

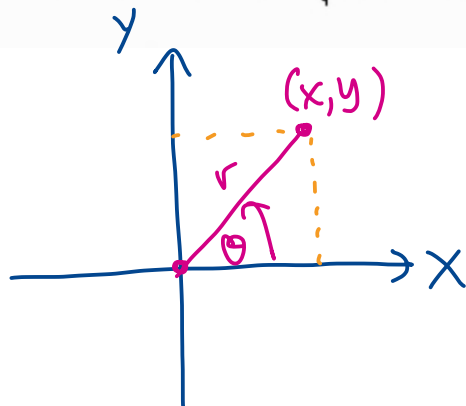
Final

- ① ระบบพิกัดเชิงขั้ว } double integral $\iint_R f(r, \theta) \cdot r dr d\theta$
② integral สองตัวในระบบพิกัดเชิงขั้ว
-

- ③ integral สามตัว $\rightarrow$ ระบบพิกัดฉาก $\iiint_E f(x, y, z) dV$
 $\rightarrow$ ระบบพิกัดทรงกระบอก $\iiint_E f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$
 $\rightarrow$ ระบบพิกัดทรงกลม $\iiint_E f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$
-

- ④ อนุกรมอนันต์ $\rightarrow$ อนุกรม
 $\rightarrow$ อนุกรมทางเรขาคณิต $\Rightarrow$ อนุกรมเรขาคณิต
 $\Rightarrow$ อนุกรม p
 $\Rightarrow$ อนุกรม telescopic
 $\rightarrow$ การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม. $\Rightarrow$ อนุกรมพีชคณิต / อนุกรมพหุนาม
 $\Rightarrow$ อนุกรมกำลัง
 - ทดสอบโดยอนุกรม
 - ratio test for abs. conv. $\rightarrow$ การทดสอบการลู่เข้าด้วยอนุกรม / การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
 $\rightarrow$ อนุกรมกำลัง
 $\hookrightarrow$ Taylor's series, Maclaurin's series

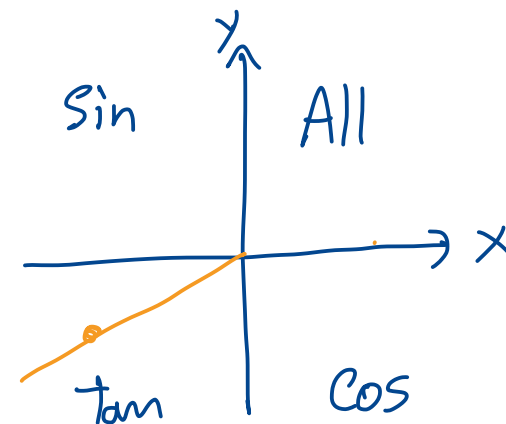
ข้อ 1 จงหาพิกัดฉากของจุดที่มีพิกัดเชิงขั้วเป็น $(2, \frac{7\pi}{6})$



$$(r, \theta)$$
$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}}$$

$$x = 2 \cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2$$
$$y = 2 \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 2$$



$$\Downarrow$$
$$\underline{(-\sqrt{3}, -1)}$$

ข้อ 2 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดที่มีพิกัดฉากเป็น $(0, -3)$ โดยที่

2.1 $r \geq 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

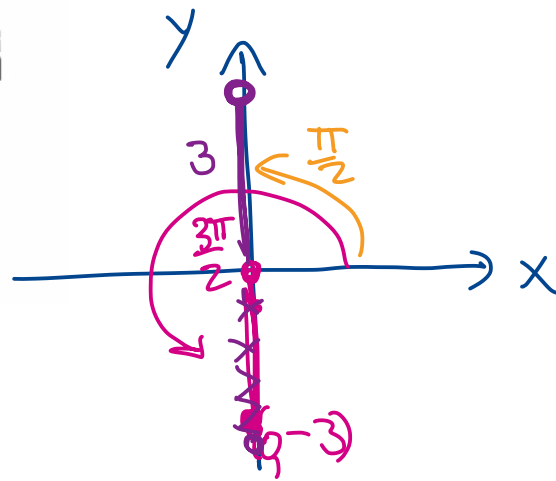
2.2 $r \leq 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore r = \sqrt{0 + (-3)^2} = 3$$

$$(2.1) \quad \left(3, \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$(2.2) \quad \left(-3, \frac{\pi}{2} \right)$$



