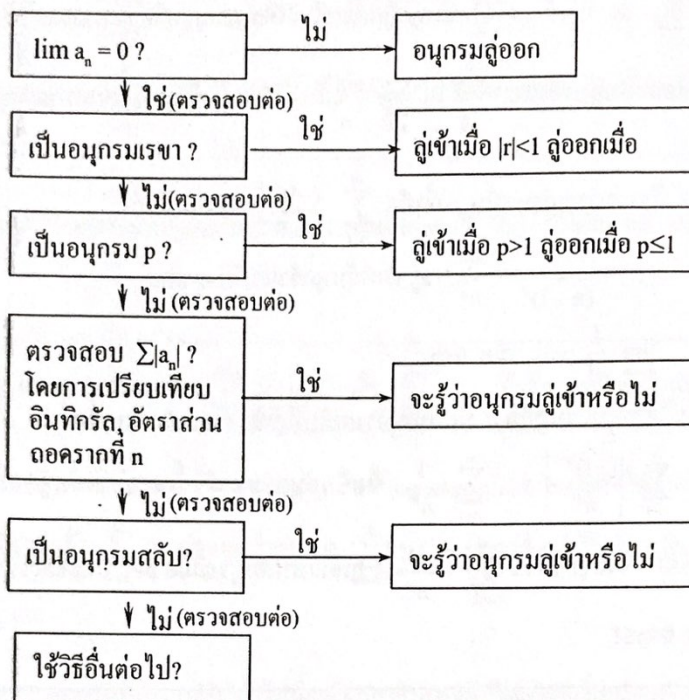


ผังงานต่อไปนี้เป็นแสดงลำดับการตรวจสอบอนุกรมว่าลู่เข้าหรือลู่ออก



แบบฝึกหัด 4.1(ค)

ในข้อ 1-10 จงแสดงว่าอนุกรมสลับที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1+1/n)$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$

ในข้อ 11-44 จงตรวจสอบว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0.1)^n$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n^3}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (2/3)^n$$

$$26. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\ln n)}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$$

$$32. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2} \right)^n$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.1)^n}{n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3 + 1}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt[n]{10}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n!)^2}{(2n)!}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sech} n$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{1+n^2}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 2n + 1}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2)^n n! n}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{csch} n$$

ในข้อ 45-48 จงหาค่าประมาณของอนุกรมลำดับ 4 พจน์แรก

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$$

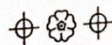
$$47. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.01)^n}{n}$$

$$48. \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

ในข้อ 49-50 จงหาค่าประมาณของอนุกรมที่กำหนดโดยให้มีค่าผิดพลาดน้อยกว่า 5×10^{-6}

$$49. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$$

$$50. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$



เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด 4.1(ก)

1. ลู่เข้า, 3. ลู่ออก, 5. ลู่เข้า, 7. ลู่ออก, 9. ลู่เข้า
11. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, อนุกรมที่ได้ค่าสัมบูรณ์เป็นเรขาคณิตที่ลู่เข้า
13. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข, $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ลู่ออก 15. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n^2}$
17. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข, $\sum \frac{1}{n+3}$ เปรียบเทียบกับ $\sum \frac{1}{n}$ 19. ลู่ออก $\frac{3+n}{5+n} \rightarrow 1$
21. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข, $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \rightarrow 0$ แต่ $\frac{1+n}{n^2} > \frac{1}{n}$ 23. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, อัตราส่วน
25. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, อินทิกรัล 27. ลู่ออก $a_n \rightarrow 0$
29. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, อัตราส่วน 31. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, $\frac{1}{n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{n^2}$
33. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, $\left| \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n^{3/2}}$ อนุกรม p 35. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, รากที่ n
37. ลู่ออก $a_n \rightarrow \infty$ 39. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข, $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \rightarrow 0$
41. ลู่ออก $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ 43. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์, $\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n} + 1} < \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}$
45. |ผิดพลาด| < 0.2 47. |ผิดพลาด| < 2×10^{-11} 49. 0.54030



สรุปขั้นตอนการหาช่วงการลู่เข้า

1. ใช้การทดสอบแบบอัตราส่วน หรือ การทดสอบรากที่ n ในการหาช่วงการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ซึ่งจะได้อะไร $|x-a| < R$ หรือ $a-R < x < a+R$
2. ถ้าช่วงการลู่เข้าเป็นช่วงจำกัด ต้องตรวจสอบจุดปลายว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ดังตัวอย่าง 4.37 ก. และ ข. โดยใช้การทดสอบแบบเปรียบเทียบ, การทดสอบแบบอินทิกรัล, หรือการทดสอบอนุกรมสลับ



แบบฝึกหัด 4.2

ในข้อ 1-32 (a) จงหารัศมี ของช่วงการลู่เข้าของอนุกรม (b) จงหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-5)^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n} 3^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} (2x+5)^n$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
24. $\sum_{n=0}^{\infty} n! (x-4)^n$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x+2)^n}{n 2^n}$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1) (x-1)^n$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{n^{1/2}}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$$



เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด 4.2

- | | | | |
|------------------|-------------------------|------------------|------------------------------|
| 1. (a) 1 | (b) $-1 < x < 1$ | 3. (a) $1/4$ | (b) $-1/2 < x < 0$ |
| 5. (a) 10 | (b) $-8 < x < 12$ | 7. (a) 1 | (b) $-1 < x < 1$ |
| 9. (a) 3 | (b) $-3 \leq x \leq 3$ | 11. (a) ∞ | (b) จำนวนจริง |
| 13. (a) ∞ | (b) จำนวนจริง | 15. (a) 1 | (b) $-1 < x < 1$ |
| 17. (a) 5 | (b) $-8 < x < 2$ | 19. (a) 3 | (b) $-3 < x < 3$ |
| 21. (a) 1 | (b) $-1 < x < 1$ | 23. (a) 0 | (b) 0 |
| 25. (a) 2 | (b) $-4 < x < 0$ | 27. 1 | (b) $-1 \leq x \leq 1$ |
| 29. (a) $1/4$ | (b) $1 \leq x \leq 3/2$ | 31. 1 | (b) $(-1-\pi) < x < (1-\pi)$ |



$$\begin{aligned}
 x \sin x &= x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\
 &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} + \dots
 \end{aligned}$$

#

แบบฝึกหัด 4.3

ในข้อ 1-6 จงหาอนุกรมเทเลอร์ดีกรี 0, 1, 2 และ 3 ที่ก่อกำเนิดจาก f ที่จุด a

1. $f(x) = \ln x$, $a = 1$
2. $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $a = 0$
4. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/4$
5. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/4$
6. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$

ในข้อ 7-14 จงหาอนุกรมแมคคลอรินที่ก่อกำเนิดจาก f

7. e^x
8. $\frac{1}{1+x}$
9. $\sin 3x$
10. $7 \cos(-x)$
11. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
12. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
13. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
14. $(x+1)^2$

ในข้อ 15-20 จงหาอนุกรมเทเลอร์ที่ก่อกำเนิดจาก f ที่จุด a

15. $f(x) = x^3 - 2x + 4$, $a = 2$
16. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$, $a = -1$
17. $f(x) = 1/x^2$, $a = 1$
18. $f(x) = x/(1-x)$, $a = 0$
19. $f(x) = e^x$, $a = 2$
20. $f(x) = 2^x$, $a = 1$



เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด 4.3

1. $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = x-1$, $P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$, $P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$
3. $P_0(x) = \frac{1}{2}$, $P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$, $P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$, $P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$
5. $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})$, $P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2$,
 $P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
13. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
15. $8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$

