 0$ จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.3.5 จะเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทต่อไปนี้ โดยเราจะยกทฤษฎีบทค่ามัธยฐานแบบที่สองทั่วไปโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.7 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานแบบที่สองทั่วไปสำหรับปริพันธ์)

ให้ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx$$

2. ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

3. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่าง โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\int_0^3 \frac{1}{(1+kx)^{3/2}(1+x)^{5/2}} dx$

(b) $\int_{-1}^4 \frac{\sin^3 x}{(5+x)^{3/2}} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{\cos^2 \theta}{\ln(2+\theta^3)} d\theta$

2. จงใช้ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานแบบที่หนึ่ง และแบบที่สอง ในการพิจารณาปริพันธ์

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ และ $g(x) = x$ บน $[-1, 1]$

3. จงแสดงว่า มี $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$ ซึ่ง

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi_1} = \frac{e-1}{e\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

2.4 การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์

โดยปกติ การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 2.2.6 หรือทฤษฎีบท 2.2.8 ในการหาอนุพันธ์ได้ อย่างไรก็ตาม บางสถานการณ์ เราต้องการหาอนุพันธ์ของปริพันธ์ที่ต้องการหาเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเสริม α ในรูป

$$\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx$$

และต้องการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริมนั้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.4.1 กำหนดให้ $f(x, \alpha) = (3x + \alpha)^2$

จงหา $\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right]$ และ $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$

วิธีทำ สำหรับพจน์ $\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right]$ ก่อนอื่นจะหาปริพันธ์ $\int_0^1 f(x, \alpha) dx$ ก่อน โดยมองว่า α เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right] &= \frac{d}{d\alpha} \left[\int_{\alpha}^{3+\alpha} \frac{u^2}{3} du \right] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{u^3}{9} \Big|_{\alpha}^{3+\alpha} \right] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{(3+\alpha)^3}{9} - \frac{\alpha^3}{9} \right] \\ &= 3 + 2\alpha \end{aligned}$$

สำหรับพจน์ $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$ จะทำการหาอนุพันธ์ย่อยก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์เทียบกับ x จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (3x + \alpha)^2 dx \\ &= \int_0^1 2(3x + \alpha) dx \\ &= \frac{6x^2}{2} + 2\alpha x \Big|_0^1 \\ &= 3 + 2\alpha \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่าในกรณีนี้ $\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right] = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$

คำถามที่น่าสนใจคือ สำหรับฟังก์ชันใด ๆ เราสามารถสลับที่ระหว่างการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริมกับการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปรหลักได้เสมอไปหรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ไม่จริงเสมอไป

ตัวอย่างคำณ 2.4.2 (นำมาจากบทความ [17]) สำหรับฟังก์ชัน

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{x\alpha^3}{(x^2 + \alpha^2)^2} & , x \neq 0 \text{ หรือ } \alpha \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \text{ และ } \alpha = 0 \end{cases}$$

กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha) dx$

จงพิจารณาว่า $\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right]_{\alpha=0} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx \Big|_{\alpha=0}$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า ถ้า $\alpha = 0$ จะได้ว่า

$$\phi(0) = \int_0^1 f(x, 0) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

เมื่อ $\alpha \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x\alpha^3}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx \\ &= \int_{\alpha^2}^{1+\alpha^2} \frac{\alpha^3}{2u^2} du \\ &= \frac{\alpha}{2(1 + \alpha^2)} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right] = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\alpha}{2(1 + \alpha^2)} \right) = \frac{1 - \alpha^2}{2(1 + \alpha^2)^2}$$

$$\text{และได้ว่า } \frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}$$

ต่อไป จะพิจารณาพจน์ $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$ จะเห็นว่า เมื่อกำหนด $f(x, \alpha)$

ดังตัวอย่าง จะได้ว่า (ให้ผู้อ่านแสดงเป็นแบบฝึกหัด)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{x\alpha^2(3x^2 - \alpha^2)}{(x^2 + \alpha^2)^3} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = 0$ นั่นคือ

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^1 f(x, \alpha) dx \right]_{\alpha=0} \neq \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx \Big|_{\alpha=0}$$

จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้ค่าสองค่านี้ไม่เท่ากันคือ การที่ $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)$ ไม่ต่อเนื่องที่

$(0, 0)$ ดังนั้น เราจึงจะพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้การสลับที่ระหว่างอนุพันธ์ของปริพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริม กับปริพันธ์ของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรเสริม มีค่าเท่ากัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.3 (ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ : Leibniz's Theorem)

ให้ $\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx$ โดยที่ $u(\alpha), v(\alpha)$ หาอนุพันธ์ได้ บน ช่วง ปิด $[\alpha_0, \alpha_1]$ ถ้า $f(x, \alpha)$ และ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณซึ่ง $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $u(\alpha) \leq x \leq v(\alpha)$ แล้ว

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(u, \alpha) \frac{du}{d\alpha} + f(v, \alpha) \frac{dv}{d\alpha}$$

พิสูจน์ ก่อนอื่น สร้างฟังก์ชัน $\Delta\phi(\alpha) := \phi(\alpha + \Delta\alpha) - \phi(\alpha)$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\alpha) &= \int_{u(\alpha+\Delta\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx \\ &= \int_{u(\alpha+\Delta\alpha)}^{u(\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx + \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx \\ &\quad + \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx \\ &= \left(\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)] dx \right) \\ &\quad - \int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx + \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx \end{aligned}$$

หารสมการทั้งสมการด้วย $\Delta\alpha$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\phi(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} dx \\ &\quad - \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx \end{aligned}$$

สำหรับพจน์แรก โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า มี $\theta \in (\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$$

กล่าวคือ

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \alpha}$$

สำหรับพจน์ที่สอง โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี ξ_1 ซึ่ง $u(\alpha) < \xi_1 < u(\alpha + \Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx = f(\xi_1, \alpha + \Delta\alpha) \left[\frac{u(\alpha + \Delta\alpha) - u(\alpha)}{\Delta\alpha} \right]$$

และสำหรับพจน์ที่สาม ในทำนองคล้ายกัน โดยทฤษฎีบทค่ามัธยฐานสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี ξ_2 ซึ่ง $v(\alpha) < \xi_2 < v(\alpha + \Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx = f(\xi_2, \alpha + \Delta\alpha) \left[\frac{v(\alpha + \Delta\alpha) - v(\alpha)}{\Delta\alpha} \right]$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\phi(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} dx \\ &\quad - f(\xi_1, \alpha + \Delta\alpha) \left[\frac{u(\alpha + \Delta\alpha) - u(\alpha)}{\Delta\alpha} \right] \\ &\quad + f(\xi_2, \alpha + \Delta\alpha) \left[\frac{v(\alpha + \Delta\alpha) - v(\alpha)}{\Delta\alpha} \right] \end{aligned}$$

เมื่อให้ $\Delta\alpha \rightarrow 0$ จะทำให้ได้ว่า $\theta \rightarrow \alpha$ และจากการที่ u, v หาอนุพันธ์ได้ ทำให้ได้ว่า $\xi_1 \rightarrow u(\alpha), \xi_2 \rightarrow v(\alpha)$ นั่นคือ

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(u, \alpha) \frac{du}{d\alpha} + f(v, \alpha) \frac{dv}{d\alpha}$$

ตามต้องการ □

หมายเหตุ เมื่อขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์เป็นค่าคงที่ กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ a, b นิยาม $\phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ เราจะได้ว่า

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha} + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

ตัวอย่าง 2.4.4 กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ โดยที่ $\alpha > 0$ แล้ว จงหา $\phi'(\alpha)$

วิธีทำ สมมติให้ $f(x, \alpha) = \frac{\sin \alpha x}{x}$ โดยที่ $\alpha > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi'(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(\alpha, \alpha) \frac{d\alpha}{d\alpha} + f(\alpha^2, \alpha) \frac{d\alpha^2}{d\alpha} \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right) dx - \left(\frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} \right) + \left(\frac{\sin(\alpha^3)}{\alpha^2} \right) (2\alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \cos(\alpha x) dx - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2 \sin(\alpha^3)}{\alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \Big|_{\alpha}^{\alpha^2} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2 \sin(\alpha^3)}{\alpha} \\ &= \frac{3 \sin(\alpha^3) - 2 \sin(\alpha^2)}{\alpha} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.5 หากทราบว่า $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ แล้ว จงหา $\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$

วิธีทำ ให้ $\phi(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$
 จะเห็นว่า หากกำหนดให้ $f(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha - \cos x}$ โดยที่ $\alpha > 1$ จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ และ $\alpha \in (0, \infty)$ ดังนั้น

$$\phi'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\alpha - \cos x} \right) dx = - \int_0^\pi \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2} dx$$

และจะพบว่า

$$\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) = - \frac{\alpha\pi}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}$$

นั่นคือ

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2} dx = \frac{\alpha\pi}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $\alpha = 2$ จึงได้ว่า

$$\int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx = \frac{2\pi}{(3)^{3/2}}$$

ในการทำงานเดียวกัน หากฟังก์ชันของตัวแปรเสริม กำหนดโดย $\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx$ เมื่อทำการหาปริพันธ์ของ $\phi(\alpha)$ เทียบกับ α จะพบว่า ปริพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปปริพันธ์ซ้อน เราสามารถสลับลำดับการหาปริพันธ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.6 ให้ $\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx$ และ $f(x, \alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณซึ่ง $u \leq x \leq v$ และ $a \leq \alpha \leq b$ ถ้า u และ v เป็นค่าคงที่แล้ว

$$\int_a^b \phi(\alpha) d\alpha = \int_a^b \int_u^v f(x, \alpha) dx d\alpha = \int_u^v \int_a^b f(x, \alpha) d\alpha dx$$

พิสูจน์ สมมติว่า $F(\alpha) = \int_u^v \int_a^\alpha f(x, \alpha) d\alpha dx$

เนื่องจาก $f(x, \alpha)$ ต่อเนื่อง และ $\int_a^\alpha f(x, \alpha) d\alpha$ ต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบทไลบ์นิตซ์ (ทฤษฎีบท 2.4.3) ทำให้ได้ว่า

$$F'(\alpha) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^\alpha f(x, \alpha) d\alpha dx = \int_u^v f(x, \alpha) dx = \phi(\alpha)$$

นั่นคือ $F(\alpha)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\phi(\alpha)$ ได้ว่า สำหรับค่าคงที่ C ใด ๆ ปริพันธ์ไม่

จำกัดเขตเขียนได้ในรูป

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha \phi(\alpha) d\alpha + C$$

เนื่องจาก $F(a) = 0$ จึงได้ว่า $C = 0$ เพราะฉะนั้น

$$F(\alpha) = \int_u^v \int_a^\alpha f(x, \alpha) d\alpha dx = \int_a^\alpha \int_u^v f(x, \alpha) dx d\alpha$$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $\alpha = b$ จึงได้ว่า

$$\int_a^b \int_u^v f(x, \alpha) dx d\alpha = \int_u^v \int_a^b f(x, \alpha) d\alpha dx$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.4.7 หากทราบว่า $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$
จงแสดงว่า สำหรับ $a, b > 1$ แล้ว

$$\int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx = \pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ หาปริพันธ์เทียบกับ α บนช่วง $[a, b]$ ทั้งสองข้างได้ว่า

$$\int_a^b \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} d\alpha = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} d\alpha$$

สำหรับพจน์ด้านขวา โดยการหาปริพันธ์แบบแทนค่าตรีโกณมิติ จะได้ผลจากการหาปริพันธ์คือ

$$\int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} d\alpha = \left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right]_a^b$$

ด้วยเหตุผลเดียวกันกับตัวอย่าง 2.4.5 โดยทฤษฎีบท 2.4.6 จะได้ว่า

$$\int_0^\pi \int_a^b \frac{dx}{\alpha - \cos x} d\alpha dx = \pi \left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right]_a^b$$

นั่นคือ

$$\int_0^\pi \ln(\alpha - \cos x) \Big|_a^b dx = \pi \left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right]_a^b$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx = \pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงหา $\frac{d\phi}{d\alpha}$ เมื่อกำหนด ϕ ดังต่อไปนี้

$$(a) \phi(\alpha) = \int_0^\pi (1 - \alpha \cos x)^2 dx$$

$$(b) \phi(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} \tan^{-1} \frac{x}{\alpha^2} dx$$

$$(c) \phi(\alpha) = \int_0^\alpha \tan(x - \alpha) dx$$

$$(d) \phi(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \alpha x e^{-x^2} dx$$

$$(e) \phi(\alpha) = \int_{\alpha^2}^{\alpha^4} \ln(\alpha x) dx$$

2. จงคำนวณค่า $\frac{d}{dy} \int_0^1 \sin(e^x y - y^3 + \pi - e^x) dx$ ที่ $y = 1$