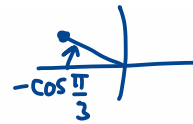
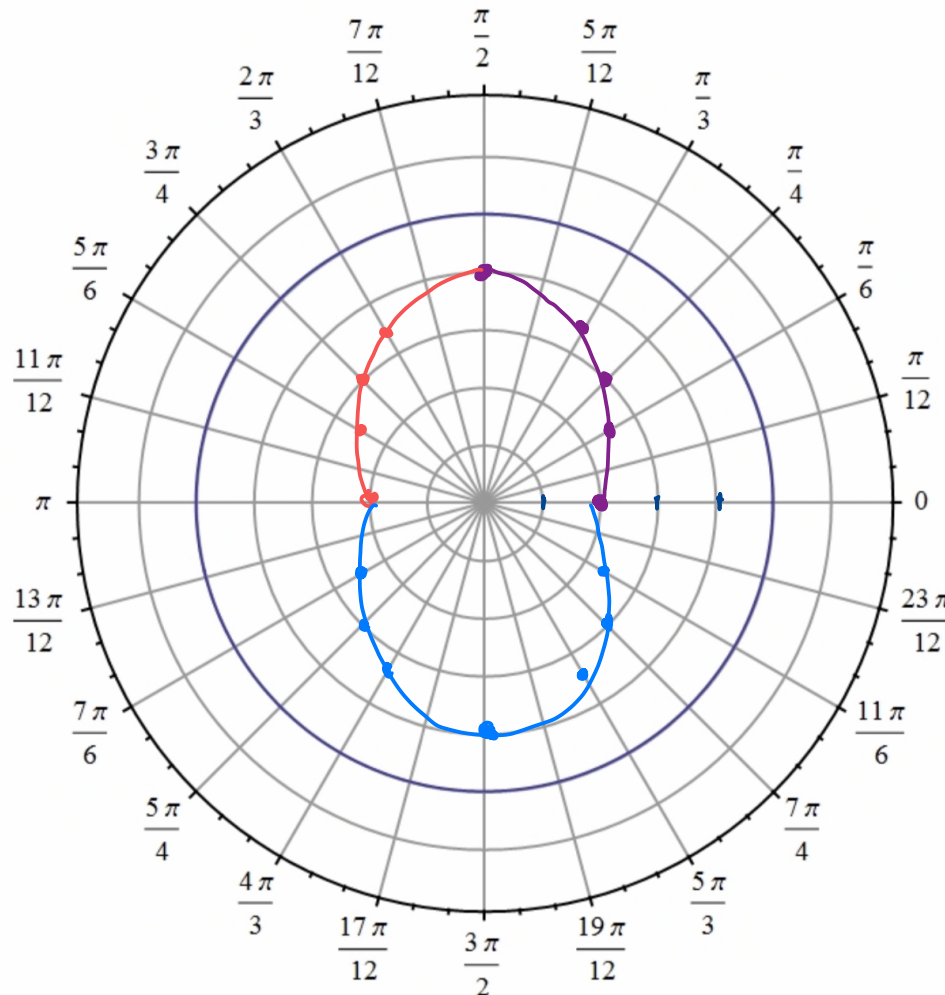
ข้อ 3 กำหนดให้ $r = 3 - \cos(2\theta)$

3.1 จงตรวจสอบว่ากราฟของสมการที่กำหนดให้สมมาตรเทียบกับแกน X และแกน Y หรือไม่

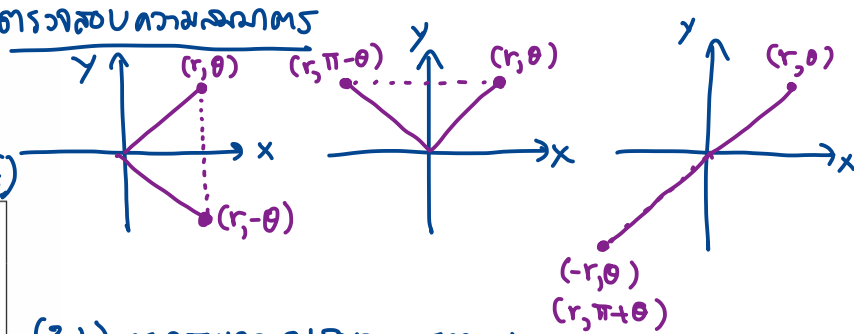
3.2 จงเติมค่าของ r ในช่องว่าง

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4

3.3 จงวาดกราฟของสมการ $r = 3 - \cos(2\theta)$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$



ตรวจสอบความสมมาตร



(3.1) ตรวจสอบความสมมาตรของแกน X

Check แทน θ ด้วย $-\theta$ แล้วได้สมการเดิม

พิจารณา $r = 3 - \cos(2\theta)$

แทน θ ด้วย $-\theta$; $r = 3 - \cos(2(-\theta))$

$= 3 - \cos(-2\theta)$ $\cos(-A) = \cos A$

$= 3 - \cos 2\theta$ ได้สมการเดิม

$\therefore r = 3 - \cos 2\theta$ สมมาตรแกน X

ตรวจสอบความสมมาตรแกน Y

Check แทน θ ด้วย $\pi - \theta$ แล้วได้สมการเดิม

ได้ว่า $r = 3 - \cos(2(\pi - \theta))$

$= 3 - \cos(2\pi - 2\theta)$

$= 3 - [\cos 2\pi \cos 2\theta + \sin 2\pi \sin 2\theta]$

$= 3 - \cos 2\theta$ ได้สมการเดิม

$\therefore r = 3 - \cos 2\theta$ สมมาตรแกน Y

$$\begin{aligned} \cos(A - B) &= \cos A \cos B \\ &+ \sin A \sin B \end{aligned}$$

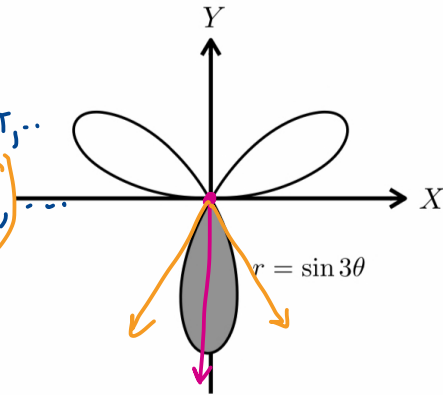
ข้อ 4 จงเขียนพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว (โดยไม่ต้องคำนวณค่าอินทิกรัล)