3. จงคำนวณค่า $\frac{d}{dx} \int_1^3 \sqrt{x^3 + y^3 + z^3 - 2} dz$ ที่ $(x, y) = (1, 1)$

4. กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha} \frac{\cos(\alpha x^2)}{x} dx$ จงหา $\frac{d\phi}{d\alpha}$

5. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $\int_0^1 f(\sqrt{x}) e^x dx = 6$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(y) e^{xy+y^2} dy$ ที่ $x = 0$

6. กำหนดฟังก์ชัน

$$F(a, b) = \int_0^\pi [\sin x - (ax^2 + bx)^2] dx$$

(a) จงหาจุดวิกฤตของ $F(a, b)$ (คำใบ้ : หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ a, b โดยใช้ทฤษฎีบท 2.4.3)

(b) จงหาค่า a, b ที่ทำให้ F ให้ค่าต่ำสุด (คำใบ้ : ใช้ผลจากข้อ (a))

7. จงแสดงว่า

$$\int_0^1 \int_1^2 (\alpha^2 - x^2) dx d\alpha = \int_1^2 \int_0^1 (\alpha^2 - x^2) d\alpha dx = \int_1^2 dx$$

8. จงแสดงว่า

$$\int_0^2 \int_{-1}^0 (x^3 - 2y) dx dy = \int_{-1}^0 \int_0^2 (x^3 - 2y) dy dx$$

9. หากทราบว่า $\int_0^{2\pi} (\alpha - \sin x) dx = 2\pi\alpha$ จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ a, b ใด ๆ

$$\int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2)$$

10. หากทราบว่า $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

11. จงคำนวณค่า $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$

(คำใบ้ : นิยาม $\phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$ จากนั้นใช้ทฤษฎีบท 2.4.3 และทำในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.6)

12. จงแสดงว่า สำหรับ $|\alpha| < 1$ จะได้ว่า

$$\int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right)$$

This page is intentionally left blank. หน้านี้ตั้งใจเว้นว่างไว้

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

บทที่
3

การจัดการเรียนการสอน บทที่ 3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus)
ชื่อผู้สอน อ.ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
เวลาที่ใช้ 12 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถจำแนกประเภทของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแบบพื้นฐานได้
2. นักศึกษาสามารถทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ โดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ ได้
3. นักศึกษาสามารถทดสอบการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันใด ๆ โดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ ได้
4. นักศึกษาสามารถอธิบายการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ และสามารถทดสอบการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ได้
5. นักศึกษาสามารถใช้สมบัติของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอในการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบางชนิดได้
6. นักศึกษาสามารถคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรีของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
7. นักศึกษาสามารถคำนวณค่าปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ได้
8. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. การบรรยายในชั้นเรียน
2. การยกตัวอย่าง การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องในแต่ละหัวข้อ
3. นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัดจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอการแก้ปัญหาลงหน้าชั้นเรียน
4. นักศึกษาทำแบบฝึกหัดทบทวน และทำการบ้านเพื่อพัฒนาทักษะการพิสูจน์

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนการสอน กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง
2. กระดาน ปากกา กระดาษ เครื่องฉายทึบแสง
3. กระดาษชาร์ตสำหรับเขียนคำตอบหน้าชั้นเรียน

เอกสารอ้างอิง

1. ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ (2556). แคลคูลัส: ผลบวกอนันต์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4. อติชาติ เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
5. Amazigo, J. C., & Rubenfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.
6. Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.
7. Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley
8. Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
9. Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
10. Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
11. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.
12. Culham, J. R. Elliptic Integrals, Elliptic Functions and Theta Functions. Retrieved from http://www.mhthlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap3.pdf
13. Conrad, K. (2018). Differentiating under the integral sign. Retrieved from <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf>
14. Hall, L. M. (1995). Special Functions: Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Retrieved from <http://web.mst.edu/lmhall/SPFNS/sfch3.pdf>
15. Wheeler, J. P. Assigning Value to the Valueless. The Cauchy Principle Method and Related Ideas in Divergent Series. Retrieved from <http://www.pitt.edu/jwheeler/Principal%20Values.pdf>

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ โดยที่ขีดจำกัดของปริพันธ์เป็นจำนวนจริง และปริพันธ์เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิดของขอบเขตของปริพันธ์ อย่างไรก็ตาม ในการหาปริพันธ์ดังกล่าว อาจเกิดเหตุการณ์ที่ขอบเขตของปริพันธ์เป็นอนันต์ หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ หรือเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวพร้อมกันในปริพันธ์เดียว ปริพันธ์ดังกล่าวเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** (improper integral) ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบเบื้องต้น โดยเน้นการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบอย่างง่าย ในกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบเพิ่มขึ้น ในแง่ของการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ รวมถึงการศึกษาลักษณะของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เช่น การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ เพื่อนำสมบัติดังกล่าวไปใช้ในการวิเคราะห์ฟังก์ชัน อาทิ การสลับลำดับระหว่างการหาอนุพันธ์กับปริพันธ์ หรือลิมิต เป็นต้น

3.1 นิยามและการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ดังที่กล่าวมาข้างต้น เรากล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ดังนี้

บทนิยาม 3.1.1 จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\int_a^b f(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ถ้า

- a และ / หรือ b มีขอบเขตเป็นอนันต์ กล่าวคือ $a = -\infty$ และ / หรือ $b = \infty$
- $f(x)$ ไม่มีขอบเขตอย่างน้อยหนึ่งจุด ณ จุด x ซึ่ง $a \leq x \leq b$ จุดเหล่านั้นเรียกว่า **จุดเอกฐาน** (singularity) ของ $f(x)$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 1 ตามนิยาม 3.1.1 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง** (improper integral of the first kind) ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 2 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง** (improper integral of the second kind) และปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 1 และ 2 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม** (improper integral of the third kind) ทั้งนี้ ปริพันธ์จำกัดเขตที่ไม่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะเรียกว่า **ปริพันธ์แท้** (proper integral)

ตัวอย่าง 3.1.1 พิจารณาปริพันธ์ต่อไปนี้

- $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ เป็น ปริ พันธ์ ไม่ ตรง แบบ ชนิด ที่ หนึ่ง เนื่องจาก ปริ พันธ์ มี ขอบเขตซึ่งเป็นอนันต์

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขต (infinite discontinuity) ที่ $x = 0$
3. $\int_3^\infty \frac{1}{x-3} dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม เนื่องจาก ปริพันธ์มีขอบเขตที่เป็นอนันต์ และ $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 3$
4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ เป็นปริพันธ์แท้ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

หมายเหตุ ในแคลคูลัสพื้นฐาน การที่ f มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = c$ เราสามารถพิจารณาได้จากการมีเส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptote) ที่ $x = c$ กล่าวคือ $x = c$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของ f ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty / -\infty \text{ หรือ } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty / -\infty$$

3.1.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

เราจะกล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ตามนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.2 ให้ $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a, t]$ ทุก $t > a$ และนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตโดย

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

หากลิมิตมีค่า จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ **ลู่เข้า** (converge) โดยนิยามเป็นค่าของปริพันธ์ดังกล่าว และกรณีที่ลิมิตไม่มี จะเรียกว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ **ลู่ออก** (diverge)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ขอบเขตล่างเป็นอนันต์ และขอบเขตทั้งสองเป็นอนันต์ได้ในทำนองคล้ายกัน กล่าวคือ

สำหรับ $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ จะนิยาม

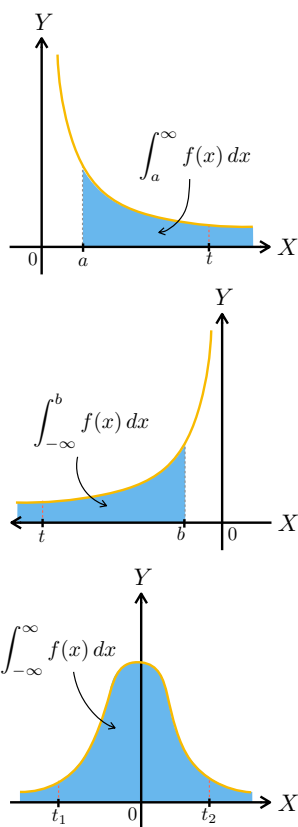
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

และสำหรับ $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ สำหรับจำนวนจริง c จะนิยาม

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^c f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_c^{t_2} f(x) dx$$

โดยปริพันธ์แบบที่สามนี้จะลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละปริพันธ์ลู่เข้า

เนื่องจากปริพันธ์จำกัดเขต คือพื้นที่ที่เครื่องหมายสุทธิ เราจึงอาจพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ดังภาพ 3.1



ภาพที่ 3.1. ภาพแสดงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง แบบที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.1.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$
2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

วิธีทำ 1. ปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ $\frac{1}{2}$

2. จะเห็นว่า ปริพันธ์ดังกล่าว เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\ln |-1| - \ln |t|] = -\infty \end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$ ลู่ออก

3. เนื่องจากปริพันธ์ดังกล่าวมีขอบเขตบนและล่างเป็นอนันต์ทั้งคู่ เราจึงเลือกจุด $x = 0$ เป็นจุดแบ่งปริพันธ์ จึงได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

และเขียนในรูปลิมิตได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_2} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ π

ในตัวอย่างที่ผ่านมา เราทำการพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \frac{1}{x^p}$ จึงน่าสนใจที่จะพิจารณาว่า เงื่อนไขใดของ p ที่ทำให้ปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือลู่ออก รวมถึงปริพันธ์ประเภทที่คล้ายกันด้วย ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงเงื่อนไขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^p}$ และฟังก์ชัน $f(x) = e^{-mx}$ ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.3 .

1. ปริพันธ์ p ชนิดที่หนึ่ง (The p integral of the first kind) เมื่อ p เป็นค่าคงที่ และ $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} -\frac{a^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \leq 1 \end{cases}$$

2. ปริพันธ์เรขาคณิต (geometric integral) โดยที่ m เป็นค่าคงที่

$$\int_a^{\infty} e^{-mx} dx = \begin{cases} \frac{e^{-am}}{m} & \text{เมื่อ } m > 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } m \leq 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ข้อ 1 ส่วนข้อ 2 ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

1. เราจะพิจารณาลิมิตของปริพันธ์ p พบว่า ต้องแบ่งเป็นสองกรณีใหญ่คือ ถ้า $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_a^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right]$$

เนื่องจาก $-\frac{a^{1-p}}{1-p}$ เป็น ค่า คงที่ เรา จึง จะ พิจารณา เงื่อนไข ที่ เกิด ขึ้น จาก พจน์

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p}$ ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ดังนี้

- ถ้า $p > 1$ จะได้ว่า $1-p < 0$ นั่นคือ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} = 0$ ทำให้ปริพันธ์ลู่เข้า และลู่เข้าหา $-\frac{a^{1-p}}{1-p}$
- ถ้า $p < 1$ จะได้ว่า $1-p > 0$ นั่นคือ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} = +\infty$ นั่นคือ ปริพันธ์ลู่ออก

ต่อไป พิจารณากรณีที่ $p = 1$ จะได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln t - \ln a] = +\infty$$

จากทั้งสองกรณี จึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} -\frac{a^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \leq 1 \end{cases}$$

ตามต้องการ

□

3.1.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เราจะกล่าวได้ดังนี้

บทนิยาม 3.1.3 ให้ $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\int_a^b f(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ที่จุด b ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a, t]$ และ f ไม่มีขอบเขตในช่วง (t, b) ทุก $t \in (a, b)$ และนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตโดย

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx \quad (3.1.1)$$

หากลิมิตมีค่า จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ **ลู่เข้า** (converge) โดยนิยามเป็นค่าของปริพันธ์ดังกล่าว และกรณีที่ลิมิตไม่มี จะเรียกว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ **ลู่ออก** (diverge)

ในการทำงานเดียวกัน เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ซึ่งฟังก์ชัน f ณ ขอบเขตล่างไม่มีขอบเขต และกรณีที่ f ไม่มีขอบเขต ณ จุดภายในในช่วง $[a, b]$ ได้ดังนี้

สำหรับ $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ f ไม่มีขอบเขตในช่วง (a, t) สำหรับทุก $t \in (a, b)$ จะนิยาม

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx \quad (3.1.2)$$

และสำหรับ จุด c ที่อยู่ระหว่าง $[a, b]$ โดยที่ f ไม่มีขอบเขตในช่วง (t_1, t_2) สำหรับทุก $t_1, t_2 \in [a, b]$ จะนิยาม

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow c^-} \int_a^{t_1} f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow c^+} \int_{t_2}^b f(x) dx \quad (3.1.3)$$

โดยปริพันธ์แบบนี้สามนี้จะลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละปริพันธ์ลู่เข้า

เพื่อความสะดวก เราอาจจะเขียนปริพันธ์ในสมการ (3.1.1), (3.1.2) และ (3.1.3) ในรูป

$$(\text{แบบที่ 1}) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

$$(\text{แบบที่ 2}) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

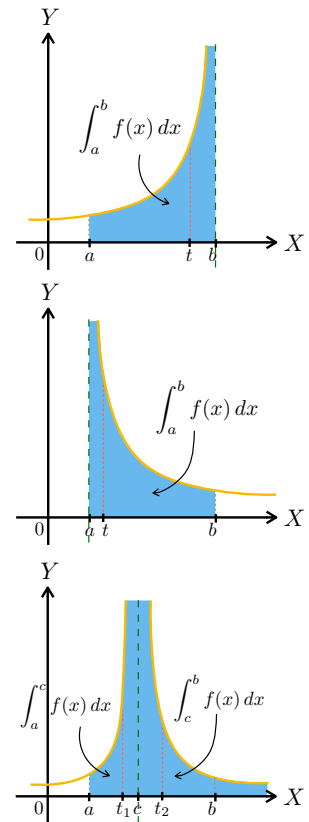
$$(\text{แบบที่ 3}) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$1. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$2. \int_2^3 \frac{1}{2-x} dx$$

$$3. \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$$



ภาพที่ 3.2. ภาพแสดงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง แบบที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ

วิธีทำ 1. จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 1$ ที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ (เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [-2\sqrt{1-t} + 2] = 2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ 2

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{2-x}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 2$ ที่ขอบเขตล่างของปริพันธ์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{2-x} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 \frac{1}{2-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} [-\ln|-1| + \ln|2-t|] = -\infty \end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_2^3 \frac{1}{2-x} dx$ ลู่ออก

3. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{2/3}}$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ $x = 2$ ซึ่งอยู่ภายในช่วง $[1, 3]$ จึงต้องแบ่งปริพันธ์ออกเป็นสองส่วน กล่าวคือ

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$$

ทั้งนี้ สำหรับตัวอย่างนี้จะขอเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบ ϵ ได้ว่า

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\epsilon_1} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$$

พิจารณาแต่ละพจน์ จะเห็นว่า

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\epsilon_1} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} [3(2-\epsilon_1-2)^{1/3} - 3(1-2)^{1/3}] = 3$$

$$\lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} [3(3-2)^{1/3} - 3(2+\epsilon_2-2)^{1/3}] = 3$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx &= 3 + 3 = 6 \quad \text{นั่นคือ ปริพันธ์} \\ \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx &\text{ ลู่เข้าสู่ } 6 \end{aligned}$$

สำหรับกรณีฟังก์ชัน f อยู่ในรูป $f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ หรือ $f(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$ โดยที่ p เป็นค่าคงที่ เราอาจพิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกได้จากเงื่อนไขของ p ซึ่งกำหนดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.5 ปริพันธ์ p ชนิดที่สอง (The p integral of the second kind) เมื่อ $p > 0$ เป็นค่าคงที่

$$1. \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ข้อ 1 ส่วนข้อ 2 สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกัน

1. จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = a$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ ทั้งนี้ เราจะแบ่งกรณีออกเป็น 2 กรณีใหญ่ คือ เมื่อ $p \neq 1$ และ $p = 1$ ดังนี้

ถ้า $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{(b-a)^{1-p} - (t-a)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ว่า

- ถ้า $p < 1$ จะได้ว่า $1-p > 0$ นั่นคือ $\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{(t-a)^{1-p}}{1-p} = 0$ ทำให้ปริพันธ์ลู่เข้าสู่ $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$
- ถ้า $p > 1$ จะได้ว่า $1-p < 0$ นั่นคือ $\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{(t-a)^{1-p}}{1-p} = -\infty$ นั่นคือปริพันธ์ลู่ออกไปสู่ $+\infty$

ถ้า $p = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x-a} dx &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b \frac{1}{x-a} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} [\ln(b-a) - \ln(t-a)] = +\infty \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 3.1.5 จะเห็นว่า ปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์แท้ ถ้า $p \leq 0$

คำมุขสำคัญโคชี

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองของ f ในกรณีที่มีจุด $x = c$ อยู่ในช่วง $[a, b]$ และนิยามลิมิตในรูป

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$$

จะเห็นว่า ϵ_1 และ ϵ_2 ต่างเป็นอิสระซึ่งกันและกัน พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.6 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$ ลู่เข้าหรือไม่ สำหรับ $a > 0$

วิธีทำ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-a}^{0-\epsilon_1} \frac{1}{x} dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^a \frac{1}{x} dx$$

เราสามารถสรุปได้ว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าวลู่ออก เนื่องจากทราบว่า

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} [\ln |-\epsilon_1| - \ln |-a|] = -\infty$$

$$\text{และ} \quad \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} [\ln |a| - \ln |\epsilon_2|] = \infty$$

ในสถานการณ์ดังกล่าว จะพบว่า $f(x) = \frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันคี่ (กล่าวคือ $f(x) = f(-x)$) ซึ่งเมื่อพิจารณาภาพที่ 3.3 พบว่า พื้นที่ใต้กราฟจาก $-a$ ถึง 0 และพื้นที่ใต้กราฟจาก 0 ถึง a สมมาตรกัน และควรจะหักล้างกัน แต่โดยวิธีที่เราทำดังกล่าวจะพบว่า เราไม่สามารถสรุปค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ได้

แต่ถึงแม้ว่าเราไม่สามารถระบุได้ว่าลิมิตของแต่ละเทอมลู่ออกด้วยอัตราเท่าใด ในบางสถานการณ์ เราต้องการนิยามค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดนี้ในกรณีที่ลิมิตของค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่ออกด้วยอัตราที่เท่ากัน ด้วยการกำหนดให้ $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ (ทั้งนี้ กรณีที่เราให้นิยามให้อัตราของการลู่ออกไม่เท่ากัน เราอาจกำหนดค่าให้ $\epsilon_1 = k\epsilon_2$ ได้ตามต้องการ)

หากลิมิตที่เกิดจากการกำหนด $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ มีค่า จะกล่าวว่า ลิมิตดังกล่าวเรียกว่า **คำมุขสำคัญโคชี** (Cauchy principal value) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.7 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$ ลู่เข้าหรือไม่ในแบบค่า

มุขสำคัญของโคชี สำหรับ $a > 0$

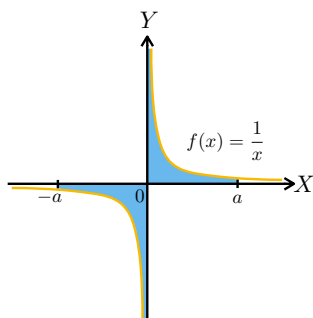
วิธีทำ จากปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-a}^{0-\epsilon_1} \frac{1}{x} dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^a \frac{1}{x} dx$$

หากสมมติให้ $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-a}^{0-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{0+\epsilon}^a \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [(\ln |-\epsilon| - \ln |-a|) + (\ln |a| - \ln |\epsilon|)] = 0$$

นั่นคือ ปริพันธ์ $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$ ลู่เข้าสู่ 0 ในแบบค่ามุขสำคัญของโคชี



ภาพที่ 3.3. พื้นที่แสดงปริพันธ์ $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$

หมายเหตุ การใช้ค่ามุลค่าสำคัญแบบโคชี สามารถใช้ได้สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ลู่ออก ถ้าปริพันธ์ที่ลู่ออกนั้นไม่ทำให้ค่าของปริพันธ์ดังกล่าวเปลี่ยนแปลงค่า

3.1.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

จะเห็นว่า เราสามารถพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามได้จากการแยกปริพันธ์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง เมื่อกำหนดปริพันธ์มาให้ เราจึงจะแยกพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ละชนิด ดังนี้

- ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามจะลู่ออก ก็ต่อเมื่อ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองทุกปริพันธ์ที่ประกอบเป็นปริพันธ์ดังกล่าวจะลู่ออก
- ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามจะลู่ออก ก็ต่อเมื่อ ถ้ามีปริพันธ์อย่างน้อยหนึ่งปริพันธ์ที่ประกอบเป็นปริพันธ์ดังกล่าวนั้นลู่ออก

ตัวอย่าง 3.1.8 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ เมื่อ $p > 0$ ลู่ออกหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากปริพันธ์ดังกล่าว เป็นปริพันธ์ที่มีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เราจึงสามารถแบ่งปริพันธ์ออกได้เป็น

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

- กรณี $p \geq 1$ จากทฤษฎีบท 3.1.5 ทำให้ได้ว่า $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ ลู่ออก จึงทำให้ $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ลู่ออก
- กรณี $0 < p < 1$ จากทฤษฎีบท 3.1.3 ทำให้ได้ว่า $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ลู่ออก จึงทำให้ $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ลู่ออกเช่นกัน

ทั้งสองกรณี จึงสรุปได้ว่า ปริพันธ์ $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ลู่ออก สำหรับทุก $p > 0$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบหรือไม่ หากเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จงระบุชนิดของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ พร้อมเขียนลิมิตของปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดย ไม่ต้องคำนวณค่า

(a) $\int_1^5 \frac{dx}{1-x}$

(b) $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

(d) $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad & \int_0^1 \frac{\ln x}{x^3 + 5} dx \\ \text{(f)} \quad & \int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx \\ \text{(g)} \quad & \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x - \cos \frac{\pi}{2}} dx \end{aligned}$$

2. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้า จงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx \\ \text{(b)} \quad & \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx \\ \text{(c)} \quad & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{(d)} \quad & \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}} dx \\ \text{(e)} \quad & \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ \text{(f)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} dx \end{aligned}$$

3. จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ (หมายเหตุ: ให้ตรวจสอบก่อนว่าปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดใด โดยใช้กฎโลปีตาล)

4. จงหาปริพันธ์โดยแทน u ที่กำหนดให้ แล้วคำนวณปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \text{ โดยแทน } u = \sqrt{x} \text{ (} u \rightarrow \infty \text{ เมื่อ } x \rightarrow \infty \text{)} \\ \text{(b)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx \text{ โดยแทน } u = 1 - e^{-x} \text{ (} u \rightarrow 1 \text{ เมื่อ } x \rightarrow \infty \text{)} \end{aligned}$$

5. กำหนดปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือไม่ (1) ในแบบปกติ (2) ในแบบค่ามูขำสำคัญโคชี

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-1}^5 \frac{1}{(x-1)^4} dx \\ \text{(b)} \quad & \int_0^5 \frac{1}{x-3} dx \\ \text{(c)} \quad & \int_0^6 \frac{x+4}{x-4} dx \\ \text{(d)} \quad & \int_{-2}^1 \frac{10x+4}{(5x+x^2)^3} dx \end{aligned}$$

หมายเหตุ หากพิจารณาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตโดยใช้ค่ามูขำสำคัญโคชี ไม่ควรหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์ไปพร้อมกับเปลี่ยนขอบเขตการหาปริพันธ์ เนื่องจากทำให้เกิดปัญหาหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงกัน ดูคำอธิบายได้จากบทความ [19]

6. จงแปลงปริพันธ์ $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$ ให้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยใช้การแปลง $u = \frac{1}{1-x}$

หมายเหตุ โดยทั่วไป เราอาจแปลงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองของ $\int_a^b f(x) dx$ ที่ขอบเขตบน ให้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = \frac{1}{b-x}$ จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่าง dx และ du

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ m

$$\int_a^\infty e^{-mx} dx = \begin{cases} \frac{e^{-am}}{m} & \text{เมื่อ } m > 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } m \leq 0 \end{cases}$$

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ 2 กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ $p > 0$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

3.2 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราศึกษานิยามพื้นฐานของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ อย่างไรก็ตาม ในหลาย ๆ สถานการณ์ เราอาจไม่ต้องการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ แต่ต้องการทราบเพียงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือไม่เท่านั้น รวมถึงในบางครั้ง การทราบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า นำมาซึ่งผลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันด้วย

ในหัวข้อนี้และหัวข้อถัดไป เราจะทำการศึกษาวิธีการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ โดยเราจะเริ่มต้นจากการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งก่อน

3.2.1 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ไม่เป็นลบ

เราจะทำการทดสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 ในรูปแบบ

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

โดยสมมติว่า f มีขอบเขต และหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, t]$ สำหรับทุก $t \geq a$ โดยเราจะสมมติให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกเสมอในช่วง $[a, x]$ ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ฟังก์ชัน f เป็นลบ เราจะกำหนดฟังก์ชัน $-f$