4.1

CHECK $\sin 3\theta = 0$

เมื่อ $3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \dots$

$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$



$$\text{พื้นที่ } A = \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \int_0^{\sin 3\theta} r \, dr \, d\theta$$

4.2

$$x = r \cos \theta$$

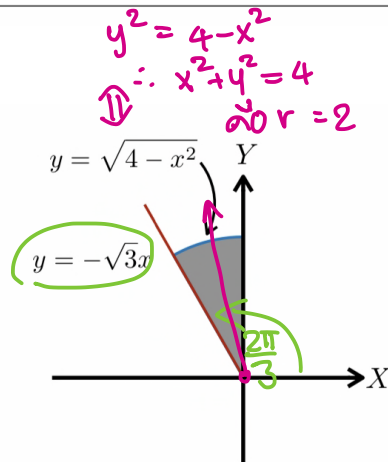
$$y = r \sin \theta$$

$$\therefore x \sin \theta = -\sqrt{3} \cdot y \cos \theta$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$

ดังนั้น $\tan \theta = \sqrt{3}$

ถ้า $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



$$\text{พื้นที่ } A = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \int_0^2 r \, dr \, d\theta$$

$$\iint_R f(x, y) \, dA \quad \text{หาพ.ท.}$$

$$\text{set } f(x, y) = 1$$

$$\text{ใช้ว่า } \iint_R f(r, \theta) r \, dr \, d\theta \rightarrow \text{set } f(r, \theta) = 1$$

ข้อ 5 จงหาค่าของ

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 e^{x^2+y^2} dy dx$$

โดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$x^2 + y^2 = r^2$$

พิจารณา $e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$y^2 = 1-x^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1 ; y < 0$$

$$\therefore \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 e^{x^2+y^2} dy dx = \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta$$

หรือ $\int e^{r^2} \cdot r dr$

ให้ $u = r^2 ; du = 2r dr$

$$\therefore \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{r^2} + C$$

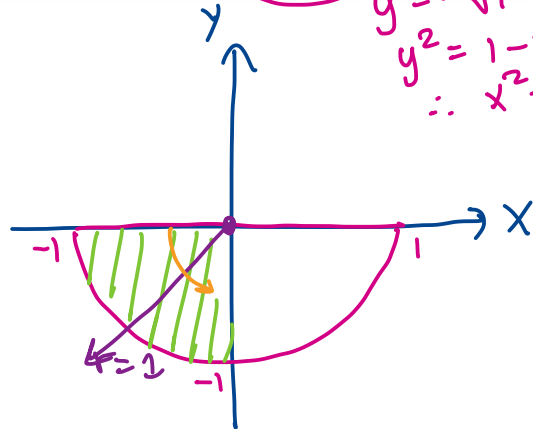
$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi/2} (e^{r^2}) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi/2} [e^1 - e^0] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} [e - 1] \theta \Big|_{\theta=\pi}^{\theta=3\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} (e-1) \left[\frac{3\pi}{2} - \pi \right]$$

$$= \frac{1}{2} (e-1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} (e-1) \quad \#$$

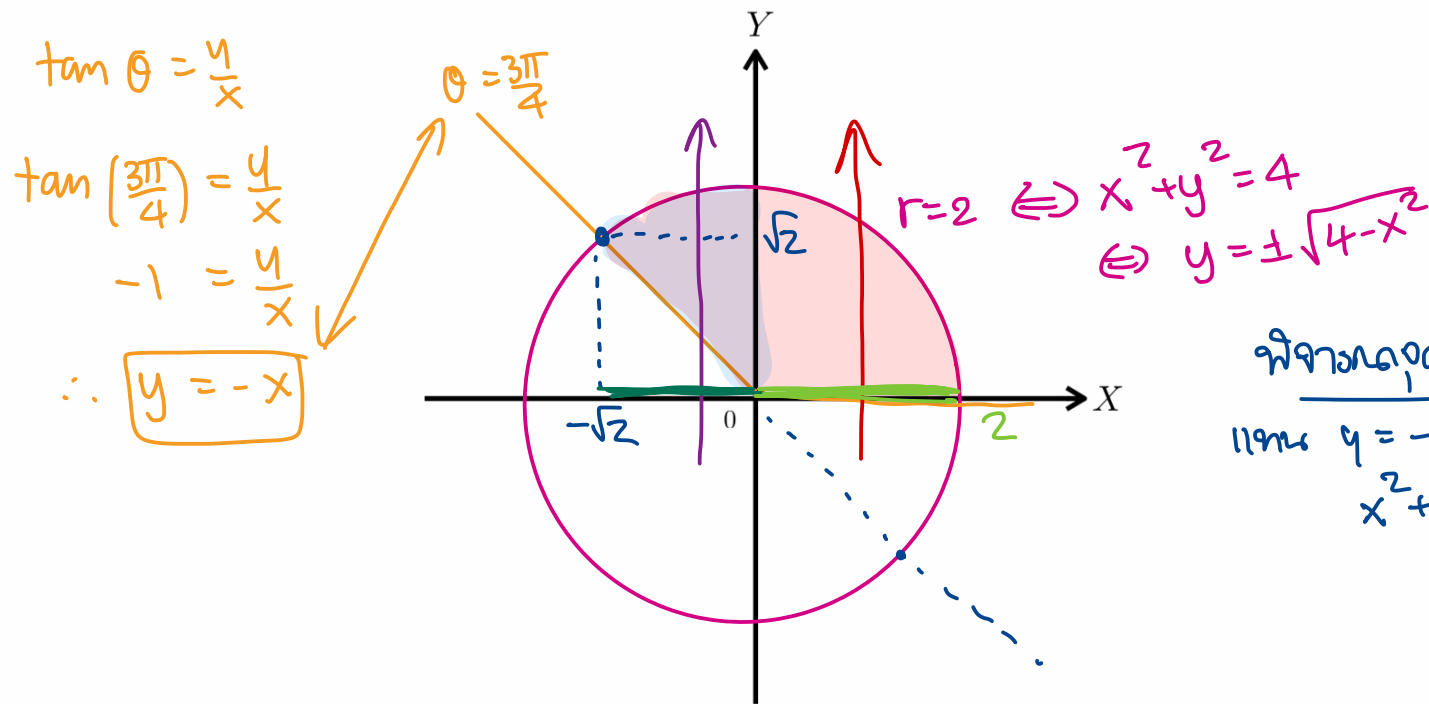


ข้อ 6 กำหนดอินทิกรัล $I = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 r^2 \sin \theta dr d\theta$

แปลง
 $r^2 \sin \theta = r \cdot \underbrace{r \sin \theta}_y$
 $= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot y$

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

4.1 จงวาดรูปของบริเวณ R



พิจารณาจุดตัด
 $\text{แทน } y = -x \text{ ใน } x^2 + y^2 = 4$
 $x^2 + (-x)^2 = 4$
 $2x^2 = 4$
 $x^2 = 2$
 $x = \pm \sqrt{2}$

4.2 จงเขียนอินทิกรัล I ในรูปอินทิกรัลในระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่าอินทิกรัล)

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} y \sqrt{x^2 + y^2} dy dx + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

ข้อ 7 จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/3} \int_0^1 \int_0^{x^2} (x \cos z) dy dx dz$

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^1 \int_0^{x^2} (x \cos z) dy dx dz = \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (x \cos z) y \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx dz$$

$$= \int_0^{\pi/3} \int_0^1 x \cos z [x^2] dx dz$$

$$= \int_0^{\pi/3} \int_0^1 x^3 \cos z dx dz$$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{x^4}{4} \cos z \Big|_{x=0}^{x=1} dz$$

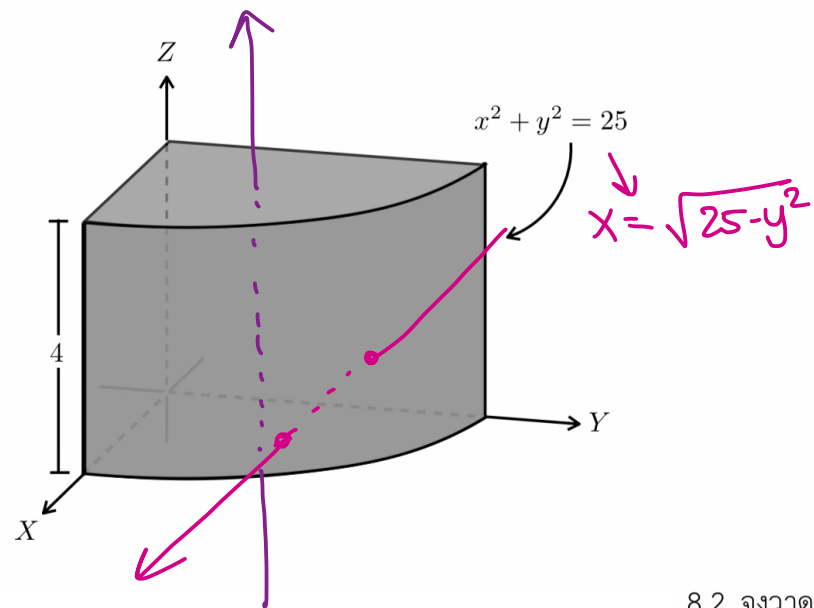
$$= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4} \cos z dz$$

$$= \left[\frac{1}{4} \sin z \right]_{z=0}^{z=\pi/3}$$

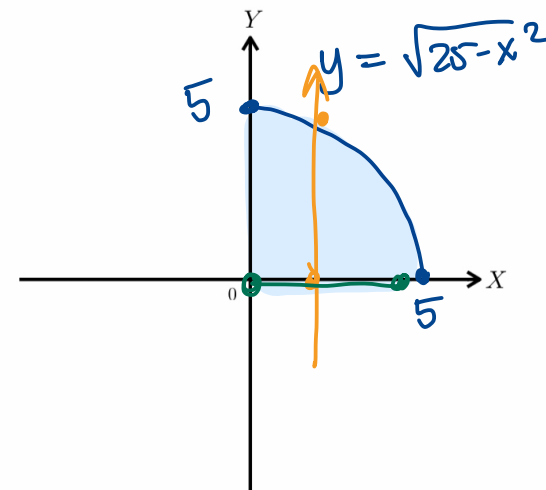
$$= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \sin 0$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \#$$