ก่อนที่จะเรากล่าวถึงวิธีการตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะขอพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานที่รับประกันการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \geq a$ บน $[a, t]$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $\int_a^t f(x) dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$

พิสูจน์ ก่อนอื่นเรานิยาม $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ สำหรับ $t \in [a, \infty)$ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะใช้ทฤษฎีบทลำดับทางเดียว (monotonic sequence theorem) กล่าวคือ ถ้า F มีขอบเขตบนแล้ว $F(t)$ จะลู่เข้าหาจำนวนจริง เมื่อ $t \rightarrow \infty$ ดังนั้น เราจะพิสูจน์ได้ดังนี้

($\Rightarrow$) สมมติให้ $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ จึงได้ว่า $F(t)$ เพิ่มขึ้นเมื่อ $t \rightarrow \infty$ จากข้อสมมติฐาน สมมติว่า $F(t)$ ลู่เข้าเมื่อ $t \rightarrow \infty$ จึงได้ว่า $F(t)$ มีขอบเขต นั่นคือ มี M ที่เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ $\int_a^t f(x) dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี M ที่ทำให้ $\int_a^t f(x) dx \leq M$ เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ จึงได้ว่า $F(t)$ เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบทลำดับทางเดียวจึงได้ว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้าเมื่อ $t \rightarrow \infty$ $\square$

จะกล่าวว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออก ถ้าไม่สามารถหาจำนวนจริง M ที่เป็นขอบเขตบนได้ กล่าวคือ $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออกสู่ ∞ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

เราสามารถสร้างวิธีการตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ ดังวิธีที่หนึ่งต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.2 (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ: Comparison test)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่เป็นบวก โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, t]$ ซึ่ง $t > a$ แล้ว

1. ถ้า $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออกด้วย

พิสูจน์ 1. สมมติให้ f, g มีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a, t]$ ทุก $t \geq a$ จากข้อสมมติฐานที่ว่า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, t]$ จึงได้ว่า

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \quad (3.2.1)$$

จาก $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า มี $M > 0$ ที่ทำให้ $\int_a^\infty g(x) dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$ จึงได้ว่า $\int_a^\infty f(x) dx < M$ สำหรับทุก $t \geq a$ ด้วย โดยทฤษฎีบท 3.2.1 ได้ว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า

2. ถ้า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออก จะได้ว่า $\int_a^t f(x) dx$ ไม่มีขอบเขตบน โดย (3.2.1) จึงได้ว่า $\int_a^t g(x) dx$ ไม่มีขอบเขตบน นั่นคือ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออก ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 3.2.3 จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่ออกหรือไม่

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\int_a^\infty \frac{1}{e^x+1} dx$

วิธีทำ 1. เนื่องจากเราทราบว่า $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{1}{2x}$ และ $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ เป็นปริพันธ์ p เมื่อ $p = 1$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 ได้ว่า $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ ลู่ออก โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ลู่ออก

2. พิจารณา $\frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{e^x+1}$ และจาก $\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \int_1^\infty e^{-x} dx$ เป็นปริพันธ์เรขาคณิต ซึ่ง $m = 1 > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 ได้ว่า $\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx$ ลู่ออก โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_a^\infty \frac{1}{e^x+1} dx$ ลู่ออก

จะเห็นว่า วิธีที่ผ่านมามีการอาศัยการจัดขอบเขตบน ซึ่งเกิดความยุ่งยาก อย่างไรก็ตาม เรามีวิธีการทดสอบอีกวิธีหนึ่งที่สะดวกขึ้นโดยการใช้ลิมิตเปรียบเทียบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.4 (การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ: Limit comparison test)

ให้ f, g เป็นบวกบน $[a, t]$ ซึ่ง $t > a$

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ แล้ว $\int_a^\infty f(x) dx$ และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออกหรือลู่ออกเหมือนกัน
2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออก
3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออก

พิสูจน์ 1. สมมติว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ จะได้ว่า มี $k > a$ ซึ่งสำหรับทุก $x > k$ แล้ว $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon$ เราจึงได้ว่า

$$(L - \epsilon)g(x) < f(x) < (L + \epsilon)g(x)$$

- พิจารณากรณี $(L - \epsilon)g(x) < f(x)$ สำหรับทุก $x > k > a$

ถ้า $\int_k^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\int_k^\infty g(x) dx$ ลู่เข้า
และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่เข้าด้วย

• พิจารณากรณี $f(x) < (L + \epsilon)g(x)$ สำหรับทุก $x > k > a$

ถ้า $\int_k^\infty f(x) dx$ ลู่ออก โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\int_k^\infty g(x) dx$ ลู่ออก
และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออกเช่นกัน

2. สมมติว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ จะได้ว่า มี k ที่ทำให้ $\frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$ สำหรับทุก
 $x > k$ นั่นคือ $f(x) < \epsilon g(x)$ สำหรับทุก $x > k$

ดังนั้น ถ้า $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่เข้า แล้ว โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ ว่า
 $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า

3. สมมติว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ จะได้ว่า มี k, M ซึ่ง $\frac{f(x)}{g(x)} > M$ นั่นคือ
 $f(x) > Mg(x)$ สำหรับทุก $x \geq k$

ดังนั้น ถ้า $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่ออก แล้ว โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ ว่า
 $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออกด้วย □

ตัวอย่าง 3.2.5 จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

$$1. \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2. \int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x-1} dx$$

$$3. \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$4. \int_1^\infty x^n e^{-x} dx \text{ สำหรับจำนวนจริงบวก } n > 0$$

วิธีทำ 1. เมื่อ $x \rightarrow \infty$ จะเห็นว่า $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$ เราจึงเลือก
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, g(x) = \frac{1}{x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 (ปริพันธ์ p เมื่อ $p = 1$)

โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
ลู่ออก

2. เลือก $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + x - 1}} = 1$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบ

ลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x-1} dx$ ลู่ออก

3. เลือก $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$$

(โดยกฎโลปีตาล) เนื่องจาก $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1

โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$ ลู่ออก

4. สำหรับ $n > 0$ เลือก $f(x) = x^n e^{-x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = 0$$

จาก $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ลู่ออกโดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิต

เปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty x^n e^{-x} dx$ ลู่ออก

จากวิธีการทดสอบดังกล่าว เราอาจสร้างวิธีการทดสอบที่ใช้งานได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.2, 3.2.4 และทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 ประกอบกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.6 1. ถ้า $f \geq 0$ บนช่วง $[a, t]$ แล้ว

- ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x) dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p > 1$ และจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $f(x) \leq M/x^p$ สำหรับทุก $x \geq a$
- ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x) dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p \leq 1$ และจำนวนจริงบวก G ที่ทำให้ $f(x) \geq G/x^p$ สำหรับทุก $x \geq a$

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x)$ หาค่าได้และไม่เป็นศูนย์แล้ว ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x) dx$ จะลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $p > 1$

ตัวอย่าง 3.2.7 ปริพันธ์ $\int_0^\infty \frac{1}{4x^2 + 25} dx$ ลู่ออก

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{4x^2 + 25} = \frac{1}{4}$

3.2.2 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งทั่วไป

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทำการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งในกรณี
ที่ $f(x) \geq 0$ ซึ่งจะเห็นว่า การลู่เข้าหรือการลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ฟังก์ชันมีค่าเป็น
บวกเพียงอย่างเดียว นั้นขึ้นอยู่กับค่าของฟังก์ชันมีค่ามาก ๆ อย่างไรก็ตาม หากฟังก์ชัน
 f อยู่ในกรณีทั่วไปที่อาจเป็นได้ทั้งบวกและลบ การลู่เข้าอาจขึ้นอยู่กับการแกว่งของค่าล
ิมิตนั้น ดังนั้นเราจึงจะพิจารณาการลู่เข้าของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปผ่านการพิจารณาการลู่เข้าแบบ
สัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ และ $\int_a^\infty f(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ
ชนิดที่หนึ่ง

1. ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x) dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อ
เมื่อ $\int_a^\infty |f(x)| dx$ ลู่เข้า
2. ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x) dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergent) ก็ต่อ
เมื่อ $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า แต่ $\int_a^\infty |f(x)| dx$ ลู่ออก

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท
ดังกล่าวก่อน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_a^\infty g(x) dx$ และ $\int_a^\infty h(x) dx$ เป็นปริพันธ์
ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง จะได้ว่า

1. ถ้า $\int_a^\infty f(x) dx$ และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^\infty (f(x) \pm g(x)) dx$ จะ
ลู่เข้า
2. ถ้า $\int_a^\infty f(x) dx$ และ $\int_a^\infty g(x) dx$ ลู่เข้า โดยที่ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
สำหรับทุก $x \geq a$ แล้ว $\int_a^\infty h(x) dx$ จะลู่เข้าด้วย

พิสูจน์ 1. เขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิต แล้วอาศัยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 4, 5
ทำให้สามารถแยกปริพันธ์จำกัดเขตเป็นบวกหรือผลลบได้ จากนั้นใช้สมบัติของลิมิต
มาพิจารณาอีกครั้ง

2. เนื่องจาก $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ จึงได้ว่า $0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$
จาก $\int_a^\infty f(x) dx$ และ $\int_a^\infty h(x) dx$ ลู่เข้า จากข้อ 1 จึงได้ว่า $\int_a^\infty (h(x) - f(x)) dx$ จึงลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\int_a^\infty (h(x) - f(x)) dx$ ลู่เข้า ทำให้สรุปได้ว่า
 $\int_a^\infty h(x) dx$ ลู่เข้าตามต้องการ □

การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะช่วยให้เราสามารถพิจารณาการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.9 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จะลู่เข้า กล่าวคือ ถ้า $\int_a^\infty |f(x)| dx$ ลู่เข้า แล้ว $\int_a^\infty f(x) dx$ จะลู่เข้า

พิสูจน์ เนื่องจาก $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ จึงได้ว่า

$$\int_a^\infty -|f(x)| dx \leq \int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$$

จากการกำหนดให้ $\int_a^\infty |f(x)| dx$ โดยทฤษฎีบท 3.2.8 จึงได้ว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้าตามต้องการ $\square$

ดังนั้น หากเรามีปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x) dx$ ที่ทำการทดสอบ แล้วพบว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เราก็จะสามารถสรุปได้ว่า ปริพันธ์ดังกล่าวนั้นลู่เข้าได้ทันที ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.10 จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เมื่อ $p > 1$

วิธีทำ ก่อนอื่นเราจะพิจารณาว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เนื่องจาก

$$\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{|\sin x|}{x^p} = \frac{1}{x^p}$$

และ $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

(ทฤษฎีบท 3.2.2) จึงได้ว่า $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.9 สรุปได้ว่า $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.2.11 จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \sin \frac{3}{x} dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ ในกรณีนี้จะเห็นว่า หากเราเริ่มต้นโดยพิจารณา $\int_1^\infty \left| \sin \frac{3}{x} \right| dx$ จะพบว่า

เราทำการเปรียบเทียบกับ $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ซึ่งพบว่าลู่ออก ทฤษฎีบท 3.2.1 จึงไม่สามารถ

ใช้ในการตรวจสอบได้ ดังนั้น เราจึงต้องพิจารณาจากสมบัติพื้นฐานของปริพันธ์

$$\int_1^\infty \sin \frac{3}{x} dx$$

เราจะเห็นว่า $\sin \frac{3}{x} \geq 0$ เมื่อ $x \geq 1$ ดังนั้นจึงพบว่าปริพันธ์ดังกล่าวมีค่าเป็น

บวกเสมอ ดังนั้นเมื่อเลือก $f(x) = \sin \frac{3}{x}$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$ โดยใช้ลิมิตเปรียบเทียบ

จะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin t}{t} = 3$$

และ $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ลู่ออก จึงสรุปได้ว่า $\int_1^\infty \sin \frac{3}{x} dx$ ลู่ออก

เราสามารถพิจารณาการลู่เข้าหรือออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้อีกวิธีหนึ่ง โดยการให้เกณฑ์ของโคชี (Cauchy criterion) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.12 (เกณฑ์ของโคชีสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง)

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x) dx$ ชนิดที่หนึ่ง ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $X_0 \geq a$ ที่ทำให้

$$\left| \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \right| < \epsilon \text{ สำหรับทุก } X_1, X_2 > X_0$$

พิสูจน์ นิยาม $F(X) = \int_a^X f(x) dx$ เป็นฟังก์ชันของ X เราจะพิจารณาโดยใช้เกณฑ์การลู่เข้าของโคชีสำหรับฟังก์ชัน $F(X)$ กล่าวคือ $F(X)$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริงเมื่อ $X \rightarrow \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $X_0 \geq a$ ซึ่งสำหรับทุก $X_1, X_2 > X_0$ แล้ว $|F(X_1) - F(X_2)| < \epsilon$ นั่นคือ

$$\left| \int_a^{X_1} f(x) dx - \int_a^{X_2} f(x) dx \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \right| < \epsilon$$