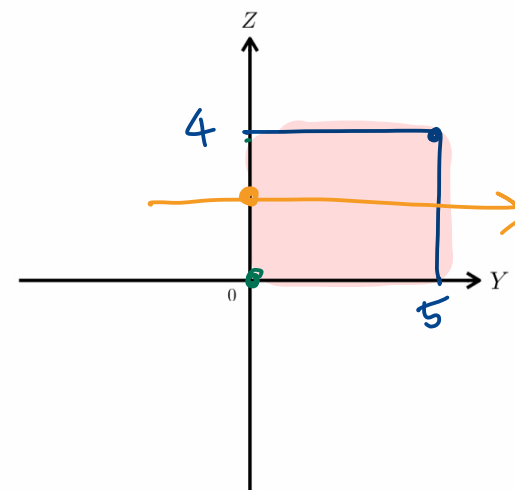
ข้อ 8 กำหนดทรงตัน G ดังรูป



8.1 จงวาดรูปฉาย (Projection) ของทรงตัน G บนระนาบ XY



8.2 จงวาดรูปฉาย (Projection) ของทรงตัน G บนระนาบ YZ



set $f(x,y,z) = 1$

8.3 จงเขียนปริมาตร (V) ของทรงตัน G ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก โดยมีลำดับการอินทิเกรต $dz dy dx$ (โดยไม่ต้องคำนวณค่าอินทิกรัล)

$$V = \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^4 dz dy dx$$

8.4 จงเขียนปริมาตร (V) ของทรงตัน G ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก โดยมีลำดับการอินทิเกรต $dx dy dz$ (โดยไม่ต้องคำนวณค่าอินทิกรัล)

$$V = \int_0^4 \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} dx dy dz$$

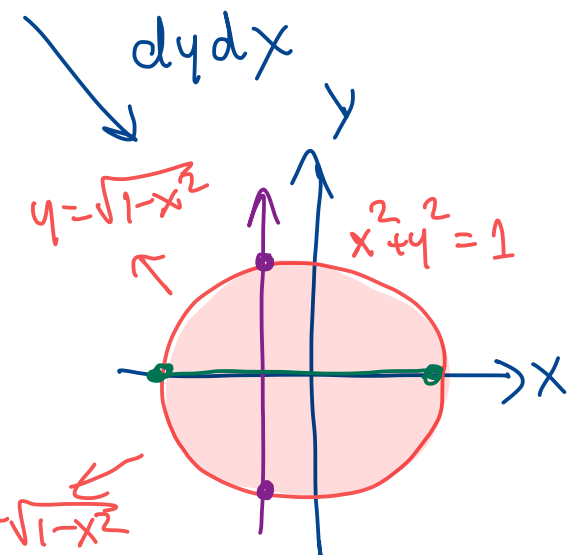
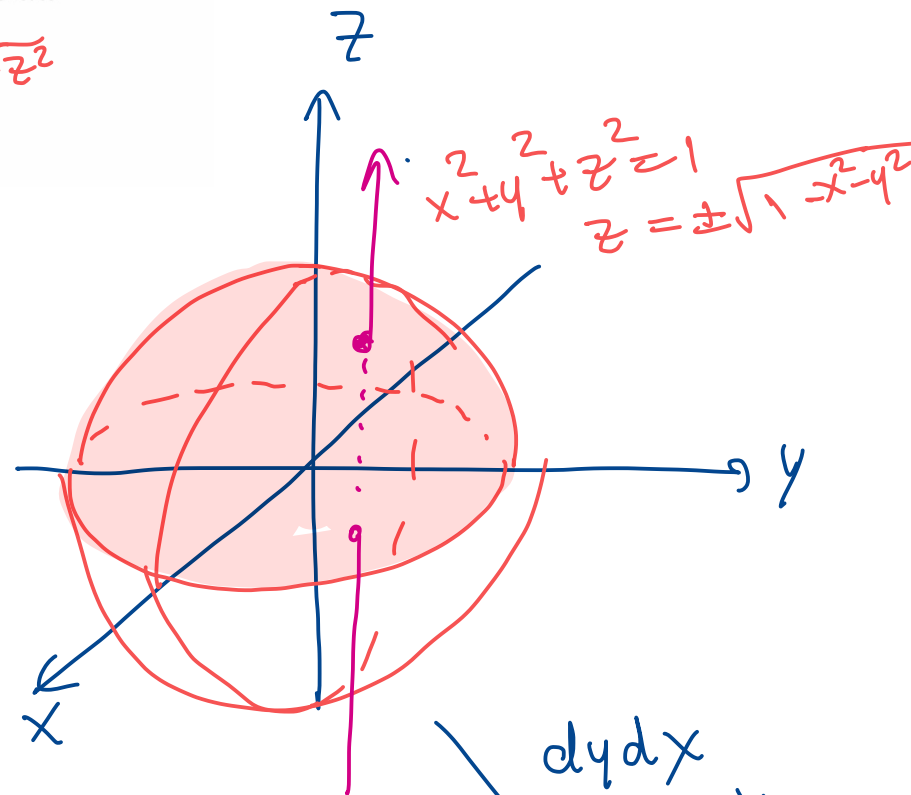
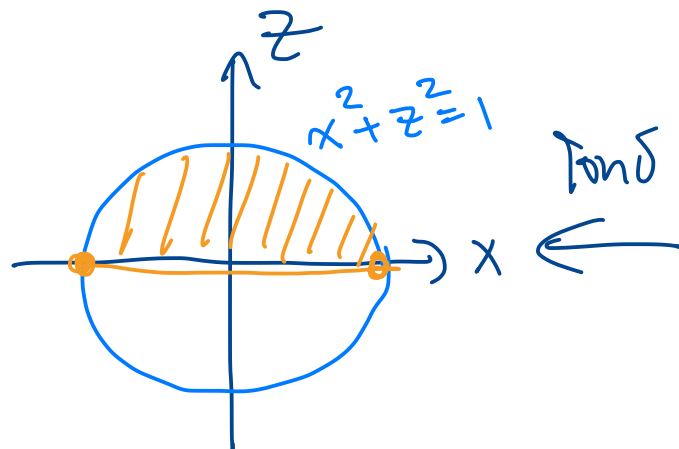
ข้อ 9 จงแปลงอินทิกรัล

$$x=1 \quad z=\sqrt{1-x^2} \quad y=\sqrt{1-x^2-z^2} \Leftrightarrow y^2=1-x^2-z^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

$$(x+y^2z) dy dz dx$$

$$x=-1 \quad z=0 \quad y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$$

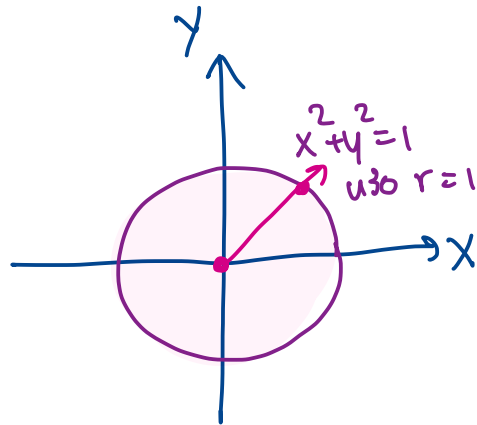
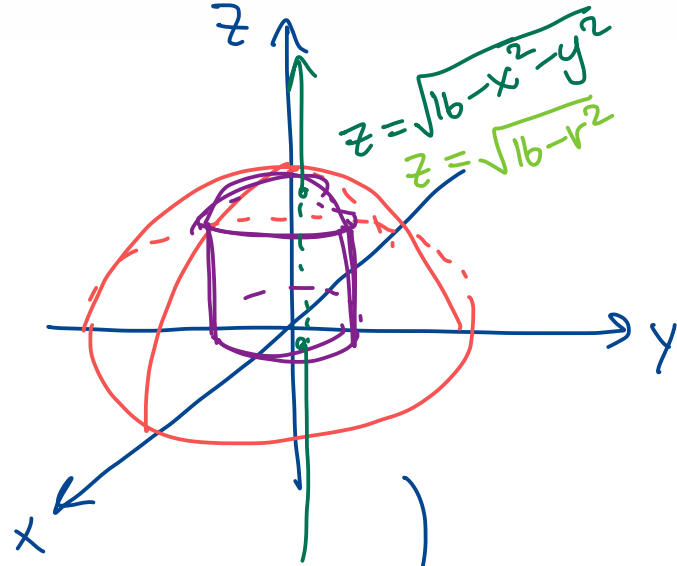
ให้มีลำดับของการอินทิเกรตเป็น $dz dy dx$ (โดยไม่ต้องคำนวณค่าอินทิกรัล)



ลำดับใหม่ :

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x+y^2z) dz dy dx$$

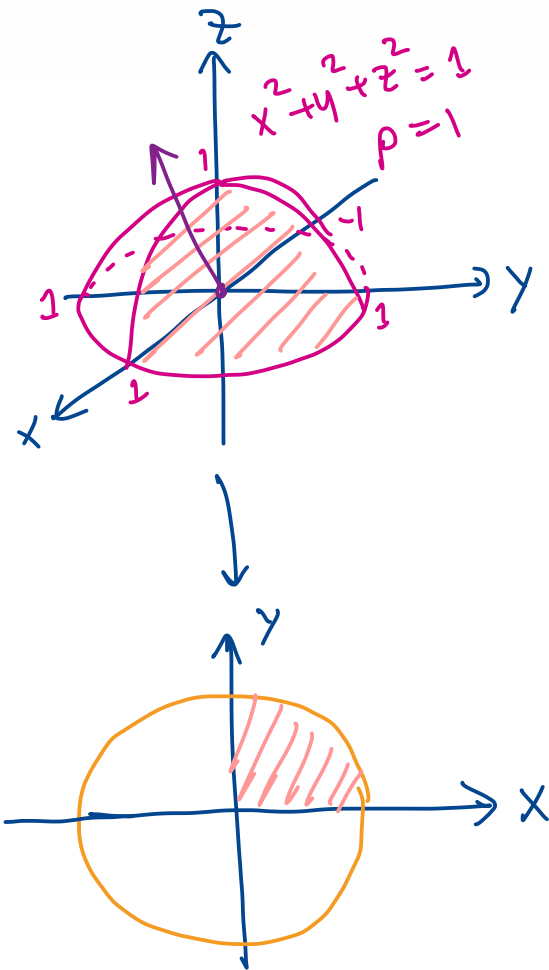
ข้อ 10 จงหาค่าของ $\iiint_G z \, dV$ โดยใช้อินทิกรัลในพิกัดทรงกระบอก เมื่อ G คือทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้วย $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$ และ $x^2 + y^2 = 1$; $z \geq 0$



$$\begin{aligned}
 \iiint_G z \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} z \cdot r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left. \frac{z^2}{2} r \right|_{z=0}^{z=\sqrt{16-r^2}} dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(16-r^2)}{2} r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{16r - r^3}{2} dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{16r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{31}{8} \cdot 2\pi = \frac{31}{4} \pi \quad \#
 \end{aligned}$$

ข้อ 11 จงใช้พิกัดทรงกลม คำนวณค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

พักก่อน ลจ 17,25 ๕.
😊



$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} [-\cos \phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} [-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0] d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Infinite Series

$$\left(\frac{a}{1-r}\right)$$

- geometric series $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$; $|r| < 1$