ตามต้องการ □

ดังนั้น หากใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 3.2.12 ทำให้เราสามารถตรวจสอบได้ว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออก ถ้ามี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ทุก $X_0 \geq a$ มี $X_1, X_2 > X_0$ ซึ่ง $\left| \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \right| \geq \epsilon$

เราสามารถสร้างทฤษฎีบทเพื่อใช้ในการทดสอบการลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์สามารถศึกษาได้จาก [1]

ทฤษฎีบท 3.2.13 ถ้า $\int_a^\infty f(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ลู่เข้า และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงหรือ $\pm\infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

ตัวอย่าง 3.2.14 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_2^\infty \frac{\ln x - 2x^2}{x^2 - 1} dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ เราจะใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 3.2.13 มาพิจารณา กล่าวคือพิจารณา

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - 2x^2}{x^2 - 1} = -2 \neq 0$$

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า $\int_2^\infty \frac{\ln x - 2x^2}{x^2 - 1} dx$ ลู่ออก

หมายเหตุ เราควรระมัดระวังว่า หาก $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ หรือ $\pm\infty$ เราจะสรุปได้ว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่ออก แต่หากลิมิตของ $f(x)$ ไม่มีค่าแล้ว จะยังสรุปไม่ได้ว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่ออก

นอกจากนี้ เรายังมีการทดสอบการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ชนิดอื่น ๆ โดยเราจะยกทฤษฎีบทดังกล่าวมาไว้โดยละการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.15 (การทดสอบแบบอาเบล : Abel's test)

ถ้า $\phi(x)$ เป็น ฟังก์ชัน ที่มีขอบเขต และเป็น ฟังก์ชัน ทางเดียว บน $[a, \infty)$ และ $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^\infty f(x)\phi(x) dx$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.2.16 (การทดสอบแบบดิริเคล : Dirichlet's test)

ถ้า $\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต เป็นฟังก์ชันทางเดียว ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $x \rightarrow \infty$ และ $\int_a^X f(x) dx$ มีขอบเขตเมื่อ $X \geq a$ แล้ว $\int_a^\infty f(x)\phi(x) dx$ ลู่เข้า

3.2.3 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่ไม่เป็นลบ

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ก่อนอื่นเราพิจารณากรณีที่ฟังก์ชัน f มีความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$ กล่าวคือ จะเขียนลิมิตได้ในรูป

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก ทำให้เราได้ว่า $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a, b)$ ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2.1, 3.2.2 และ 3.2.4 เราจึงได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ โดยจะละการพิสูจน์ เนื่องจากทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถทำได้ในทำนองคล้ายกัน

ทฤษฎีบท 3.2.17 ให้ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in [a, b)$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x) dx$ ที่ $x = b$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $\int_a^t f(x) dx \leq M$ สำหรับทุก $t \in [a, b)$

ทฤษฎีบท 3.2.18 (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ: Comparison test)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่เป็นบวก โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$ แล้ว

1. ถ้า $\int_a^b g(x) dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^b g(x) dx$ ลู่ออกด้วย

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.2.19 จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

$$1. \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$$

$$2. \int_3^6 \frac{\ln x}{(x - 3)^4} dx$$

วิธีทำ 1. จะเห็นว่า สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}}$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่จุด $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ที่กำหนด เนื่องจากสำหรับ $x > 1$ ได้ว่า $x^4 - 1 > x - 1$ นั่นคือ $\frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} < \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$ เนื่องจาก $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x - 1}} dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 1, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$ ลู่เข้า

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\ln x}{(x - 3)^4}$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่จุด $x = 3$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เนื่องจาก $\ln x > 1$ สำหรับ $x > 3$ จึงได้ว่า $\frac{\ln x}{(x - 3)^4} > \frac{1}{(x - 3)^4}$ เนื่องจาก $\int_3^6 \frac{1}{(x - 3)^4} dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 3, p = 4$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\int_3^6 \frac{\ln x}{(x - 3)^4} dx$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.2.20 (การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ: Limit comparison test) ให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวก

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ และ $\int_a^b g(x) dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\int_a^b g(x) dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า

3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ และ $\int_a^b g(x) dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออก

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน โดยพิจารณาลิมิตซึ่ง $x \rightarrow a^+$

ตัวอย่าง 3.2.21 จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

$$1. \int_0^3 \frac{1}{(3 - x)\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$2. \int_0^1 -\ln x dx$$

วิธีทำ 1. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ มีจุด $x = 3$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน

ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ที่กำหนด เลือก $g(x) = \frac{1}{3-x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

เนื่องจาก $\int_0^3 \frac{1}{3-x} dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $b = 3, p = 1$) โดย

การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$ ลู่ออก

2. ฟังก์ชัน $f(x) = -\ln x$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่จุด $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เลือก $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} = 0$$

เนื่องจาก $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 0, p = \frac{1}{2}$) โดยการ

ทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\int_0^1 -\ln x dx$ ลู่ออก

ในการทำงานร่วมกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เราสามารถสร้างวิธีการทดสอบที่ใช้งานได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.18, 3.2.20 และทฤษฎีบท 3.1.5 ประกอบกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.22 1. ถ้า $f \geq 0$ ในย่านจุดใกล้เคียงของ b แล้ว

- ปริพันธ์ $\int_a^b f(x) dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p < 1$ และจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $f(x) \leq M/(b-x)^p$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$
- ปริพันธ์ $\int_a^b f(x) dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p \geq 1$ และจำนวนจริงบวก G ที่ทำให้ $f(x) \geq G/(b-x)^p$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x)$ มีค่าและไม่เป็นศูนย์แล้ว ปริพันธ์ $\int_a^b f(x) dx$ จะลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $p < 1$

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.2.23 ปริพันธ์ $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$ ลู่เข้า

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}$

3.2.4 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองทั่วไป

ในการทำงานเกี่ยวกับการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองทั่วไป เราสามารถนิยามการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และการตรวจสอบการลู่เข้าได้โดยสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้อยู่แล้ว เพราะการพิสูจน์ เนื่องจากสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน โดยเราจะยกตัวอย่างกรณีที่ f ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$ สำหรับกรณี $x = a$ และกรณีจุดในช่วง $[a, b]$ ไม่ต่อเนื่อง สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้

บทนิยาม 3.2.2 ให้ $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ และ $\int_a^b f(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง โดยที่ x ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$

1. ปริพันธ์ $\int_a^b f(x) dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\int_a^b |f(x)| dx$ ลู่เข้า
2. ปริพันธ์ $\int_a^b f(x) dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergent) ก็ต่อเมื่อ $\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า แต่ $\int_a^b |f(x)| dx$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.2.24 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จะลู่เข้า กล่าวคือ สำหรับ $\int_a^b f(x) dx$ ที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่ง $x = b$ ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ ถ้า $\int_a^b |f(x)| dx$ ลู่เข้า แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ จะลู่เข้า

ตัวอย่าง 3.2.25 จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ เราพิจารณาว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เนื่องจาก

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^{1/2}}$$

และ $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 0, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบ

เปรียบเทียบ จึงได้ว่า $\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.24 สรุปได้ว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ในการทำงานเดียวกัน เราสามารถพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าแบบโคชี สำหรับกรณีปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองได้ทำนองเดียวกัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.26 (เกณฑ์ของโคชีสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง)

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x) dx$ ชนิดที่สอง เมื่อ f ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = b$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\left| \int_{a+\lambda_1}^{b+\lambda_2} f(x) dx \right| < \epsilon \text{ โดยที่ } 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \delta$$

สำหรับการพิสูจน์สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกันกับทฤษฎีบท 3.2.12 โดยกำหนดฟังก์ชัน $F(\lambda) = \int_{a+\lambda}^b f(x) dx$ แล้วพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าแบบโคชีของ $F(\lambda)$

3.2.5 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

เนื่องจากเราสามารถเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามในรูปแบบของผลบวกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและสอง เราจึงสามารถพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามได้จากการพิจารณาการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและสอง ซึ่งเราได้สร้างวิธีการตรวจสอบมาในหัวข้อที่ผ่านมา โดยเราสามารถพิจารณาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.27 จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ จากปริพันธ์ที่กำหนดให้ เราพบว่า เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม เนื่องจากมีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน $f(x) = \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 1$ เราจึงต้องแยกปริพันธ์ดังกล่าวออกเป็นสามส่วน กล่าวคือ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx + \int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx + \int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$$

เราจะพิจารณาปริพันธ์ที่ละพจน์ ดังนี้

- พจน์ $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่งมีจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตบนของปริพันธ์ เราจึงทำการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

เนื่องจาก $f(x) = \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีค่าเป็นลบในช่วง $[0, 1]$ เราจึงพิจารณา $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1-x)^{1/3}} dx$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกตลอดในช่วง $[0, 1]$

เนื่องจากเราทราบว่า $e^{-x} \leq 1$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$ นั่นคือ $\frac{e^{-x}}{(1-x)^{1/3}} \leq \frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ จึงเลือกปริพันธ์ $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$ ซึ่งลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.5 โดยทฤษฎีบท 3.2.18 จึงได้ว่า $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ ลู่เข้า

- พจน์ $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่งมีจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เราจึงทำการทดสอบแบบเปรียบเทียบ
สำหรับพจน์ที่สอง $f(x) = \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีค่าเป็นบวกตลอดบนช่วง

$[0, 1]$ ทำนองเดียวกันกับพจน์ที่หนึ่ง จะได้ว่า $\frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} \leq \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$ จึง

เลือกปริพันธ์ $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}} dx$ ซึ่งลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.5 โดยทฤษฎีบท

3.2.18 จึงได้ว่า $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ ลู่เข้า

- พจน์ $\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยขอบเขตบนเป็นอนันต์

เลือกฟังก์ชัน $g(x) = e^{-x}$ ซึ่งเราทราบว่า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}(x-1)^{1/3}} = 0$$

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 ทำให้ได้ว่า $\int_2^\infty e^{-x} dx$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.4 จึงได้ว่า $\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ ลู่เข้า

จากทั้งสามปริพันธ์ลู่เข้า เราจึงสรุปได้ว่าปริพันธ์ $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} dx$ ลู่เข้า ตามต้องการ

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x} dx$

(d) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

(e) $\int_0^\infty \frac{1}{x+\ln x} dx$

(f) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{4x} dx$

2. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

(b) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)^2}$

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{-\ln x}$

(d) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$

(e) $\int_3^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$

(f) $\int_1^2 (x - 1)^{1/3} dx$

(g) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$

3. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้า จงพิจารณาว่า การลู่เข้าเป็นการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

(a) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^4} dx$

(b) $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin x dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x} dx$

(d) $\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

4. จงพิจารณาว่า สำหรับค่าคงที่ $a > 0$ ปริพันธ์ $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a} dx$ ลู่เข้าหรือไม่

5. จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ ลู่เข้าหรือไม่

6. สำหรับ $t > 0$ จงแสดงว่า

(a) $\int_t^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ ลู่เข้า

(b) $\int_t^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ลู่เข้า

(คำใบ้ : พิจารณาพจน์ $\int_t^M \frac{\sin x}{x} dx$ โดยการหาปริพันธ์แต่ละส่วน แล้วใช้ผลจากข้อ a.)