- telescopic $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

- p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; $p > 1$

- series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Conv. series

- geometric series $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$; $|r| \geq 1$

- series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

- p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; $p \leq 1$

$\Downarrow$
($p=1$: Harmonic series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

div. series

ข้อ 12 จงให้เหตุผลพอสังเขป เพื่อสรุปว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ลู่ออก หรือสรุปไม่ได้

$$12.1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n}$$

ลู่ออก / ลู่ออก / สรุปไม่ได้

เนื่องจาก เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{1}{2} < 1$

$$12.2 \text{ อนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ซึ่ง } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

ลู่ออก / ลู่ออก / สรุปไม่ได้

เนื่องจาก จากนิยามว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ สู่ค่า 1/4 ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.

$$12.1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{4^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ข้อ 13 จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

พิจารณา $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$: ให้สมมติ A, B

$$1 = A(2n+1) + B(2n-1)$$

Set $n = -\frac{1}{2}$: $1 = A(2(-\frac{1}{2})+1) + B(2(-\frac{1}{2})-1)$

$$1 = -2B \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$n = \frac{1}{2}$: $1 = A(2(\frac{1}{2})+1) + B(2(\frac{1}{2})-1)$

$$1 = 2A \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^k \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \right]$$

$$S_k = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2k+1} \right]$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2}$$

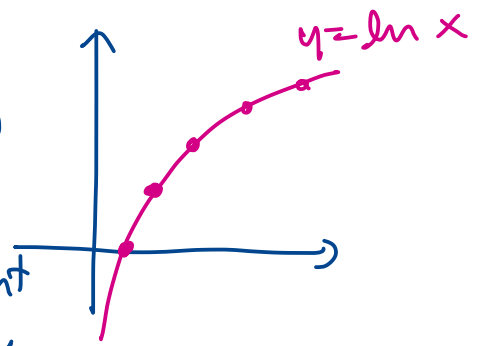
#

ข้อ 14 จงแสดงว่าอนุกรมที่กำหนดให้ ลู่เข้าหรือลู่ออก โดยเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมในการทดสอบ

14.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

14.1 Check $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ลู่ออก โดย divergent test,



14.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

14.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

14.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}$

check ① $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ เปรียบเทียบลู่เข้าบน $[2, \infty)$

14.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2020(n+1)]^n}{n^n}$

$f(x) = (x \ln x)^{-1}$
 $f'(x) = -1 (x \ln x)^{-2} \frac{d}{dx} (x \ln x)$

$= - \frac{1}{(x \ln x)^2} \left[\frac{x}{x} + \ln x \right]$

$= - \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$ > 0 $\ln x > 0 \quad \forall x \in [2, \infty)$
 < 0 เปรียบเทียบลู่เข้าบน $[2, \infty)$

② $a_n = f(n)$

ใช้ integral test

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx$

$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |\ln x|]_{x=2}^{x=b}$

$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |\ln b| - \ln |\ln 2|]$

$= +\infty$ diverges $\therefore$ integral test #

[note] $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
 $u = \ln x ; du = \frac{1}{x} dx$
 $= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$
 $= \ln |\ln x| + C$

$$14.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} \quad \text{ratio test}$$

$$\begin{aligned} \text{We have } \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{e^{n+1}} \bigg/ \frac{\ln n}{e^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{e \cdot e^n} \cdot \frac{e^n}{\ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \\ &\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ ratio test works

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} \text{ converges } \#$$

$$14.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2020(n+1)]^n}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{We have } \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[2020(n+1)]^n}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020(n+1)}{n} \\ &= 2020 > 1 \end{aligned}$$

ratio root test works

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2020(n+1)]^n}{n^n} \text{ diverges } \#$$

ข้อ 15 พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

15.1 จงให้เหตุผลเพื่ออธิบายว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

15.2 จงให้เหตุผลเพื่ออธิบายว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

15.3 จงพิจารณาว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

15.3 ใช้ alternating series test

(1) ลำดับ (a_n) เป็นลำดับลดไหม

check $a_n \geq a_{n+1}$?

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \checkmark \text{ เป็นลำดับลด}$$

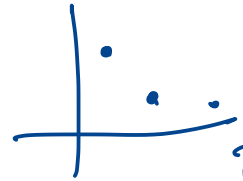
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

โดย alternating series test ได้ว่า

(15.1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรม p ซึ่ง $p = \frac{1}{2} < 1$
 จึงเป็นอนุกรมลู่ออก

(15.2) พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
 ลู่ออกจากข้อ 15.1

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ไม่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์



Claim $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \checkmark$ เป็นลำดับลด

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้า (แบบสลับกัน)
~~XXXX~~

ข้อ 16 จงพิจารณาว่า อนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

ฝึก 2 หน้.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{(3k-2)!}$$

ใช้ ratio test for absolute convergence:

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+2} (2(k+1))!}{(3(k+1)-2)!} \right| / \left| \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{(3k-2)!} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+2} (2k+2)!}{(3k+1)!} \cdot \frac{(3k-2)!}{(-1)^{k+1} (2k)!} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1) (2k+2)(2k+1)(2k)! (3k-2)!}{(3k+1)(3k)(3k-1)(3k-2)! (2k)!} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)(2k+1)}{(3k+1)(3k)(3k-1)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

โดย ratio test for absolute convergence

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{(3k-2)!}$ converges absolutely #