7. ถ้า $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามในเทอมของ x โดยที่

$Q(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \geq a$ จงแสดงว่า $\int_a^\infty f(x) dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ $Q(x)$ มากกว่าดีกรีของ $P(x)$ อย่างน้อยสอง

8. ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามซึ่งไม่มีตัวประกอบร่วมกันเลย จงแสดงว่า $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

ลู่ออก เมื่อรากของพหุนาม $Q(x) = 0$ อยู่ในช่วง $a \leq x \leq b$

3.3 การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

ในบทที่ 2 เราเคยพิจารณาฟังก์ชันที่นิยามในรูปแบบอิงตัวแปรเสริม

$$\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx$$

ซึ่งโดยทฤษฎีบท 2.4.3 เราสามารถพิจารณาสลับลำดับการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ได้

ในหลายเหตุการณ์ ฟังก์ชันที่นิยามข้างต้น อาจพิจารณาได้ในรูปของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ กล่าวคือ

$$\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ x และ α ซึ่ง $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ และ $x \in [a, \infty)$ จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $\phi(\alpha)$ เป็นฟังก์ชันของ α เช่นเดียวกันกับเหตุการณ์ที่เคยกล่าวในทฤษฎีบท 2.4.3 เราสนใจว่า

1. $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องหรือไม่ บนเซตใด
2. $\phi(\alpha)$ หาปริพันธ์ได้บน $[\alpha_1, \alpha_2]$ หรือไม่ และ $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha) d\alpha = \int_a^\infty f(x, \alpha) d\alpha$ หรือไม่
3. $\phi(\alpha)$ หาอนุพันธ์ได้หรือไม่ และ $\phi'(\alpha) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$ หรือไม่

เนื่องจาก $\phi(\alpha)$ นิยามโดยปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เราอาจพิจารณาว่า การลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบจะรับประกันเหตุการณ์ดังกล่าวที่กล่าวมาข้างต้นได้หรือไม่ ซึ่งจะพบว่า เงื่อนไขดังกล่าวไม่เพียงพอที่จะสรุปเหตุการณ์ดังกล่าว เราจึงพิจารณาการลู่เข้าชนิดที่เหมาะสมกว่าดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.1 จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ **ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ** (converge uniformly) สำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง N ซึ่งเป็นอิสระจาก α ซึ่งสำหรับทุก $p \geq N$

$$\left| \int_a^\infty f(x, \alpha) dx - \int_a^p f(x, \alpha) dx \right| = \left| \int_p^\infty f(x, \alpha) dx \right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$

หมายเหตุ เราอาจศึกษาฟังก์ชัน $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ ให้อยู่ในลักษณะการศึกษานุกรมนันต์ กล่าวคือ ให้

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ นั่นคือ เราเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปผลบวกอนันต์ กล่าวคือ

$$\int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, \alpha) dx$$

สมมติให้ $u_n(\alpha) = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, \alpha) dx$ ในการศึกษาอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชัน

หากอนุกรม $\sum_{n=1}^\infty u_n(\alpha)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอแล้ว $\phi(\alpha)$ ก็จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

อย่างไรก็ตาม การพิจารณาการลู่เข้าของลำดับนี้อาจไม่เป็นไปได้อย่างเดียว (uniqueness) การนิยามผ่านลิมิตของผลบวกอนันต์อาจไม่เพียงพอ เราจึงต้องนิยามแนวคิดของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอตามบทนิยาม 3.3.1

ในการตรวจสอบการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ นอกจากการใช้นิยามการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ดังทฤษฎีบท 3.3.1 แล้ว เรายังมีวิธีทดสอบต่าง ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1 (การทดสอบแบบไวแยร์สตราส : Weierstrass M-test)

ถ้า $M(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก และมีความต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq N$ และถ้า

1. $|f(x, \alpha)| \leq M(x)$ สำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha_2, x \geq N$ และ

2. $\int_a^\infty M(x) dx$ ลู่เข้า

แล้ว $\int_N^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

พิสูจน์ สมมติให้สมมติฐานเป็นจริง ให้ $\epsilon > 0$ จาก $\int_N^\infty M(x) dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า มี

$N > a$ ซึ่งทำให้ $\int_N^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้า กล่าวคือ

$$\left| \int_a^\infty M(x) dx - \int_a^N M(x) dx \right| < \epsilon \quad \forall S \geq N$$

นั่นคือ สำหรับทุก $S \geq N$ และ $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ จะได้ว่า

$$\int_N^\infty M(x) dx = \left| \int_a^\infty M(x) dx - \int_a^N M(x) dx \right| < \epsilon$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\infty f(x, \alpha) dx - \int_a^N f(x, \alpha) dx \right| &= \left| \int_N^\infty f(x, \alpha) dx \right| \\ &\leq \int_N^\infty |f(x, \alpha)| dx \\ &\leq \int_N^\infty M(x) dx < \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_N^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

□

ตัวอย่าง 3.3.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

1. $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} dx$ บน $(-\infty, \infty)$
2. $\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin(\alpha x) dx$ บน $(-\infty, \infty)$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก $\left| \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $x > 0$ จึงเลือก $M(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ซึ่ง $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$ ลู่เข้า นั่นคือ

$$\int_0^\infty \left| \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} \right| dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

ดังนั้นโดยการทดสอบแบบไวแยร์สตรัส จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} dx$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ และลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. พิจารณา $|x e^{-x^2} \sin(\alpha x)| \leq x e^{-x^2}$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $x \geq 0$

เนื่องจาก $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านตรวจสอบเป็นแบบฝึกหัด) โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตรัส จะได้ว่า $\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin(\alpha x) dx$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ และลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.3.3 กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx$ สำหรับ $\alpha > 0$

1. จงคำนวณค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\phi(\alpha)$
2. จงแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 สำหรับ $\alpha \geq \alpha_1 > 0$
3. จงแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ สำหรับ $\alpha > 0$

วิธีทำ 1. เราคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้โดยตรง กล่าวคือ

$$\phi(\alpha) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \alpha e^{-\alpha x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^b = 1$$

2. จะแสดงโดยใช้นิยามของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 หากจะแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 จะต้องแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ จะมี N (ซึ่งขึ้นอยู่กับ ϵ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับ α) ซึ่ง $\left| 1 - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} dx \right| < \epsilon$ สำหรับทุก $u > N$

ดังนั้น ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $N = \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\epsilon}$ ซึ่งทำให้

$$\left| 1 - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = |1 - (1 - e^{-\alpha u})| = e^{-\alpha u} \leq e^{-\alpha_1 u} < \epsilon$$

สำหรับ $u > N$ ตามต้องการ (เราสามารถแสดงการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอโดยวิธีไวแยร์สตราส ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)

3. เมื่อ $\alpha_1 \rightarrow 0$ จะเห็นว่า $N = \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\epsilon}$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต นั่นคือปริพันธ์ $\phi(\alpha)$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha > 0$

หมายเหตุ ในการเลือก N ในข้อที่ 2. ของตัวอย่างดังกล่าว จากการคิดหาค่าเพื่อให้ได้ว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ จะพิจารณาว่า หาก $u > N$ แล้ว ปริพันธ์จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้นจากอสมการ $e^{-\alpha_1 u} < \epsilon$ จึงแก้สมการเพื่อหาค่า N

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการทดสอบการลู่เข้าอีกชนิดของดิริคเลต โดยเราจะละการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.4 (การทดสอบแบบดิริคเลต : Dirichlet's test)

สำหรับจำนวนจริง α_1, α_2 ถ้า

1. $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวกและเป็นฟังก์ชันลดทางเดียว โดยที่ $\psi(x) \rightarrow 0$ เมื่อ $x \rightarrow 0$ และ

2. $\int_a^u f(x, \alpha) dx$ มีขอบเขต สำหรับทุก $u > a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

แล้ว $\int_a^\infty f(x, \alpha) \psi(x) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับทุก $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

สำหรับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

บทนิยาม 3.3.2 จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ ซึ่งเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = a$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบนช่วง S ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $t_0 \in (a, b]$ ซึ่ง

$$\left| \int_a^b f(x, \alpha) dx - \int_t^b f(x, \alpha) dx \right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $\alpha \in S, a < t < t_0 \leq b$

และการทดสอบแบบไวแยร์สตราสสามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.5 (การทดสอบแบบไวแยร์สตราส II: Weierstrass M-test II)

ถ้า $M(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก และถ้า

1. $|f(x, \alpha)| \leq M(x)$ สำหรับ $\alpha \in S, x \in (a, b]$ และ

2. $\int_a^b M(x) dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ซึ่งลู่เข้า

แล้ว $\int_a^b f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์บน S

3.3.1 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะ เป็นทฤษฎีบทที่ช่วยตอบคำถามข้างต้นของหัวข้อนี้เกี่ยวกับฟังก์ชัน $\phi(\alpha)$ โดยเริ่มต้น เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่อง ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.6 ถ้า $f(x, \alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ ต่อเนื่องบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ นั่นคือ สำหรับจุด $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ จะได้ว่า

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \phi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx$$

พิสูจน์ จาก $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ จะได้ว่า เราเขียน

$$\phi(\alpha) = \int_a^u f(x, \alpha) dx + R(u, \alpha)$$

โดยที่ $R(u, \alpha) = \int_u^\infty f(x, \alpha) dx$ เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า

$$\phi(\alpha + h) = \int_a^u f(x, \alpha + h) dx + R(u, \alpha + h)$$

สำหรับ $\alpha + h \in [\alpha_1, \alpha_2]$ นั่นคือ

$$\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha) = \int_a^u [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)] dx + R(u, \alpha + h) - R(u, \alpha)$$

เพราะฉะนั้น

$$|\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha)| \leq \int_a^u |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| dx + |R(u, \alpha + h)| + |R(u, \alpha)|$$

เนื่องจากปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ จึงได้ว่า มี N (ซึ่งเป็นอิสระจาก α) ที่ทำให้สำหรับแต่ละ $u > N$

$$|R(u, \alpha + h)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ และ } |R(u, \alpha)| < \frac{\epsilon}{3}$$

จาก $f(x, \alpha)$ มีความต่อเนื่อง จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| < \delta/3$ เมื่อ $|h| < \delta$ นั่นคือ

$$\int_a^u |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| dx < \frac{\epsilon}{3}$$

เพราะฉะนั้น

$$|\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

นั่นคือ $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[\alpha_1, \alpha_2]$ ตามต้องการ $\square$

กล่าวโดยสรุปคือ หากปริพันธ์ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอแล้ว เราจะสามารถสลับลิมิตเข้าไปในปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ ตัวอย่างด้านล่างนี้จะแสดงให้เห็นว่า หากขาดซึ่งเงื่อนไขการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ก็จะทำให้ทฤษฎีบท 3.3.6 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่างค้าน 3.3.7 จงแสดงว่า

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx \neq \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha e^{-\alpha x} \right) dx$$

พิสูจน์ ในตัวอย่าง 3.3.3 จะเห็นว่า

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = 1$$

แต่เนื่องจาก

$$\int_0^\infty \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha e^{-\alpha x} \right) dx = \int_0^\infty 0 dx = 0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx \neq \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha e^{-\alpha x} \right) dx$$

ทั้งนี้ จะเห็นว่าในตัวอย่าง 3.3.3 นั้น $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha > 0$ ทำให้ไม่สามารถรับประกันได้ว่า $\phi(\alpha)$ จะต่อเนื่องสำหรับ $\alpha > 0$ $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการสลับลำดับของการหาปริพันธ์ ซึ่งในทฤษฎีบทนี้จะคล้ายกับทฤษฎีบท 2.4.3 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.8 ถ้า $f(x, \alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^\infty f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_a^\infty \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right] dx$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ และเราทราบว่า $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) dx$ ต่อเนื่อง ทุก $\alpha \geq \alpha_1$ ต่อไปเราจะแสดงว่า

$$\int_a^K \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha dx \text{ ลู่เข้าสู่ } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha) d\alpha \text{ เมื่อ } K \rightarrow \infty$$

จากทฤษฎีบท 2.4.6 เราได้ว่า

$$\int_a^K \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_a^K f(x, \alpha) dx d\alpha$$

เนื่องจากปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ ลู่เข้าสม่ำเสมอ จะได้ว่า สำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง N ซึ่งสำหรับ $N > a$ ซึ่ง $S \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| \int_a^\infty f(x, \alpha) dx - \int_a^S f(x, \alpha) dx \right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha) d\alpha - \int_a^K \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha dx \right| \\ = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_a^K f(x, \alpha) dx d\alpha \right| \\ \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left| \int_a^\infty f(x, \alpha) dx - \int_a^K f(x, \alpha) dx \right| d\alpha \\ \leq \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

จึงได้ว่า เราสามารถสลับการหาปริพันธ์ได้ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 3.3.9 จงแสดงว่า $\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} d\alpha dx = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ สำหรับ $b > a > 0$

วิธีทำ จะเห็นว่า $f(x, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$ มีความต่อเนื่องบน $[0, \infty) \times [a, b]$ ต่อไปเราจะพิจารณาว่า $\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[a, b]$ จาก $\alpha \geq a$ เราจึงได้ว่า $\left| \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \right| \leq \frac{1}{1+a^2 x^2}$ เนื่องจาก $\int_a^\infty \frac{1}{1+a^2 x^2} dx$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตราส (ทฤษฎีบท 3.3.1) จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[a, b]$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3.8 จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} d\alpha dx &= \int_a^b \int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} dx d\alpha \\ &= \int_a^b \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du d\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} \int_a^b \frac{1}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาการสลับลำดับระหว่างการหาอนุพันธ์กับเครื่องหมายปริพันธ์ตามทฤษฎีบท 2.4.3 สำหรับปริพันธ์ที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.10 ถ้า $f(x, \alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อย $\partial f / \partial \alpha$ ต่อเนื่องเทียบกับ α สำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

$$\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่หนึ่ง (ทฤษฎีบท 2.2.1) สำหรับทุก $y \in (a_1, a_2)$ ได้ว่า

$$\int_{\alpha_1}^y \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = f(y, x) - f(\alpha_1, x)$$

เนื่องจาก $\int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ โดยทฤษฎีบท 3.3.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^y \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} dx d\alpha &= \int_a^\infty \int_{\alpha_1}^y \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha dx \\ &= \int_a^\infty [f(y, x) - f(\alpha_1, x)] dx \\ &= \phi(y) - \phi(\alpha_1) \end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่สอง (ทฤษฎีบท 2.2.6) จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha_1}^y \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} dx d\alpha = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx = \phi'(y)$$

จึงสรุปได้ว่า $\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ ตามต้องการ $\square$

หมายเหตุ ในทฤษฎีบท 3.3.10 จะเห็นว่า a ที่เป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ไม่ตรงแบบจะไม่ขึ้นอยู่กับ α ในกรณีที่ a เป็นขอบเขตล่างที่เป็นฟังก์ชันของ α เราจะสามารถใช้ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ (ทฤษฎีบท 2.4.3) ดำเนินการได้เช่นเดียวกัน

3.4 การคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในส่วนนี้เราจะศึกษาวิธีการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ซึ่งหลายปริพันธ์ได้ใช้เทคนิคในการจัดพจน์ของปริพันธ์ อาทิ การใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ รวมถึงสมบัติที่ได้กล่าวข้างต้นคือการใช้สมบัติของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งสามารถช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบบางปริพันธ์ที่คำนวณค่าตามปกติได้ยาก โดยอาศัยการสลับลำดับการหาปริพันธ์หรือสลับการหาอนุพันธ์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.4.1 จงแสดงว่า $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$

วิธีทำ ก่อนอื่น จะต้องแสดงว่า $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด โดยการตรวจสอบการลู่เข้า) จึงสมมติได้ว่า ให้ $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ เรา จะทำการสมมติตัวแปร ให้ $x = \pi/2 - y$ จะได้ว่า

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos y) dy$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin x) + \ln(\cos x)) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

ต่อมา กำหนดให้ $2x = v$ จะได้ว่า $dx = \frac{1}{2} dv$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin v) dv \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin v) dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v) dv \right] \end{aligned}$$

สำหรับปริพันธ์พจน์สุดท้าย กำหนดให้ $v = \pi - u$ จะได้ว่า

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v) dv = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin u) du$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx = \frac{1}{2}(I + I) = I$ ดังนั้น จากสมการ (3.4.1) ทำให้ได้ว่า $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.4.2 1. จงแสดงว่า $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ สำหรับทุก $\alpha \geq 1$

2. หากทราบว่า $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$ แล้ว จงคำนวณค่า $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

3. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) 2}$$

วิธีทำ 1. สำหรับ $\alpha \geq 1$ โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตรัส จะได้ว่า

$$\frac{1}{x^2 + \alpha} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

และเนื่องจาก $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha} dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านตรวจสอบเป็นแบบฝึกหัด) จะได้ว่า $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha}$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

2. พิจารณาพจน์

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.4.2)$$

(ผู้อ่านสามารถแสดงได้โดยใช้การหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยตรง) ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

เนื่องจาก $\frac{1}{(x^2 + \alpha)^2} \leq \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ และ $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตรัส จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

โดยทฤษฎีบท 3.3.10 ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.4.2) เทียบกับ α ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha} \right) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{x^2 + \alpha} \right) \\ &= - \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha)^2} dx = -\frac{\pi}{4} \alpha^{-3/2} \end{aligned}$$

ต่อไป เราต้องการพิจารณากรณีที่ $\alpha \rightarrow 1^+$ เนื่องจาก $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$ โดยใช้ทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า

$$- \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2} = - \int_0^\infty \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2} = - \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{\pi}{4} \alpha^{-3/2} = -\frac{\pi}{4}$$

3. ในทำนองคล้ายกันกับข้อ 2. เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2} \alpha^{-1/2}$$

และสามารถแสดงได้ว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$ และเมื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ α จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2} = \frac{\pi}{4} \alpha^{-3/2}$$

ซึ่งในทำนองเดียวกันกับข้อ 2. เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha} dx = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{x^2 + \alpha} \right) dx$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่ n เทียบกับ α จะทำให้ได้

$$(-1)(-2)\dots(-n) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2} = \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{-5}{2} \dots \frac{-(2n-1)}{2} \frac{\pi}{2} \alpha^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

เมื่อให้ $\alpha \rightarrow 1^+$ โดยทฤษฎีบท 3.3.10 จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(-1)(-3)\dots(-2n-1)}{2^n(-1)^n n!} \frac{\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

สำหรับการแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta$ เราสามารถแสดงได้โดยให้ $x = \tan \theta$ จะได้พจน์ตามที่ต้องการ

แบบฝึกหัดที่ 3.3 - 3.4

1. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอหรือไม่

(a) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$ สำหรับ $\alpha \in [a, b]$ เมื่อ $0 < a < b < \infty$

(b) $\int_0^\infty e^{-x} \sin(\alpha^2 + x^2) dx$ สำหรับ $\alpha \in (-\infty, \infty)$

(c) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ สำหรับ $\alpha > 0$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{\alpha x^2 + 1} dx$ สำหรับ $\alpha \in [\epsilon, \infty)$ เมื่อ $\epsilon > 0$

2. พิจารณา $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos rx dx$ สำหรับ $\alpha > 0$ และสำหรับจำนวนจริง r ใด ๆ

(a) จงแสดงว่า $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos rx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}$

(b) จงแสดงว่า $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos rx dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าสัมบูรณ์ สำหรับ $a \leq \alpha \leq b$ โดยที่ $0 < a < b$ และจำนวนจริง r ใด ๆ

3. จงแสดงว่า $\int_0^\pi x \ln \sin x dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$

4. จงแสดงว่า $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\alpha x} dx$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[1, 2]$

5. จงแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$ โดยที่ $b > a > 0$

6. จงแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x \sec rx} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$ โดยที่ $a, b > 0$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.8)

7. จงแสดงว่า $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2}$ โดยที่ $\alpha > 0$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.10)

8. จงแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 8, 1c และทฤษฎีบท 3.3.6)

3.5 บทนำสู่ปริพันธ์เชิงวงรี

ในแคลคูลัสพื้นฐาน การหาความยาวของส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ สามารถหาได้จากปริพันธ์จำกัดเขต

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.5.1)$$

ปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งคือ การหาความยาวเส้นรอบรูปวงรี สมมติให้วงรีมีสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a < b$ และสมการในรูปอิงตัวแปรเสริมเขียนได้ในรูป $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ จะได้ว่า ความยาวของเส้นรอบวงรีหาได้จาก

$$L = 4b^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

โดยที่ $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ ซึ่งปริพันธ์ดังกล่าวไม่สามารถคำนวณค่าได้โดยวิธีปกติที่เคยศึกษามาแล้ว

ปัญหาต่อไปที่น่าสนใจคือ ปัญหาการแกว่งลูกตุ้ม (เพนดูลัม) สมมติว่ามีลูกตุ้มความยาว L ที่ไม่มีความหน่วง มีการเคลื่อนที่ที่สามารถจำลองได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin u = 0$$

โดยที่ u คือมุมระหว่างลูกตุ้มกับเส้นแนวตั้งจากกับพื้นโลก เป็นฟังก์ชันของเวลา t และ g คือค่าคงที่เนื่องจากแรงดึงดูดของโลก ซึ่งในทางฟิสิกส์ เราอาจทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (ดูรายละเอียดจาก [18]) สมมติว่ามุมเริ่มต้น $u(0) = A$ จะได้คาบของการแกว่ง $T(A)$ โดยที่ $k = \sin \frac{A}{2}$ โดย

$$T(A) = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

ซึ่งก็ไม่สามารถคำนวณค่าของปริพันธ์โดยวิธีปกติเช่นกัน เราจึงต้องมีวิธีการในการสร้างรูปแบบมาตรฐานของปริพันธ์ชนิดพิเศษเหล่านี้ เพื่อให้ได้เครื่องมือสำหรับช่วยคำนวณค่าเมื่อปัญหาสามารถแปลงได้ในรูปของปริพันธ์ดังกล่าว

3.5.1 ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองด์

ปริพันธ์เชิงวงรีแบบพื้นฐานได้รับการศึกษาโดยแอนเดรียน มารี เลอจองด์ (Andrien-Marie Legendre) โดยปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองด์สามารถแบ่งได้เป็นสามชนิด โดยกำหนดให้ $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ดังนี้

1. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองด์ชนิดที่หนึ่ง** (The Legendre's elliptic integral of the first kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$u = F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 \leq k^2 < 1 \quad (3.5.2)$$

ตัวแปรเสริม k เรียกว่า **โมดูลัส** (modulus) ของปริพันธ์เชิงวงรี และ ϕ เรียกว่า **แอมพลิจูด** (amplitude) ของปริพันธ์เชิงวงรี ซึ่ง $0 \leq \phi < \pi/2$

ในกรณี ϕ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $F(k, \phi)$ เป็น**ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์** (incomplete elliptic integral) ชนิดที่หนึ่ง และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $F(k, \frac{\pi}{2}) = K(k) = K$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่า **ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์** (complete elliptic integral) ชนิดที่หนึ่ง

2. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองด์ชนิดที่สอง** (The Legendre's elliptic integral of the second kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad 0 \leq k^2 < 1$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี ϕ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $E(k, \phi)$ เป็น**ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์** ชนิดที่สอง และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $E(k, \frac{\pi}{2}) = E(k) = E$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่า**ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์** ชนิดที่สอง

3. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองด์ชนิดที่สาม** (The Legendre's elliptic integral of the third kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\pi(k, n, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 \leq k^2 < 1$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจริงซึ่ง $n \neq 0$

สำหรับกรณี ϕ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $\pi(k, n, \phi)$ เป็น**ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์** ชนิดที่สาม และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $E(k, n, \frac{\pi}{2}) = \pi(k, n)$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่า**ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์** ชนิดที่สาม

ในการคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรี เราจะใช้การคำนวณค่าซึ่งคำนวณได้โดยใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ในการกระจายพจน์

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{3}{4}k^4 \sin^4 \theta + \dots$$

นั่นคือ

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} k^{2n} \sin^{2n} \theta d\theta$$

โดยใช้สูตรของ Wallis ทำให้ได้ว่า

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 k^{2n}$$

ตัวอย่าง 3.5.1 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}$ ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

วิธีทำ ให้ $x = \frac{1}{t}$ ดังนั้นปริพันธ์ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}$ สามารถเขียนได้ในรูป $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
สมมติว่า $t = \sin \phi$ จะได้ว่า $dt = \cos \phi d\phi$ ซึ่ง

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - \sin^4 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2 - \cos^2 \theta}}$$

ให้ $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีแบบบริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง นั่นคือ

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{2}\right)$$

สำหรับค่าของ $K(\frac{1}{2})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 3.5.2 จงหาความยาวส่วนโค้ง $y = \sin x$ สำหรับ $0 \leq x \leq \pi$

วิธีทำ จากสูตรความยาวส่วนโค้ง (3.5.1) จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \cos x$ และความยาวส่วนโค้งคือ

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

ซึ่งจะได้ปริพันธ์ดังกล่าวในรูปปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่สองเป็น

$$L = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \sin^2 x} dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx = 2\sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

โดยค่าของ $E(\frac{1}{\sqrt{2}})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์

3.5.2 ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบี

จะเห็นว่า สำหรับปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลขจอนส์ สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งอาจยังไม่สะดวกในการทำงาน โดยอาศัยการแปลงให้ $v = \sin \theta, x = \sin \phi$ จะทำให้ได้ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีได้ ดังนี้

1. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่หนึ่ง** (The Jacobi's elliptic integral of the first kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$F_J(k, x) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad 0 \leq k^2 < 1, 0 \leq \sin \phi \leq 1$$

เมื่อ $\phi = \pi/2$ จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบี นั่นคือ $x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ได้ว่า

$$F_J(k, 1) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad 0 \leq k^2 < 1, 0 \leq \sin \phi \leq 1$$

2. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่สอง** (The Jacobi's elliptic integral of the second kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$E_J(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}} dv \quad 0 \leq k^2 < 1$$

โดยปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบีชนิดที่สอง ให้ $\phi = \pi/2$ จะได้ $x = 1$ ซึ่งพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

3. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่สาม** (The Jacobi's elliptic integral of the third kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\pi_J(k, n, x) = \int_0^x \frac{1}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} dv \quad 0 \leq k^2 < 1$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจริงซึ่ง $n \neq 0$