ข้อ 17 จงหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$17.1 \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} (7x)^k$$

$$17.2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! (x-4)^k$$

$$(17.1) \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} (7x)^k$$

- ถ้า $x=0$ อนุกรมจะลู่เข้าที่ 0
ส่วนที่ $x \neq 0$

ใช้ ratio test for absolute convergence

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{k+1} (7x)^{k+1}}{\sqrt{k} (7x)^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} |7x|$$

$$= |7x|$$

conv. ถ้า $|7x| < 1$, $|7x| > 1$

$$-1 < 7x < 1$$

$$\therefore \boxed{-\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7}}$$

$\therefore$ ช่วงของการลู่เข้า คือ $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$

ตรวจสอบที่ขอบ

$$x = -\frac{1}{7} : \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} \left(7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{k} \quad \text{div}$$

$$x = \frac{1}{7} : \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} \left(7 \cdot \frac{1}{7} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} \quad \text{div}$$

$\therefore$ ช่วงของการลู่เข้า คือ $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ ส่วนที่ $\frac{1}{7}$

$$(17.2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! (x-4)^k$$

- ถ้า $x=4$ อนุกรมจะลู่เข้าที่ 0
- ถ้า $x \neq 4$ ใช้ ratio test for absolute conv.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} (k+1)! (x-4)^{k+1}}{(-1)^k k! (x-4)^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1) \cancel{k!} (x-4) \cdot \cancel{(x-4)^k}}{\cancel{k!} (x-4)^k} \right| = +\infty$$

$\therefore$ ช่วงของการลู่เข้า คือ $\{4\}$, ส่วนที่ 0



ข้อ 18 กำหนดให้ $f(x) = e^{-3x}$

นร: ทบทวน $x=a$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

18.1 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับ f รอบจุด $x = -1$ โดยเขียนกระจายสี่พจน์แรกที่ไม่เป็นศูนย์

18.2 จงหาอนุกรมแมคคลอรินสำหรับ f ในรูปสัญลักษณ์ Σ

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-3x} \\ f'(x) &= -3e^{-3x} \\ f''(x) &= 9e^{-3x} \\ f'''(x) &= -27e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(-1) &= e^3 \\ f'(-1) &= -3e^3 \\ f''(-1) &= 9e^3 \\ f'''(-1) &= -27e^3 \end{aligned} \right.$$

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$
 $f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots$
 $f(0) = 1 = (-3)^0$
 $f'(0) = -3 = (-3)^1$
 $f''(0) = 9 = (-3)^2$
 $f'''(0) = -27 = (-3)^3$
 $f^{(n)}(0) = (-3)^n$

18.1 รอบ $x = -1$ ได้ $f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \dots$
 $= e^3 - 3e^3(x+1) + \frac{9e^3}{2!}(x+1)^2 - \frac{27e^3}{3!}(x+1)^3 + \dots$

18.2 $f(x) = 1 + (-3)x + \frac{(-3)^2}{2!}x^2 + \frac{(-3)^3}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-3)^n}{n!}x^n + \dots$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \cdot x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!}$

~~#~~

การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

ชื่อการทดสอบ	ข้อความ
Divergence Test	ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} u_k \neq 0$ แล้ว $\sum u_k$ ลู่ออก
Integral Test	ให้ $\sum u_k$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวก ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดและต่อเนื่องบนช่วง $[a, \infty)$ โดยที่ $u_k = f(k)$ สำหรับทุก $k \geq a$ แล้ว $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ และ } \int_a^{\infty} f(x) dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน
Comparison Test	ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ และ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ เป็นอนุกรมที่ไม่เป็นลบซึ่ง $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_k \leq b_k, \dots$ ถ้า $\sum b_k$ ลู่เข้าแล้ว $\sum a_k$ ลู่เข้า และถ้า $\sum a_k$ ลู่ออกแล้ว $\sum b_k$ ลู่ออก
Limit Comparison Test	ให้ $\sum a_k$ และ $\sum b_k$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวก และให้ $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$ ถ้า $0 < \rho < +\infty$ แล้ว อนุกรมทั้งสองจะลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน
Ratio Test	ให้ $\sum u_k$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวก และสมมติให้ $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ แล้ว (i) อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\rho < 1$ (ii) อนุกรมลู่ออกเมื่อ $\rho > 1$ หรือ $\rho = +\infty$ (iii) สรุปไม่ได้ เมื่อ $\rho = 1$
Root Test	ให้ $\sum u_k$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวก และสมมติให้ $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k}$ แล้ว (i) อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\rho < 1$ (ii) อนุกรมลู่ออกเมื่อ $\rho > 1$ หรือ $\rho = +\infty$ (iii) สรุปไม่ได้ เมื่อ $\rho = 1$
Alternating Series Test	ถ้า $a_k > 0$ สำหรับทุก $k = 1, 2, 3, \dots$ แล้ว อนุกรม $\sum (-1)^k a_k$ หรืออนุกรม $\sum (-1)^{k+1} a_k$ จะลู่เข้า ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ (1) $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$
Ratio Test for Absolute Convergence	ให้ $\sum u_k$ เป็นอนุกรมที่ไม่มีพจน์ที่เป็นศูนย์ และสมมติให้ $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ u_{k+1} }{ u_k }$ แล้ว (i) อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เมื่อ $\rho < 1$ (ii) อนุกรมลู่ออก เมื่อ $\rho > 1$ หรือ $\rho = +\infty$ (iii) สรุปไม่ได้ เมื่อ $\rho = 1$