และเมื่อ $x = 1$ ก็จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบีชนิดที่สาม

สมมติให้ $R(x, y)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะในพจน์ของ x, y เราสามารถแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในรูปฟังก์ชันอย่างง่าย (elementary function) เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งอยู่ในรูปของรากที่สองของฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร x กล่าวคือ ปริพันธ์เชิงวงรีคือปริพันธ์ใด ๆ ที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x) = \int \frac{A(x) + B(x)}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}} dx$$

โดยที่ $A(x), B(x), C(x)$ และ $D(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ x และ $S(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสามหรือสี่ ซึ่งปริพันธ์เชิงวงรีสามารถพิจารณาได้ในการวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

จากปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่หนึ่ง ทั้งแบบเลอจองด์และจาโคบี เราสามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีแบบจาโคบี (Jacobian elliptic function) ได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5.1 ให้ u เป็นปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่หนึ่ง และ ϕ, x นิยามตาม (3.5.2) ฟังก์ชันเชิงวงรีแบบจาโคบี $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ นิยามโดย

$$\begin{aligned}\text{sn } u &= \sin \phi = x \\ \text{cn } u &= \cos \phi = \sqrt{1 - x^2} \\ \text{dn } u &= \sqrt{k^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - k^2 x^2}\end{aligned}$$

จากนิยามดังกล่าว ทำให้เราได้ผลที่ตามมาที่คล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น เอกลักษณะ $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$ และสามารถนิยามฟังก์ชันเพิ่มเติม เช่น $\text{tn } u = \frac{\text{sn } u}{\text{cn } u}$ และได้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรี เช่น

1. $\frac{d}{du}(\text{sn } u) = (\text{cn } u)(\text{dn } u)$
2. $\frac{d}{du}(\text{cn } u) = -(\text{sn } u)(\text{dn } u)$
3. $\frac{d}{du}(\text{dn } u) = -k^2(\text{sn } u)(\text{dn } u)$
4. $\frac{d}{du}(\text{tn } u) = \frac{\text{dn } u}{\text{cn}^2 u}$

ตัวอย่าง 3.5.3 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} dx$ ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

วิธีทำ เพื่อให้สามารถคำนวณค่าได้สะดวก เราจะจัดรูปปริพันธ์ให้อยู่ในรูปปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลขจอร์จ โดยใช้การแทนค่าแบบตรีโกณมิติ

ให้ $x = 2 \sin \theta$ จะได้ว่า $dx = 2 \cos \theta d\theta$ จะได้ว่า สำหรับขอบเขต เมื่อ $x = 0$ จะได้ $\theta = 0$ และเมื่อ $x = 2$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{(4-4 \sin^2 \theta)(9-4 \sin^2 \theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(9-4 \sin^2 \theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9} \sin^2 \theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{3} K\left(\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

สำหรับค่าของ $K(\frac{2}{3})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์

หมายเหตุ การคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรี สามารถคำนวณได้จากเว็บไซต์ Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com>) หรือ ซอฟต์แวร์ คณิตศาสตร์ Wolfram Mathematica® โดยใส่คำสั่งต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	คำสั่งใน WolframAlpha
ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $F(m, \phi)$ แอมพลิจูด ϕ และโมดูลัส $m = k^2$	EllipticF[ϕ , m]
ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $K(m)$	EllipticK[m]
ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สอง $E(m, \phi)$ แอมพลิจูด ϕ และโมดูลัส $m = k^2$	EllipticE[ϕ , m]
ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สอง $E(m)$	EllipticE[m]
ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สาม $\pi(m, n, \phi)$ แอมพลิจูด ϕ และโมดูลัส $m = k^2$	EllipticPi[n, ϕ , m]
ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สาม $\pi(m, n)$	EllipticPi[n, m]

แบบฝึกหัดที่ 3.5

1. จงคำนวณค่าของปริพันธ์เชิงวงรีต่อไปนี้

$$(a) \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} dx$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{15} \sin^2 x}} dx$$

$$(c) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}} dx$$

$$(d) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} dx$$

2. โดยใช้ความสัมพันธ์ $\sqrt{\cos x} = \cos \phi$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = \sqrt{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3. โดยใช้ความสัมพันธ์ $\sin^2 \theta = \frac{1}{k^2}(1 - k^2 \sin^2 \theta)$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{k^2}(K - E)$$

4. จงหาความยาวของเส้นรอบวงรีที่กำหนดดังสมการ $4x^2 + 9y^2 = 36$ โดยตอบในรูปของปริพันธ์เชิงวงรี

5. จงหาความยาวของส่วนโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของวงรีที่กำหนดโดย $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ โดยเส้นโค้งอยู่ระหว่างจุด $(0, 2)$ และ $(1/2, \sqrt{3})$ (ตอบในรูปของปริพันธ์เชิงวงรี)

6. หากสังเกตปริพันธ์เชิงวงรี จะพบว่า ปริพันธ์เชิงวงรีที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง จงใช้วิธีการตรวจสอบที่ได้ศึกษามาแล้วแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้า

$$(a) E = \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - k^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad \text{เมื่อ } 0 < k < 1$$

$$(b) F = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad \text{เมื่อ } b > 1/k$$

3.6 ปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบ

ในการคำนวณปริพันธ์หลายชั้นในแคลคูลัสพื้นฐาน เราคำนวณค่าของปริพันธ์หลายชั้นบนบริเวณปิดและมีขอบเขต ดังนั้น หากเราขยายนิยามของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตสู่ปริพันธ์หลายชั้น เราก็จะสามารถพิจารณาปริพันธ์หลายชั้นและทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้ในทำนองคล้ายกัน

ในที่นี้เราจะเริ่มต้นพิจารณาจากตัวอย่างจากปัญหาการหาปริพันธ์สองชั้นในกรณีที่บริเวณของการหาปริพันธ์เป็นบริเวณที่ไม่มีขอบเขต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6.1 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

วิธีทำ จากปริพันธ์ที่กำหนดให้ เราทำการหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณซึ่งอยู่ในจุดภาคที่หนึ่ง ทั้งนี้ วิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้คือ การเปลี่ยนระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว (เราได้กล่าวในหัวข้อ 1.9) โดยสมมติให้ $x = r \cos \phi$ และ $y = r \sin \phi$ จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\phi$$

ทำให้ได้ว่า เราเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตได้ กล่าวคือ

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\phi = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^M e^{-r^2} r dr d\phi$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^M e^{-r^2} r dr d\phi &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} e^{-M^2} + \frac{1}{2} \right) d\phi \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-M^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

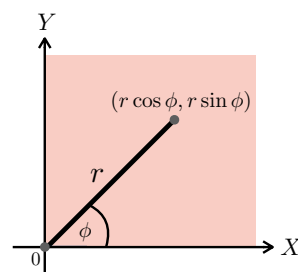
ซึ่งเราสามารถนำผลที่ได้ดังกล่าวไปประยุกต์กับการหาปริพันธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6.2 จงแสดงว่า $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

วิธีทำ สมมติให้ $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ จากการเขียนปริพันธ์ดังกล่าวในรูปตัวแปรหุ่นได้ จะทำให้ได้ว่า $I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$ ด้วย ดังนั้น

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

เนื่องจากเราทราบว่า $I^2 = \frac{\pi}{4}$ จากตัวอย่าง 3.6.1 จึงได้ว่า $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ตามต้องการ



ภาพที่ 3.4. บริเวณในการหาปริพันธ์ในตัวอย่าง

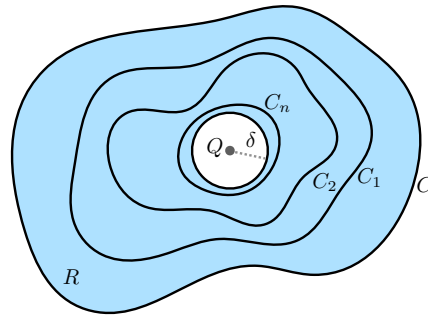
ต่อไปเราจะพิจารณานิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ในกรณีที่ขอบเขตของปริพันธ์เป็นขอบเขตปิด แต่มีจุดในบริเวณจำกัดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์

สมมติว่า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งต่อเนื่องทุก ๆ ในบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งปิด C ยกเว้นที่จุด $Q(x_0, y_0)$ ซึ่งทำให้ f ไม่มีขอบเขต สัญลักษณ์

$$\int_R f(x, y) dS$$

โดยที่ dS คือส่วนของพื้นที่ในบริเวณ R จะเรียกว่า ปริพันธ์สองชั้นไม่ตรงแบบ (improper double integral)

ให้ $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ของเส้นโค้งในบริเวณ R ซึ่งแต่ละเส้นโค้งปิดล้อมจุด $Q(x_0, y_0)$ และแต่ละเส้นโค้งซ้อนในซึ่งกันและกัน ดังภาพ 3.5



ภาพที่ 3.5. ลำดับของเส้นโค้ง $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ ซึ่งเป็นบริเวณของการหาปริพันธ์ยกเว้นที่จุด Q

ให้ R_n เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย C_n ซึ่ง $R_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นิยามบริเวณปิดซึ่งอยู่ด้านนอกของ C_n และบริเวณภายในของ C โดย $R - R_n$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x, y)$ มีความต่อเนื่องบนบริเวณ $R - R_n$ และปริพันธ์ $\int_{R-R_n} f(x, y) dS$ มีค่าสำหรับทุก n

เพราะฉะนั้น หากลิมิต

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R-R_n} f(x, y) dS$$

มีค่าสำหรับการเลือก R_n ใด ๆ แล้ว จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\int_R f(x, y) dS$ ลู่เข้า กล่าวคือ

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\left| \int_{R'} f(x, y) dS \right| < \epsilon$$

สำหรับทุกบริเวณย่อย R' ของ R ซึ่งไม่บรรจุย่านจุดเปิดจุด Q ซึ่งรัศมี δ

ทั้งนี้ วิธีการตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [12] และ [9]

แบบฝึกหัดที่ 3.6

1. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$
2. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_0^3 \int_0^\infty \frac{y}{x^2 + 4} dx dy$
3. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_{4/3}^\infty \int_3^\infty \frac{1}{(xy - 2)^2} dx dy$
4. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_0^3 \int_0^\infty \frac{y}{x^2 + 4} dx dy$
5. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int \int_D \frac{1}{1 + x + y} dA$ เมื่อ D คือบริเวณที่กำหนดโดย $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < \infty, 0 < y < 1\}$
6. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int \int_D 1 + \sin x \cos y dA$ เมื่อ D เป็นบริเวณในจุดภาคที่หนึ่ง

This page is intentionally left blank. หน้านี้ตั้งใจเว้นว่างไว้

บรรณานุกรม

- [1] ทรงเกียรติ สุเมธกิจกร (2556). แคลคูลัส: ผลบวกอนันต์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [2] สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [3] สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [4] อติชาติ เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [5] Amazigo, J. C., & Rubinfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.
- [6] Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.
- [7] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis. 4th edition, NJ: Wiley.
- [8] Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.
- [9] Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley
- [10] Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
- [11] Shifrin, T. (2005). Multivariable mathematics: linear algebra, multivariable calculus, and manifolds. John Wiley & Sons Inc.
- [12] Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
- [13] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.
- [14] Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
- [15] Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.
- [16] Culham, J. R. Elliptic Integrals, Elliptic Functions and Theta Functions. Retrieved from http://www.mhlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap3.pdf
- [17] Conrad, K. (2018). Differentiating under the integral sign. Retrieved from <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf>
- [18] Hall, L. M. (1995). Special Functions: Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Retrieved from <http://web.mst.edu/~lmhall/SPFNS/sfch3.pdf>
- [19] Wheeler, J. P. . Assigning Value to the Valueless... The Cauchy Principle Method and Related Ideas in Divergent Series. Retrieved from <http://www.pitt.edu/~jwheeler/Principal%20Values.pdf>

ภาพปก

Tokyo Gate Bridge ถ่ายโดยผู้เขียนในวันที่ 24 มกราคม พ.ศ.2559

ขณะที่ผู้เขียนกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกที่ประเทศญี่ปุ่น

ในวันที่อากาศหนาวที่สุดในรอบ 40 ปี

Tokyo Gate Bridge เป็นสะพานที่เชื่อมระหว่างเกาะในย่านโอไดบะ ซึ่งเป็นย่านที่ผู้เขียนชอบมากที่สุดในโตเกียว ผู้เขียนเลือกภาพนี้เป็นภาพปก เนื่องจากกระบวนวิชาแคลคูลัสชั้นสูง เปรียบเสมือนสะพานและประตูเชื่อมระหว่างการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับพื้นฐานและคณิตศาสตร์ขั้นสูง

