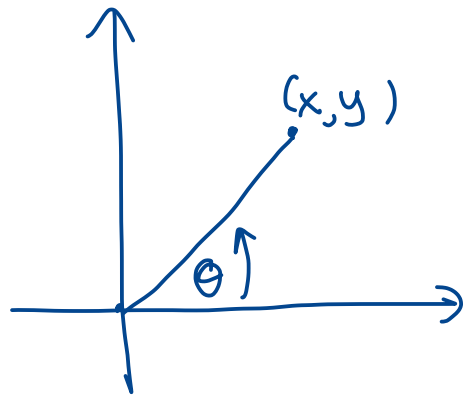


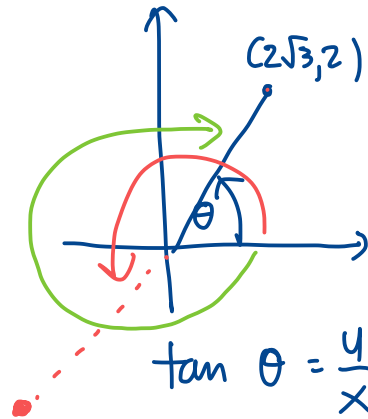
ระบบพิกัดขั้ว 2 มิติ  $\rightarrow$  ระบบพิกัดขั้ว  $\Leftrightarrow$  ระบบพิกัดฉาก



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Ex  $(x, y) = (2\sqrt{3}, 2) \Leftrightarrow (r, \theta)$



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ r &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan \theta$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(2\sqrt{3}, 2) \Leftrightarrow (4, \frac{\pi}{6})$$

|     |     |
|-----|-----|
| Sin | All |
| tam | cos |

Case  $r < 0, \theta \geq 0 = (-4, \frac{7\pi}{6})$

$r > 0, \theta \leq 0 = (2, \frac{11\pi}{6})$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = a^2 &\Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2 \\ &\quad r^2 = a^2 \\ &\quad r = a \end{aligned}$$

↓  
เส้นสัมผัส / เส้นแนว

Ex  $x = 2 \Leftrightarrow r \cos \theta = 2$

$$r = 2 \sec \theta$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \tan \frac{5\pi}{4} = \frac{y}{x}$$

กราฟของ ระบบพิกัดขั้ว

[1] สมการวงกลม

[2] สมการเส้นตรง

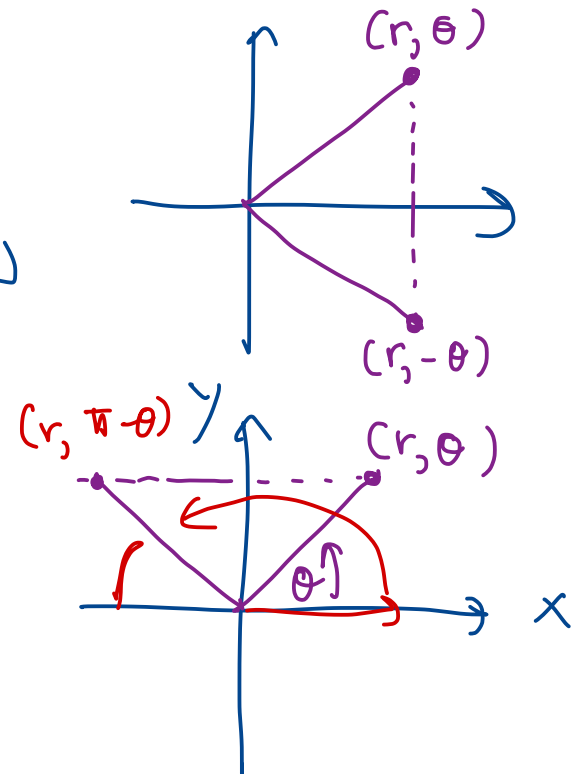
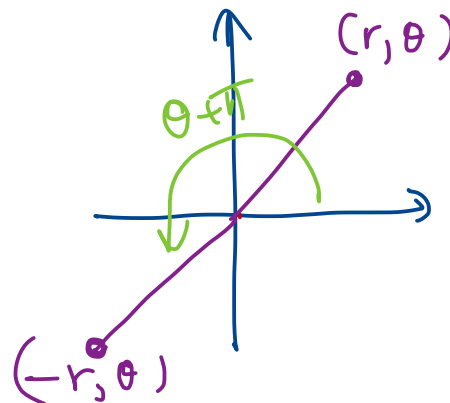
- cardioid  $\Rightarrow r = a - b \cos \theta$  /  $r = a - b \sin \theta$

Limacon  $\rightarrow r = a \pm b \sin \theta$   
 $r = a \pm b \cos \theta$

|               |          |   |   |   |   |   |   |
|---------------|----------|---|---|---|---|---|---|
| $(r, \theta)$ | $\theta$ | - | . | . | . | . | - |
|               | $r$      |   |   |   |   |   |   |

Check ความสมมาตร

- 1) ความสมมาตรตามแกน X : แทน  $\theta$  ด้วย  $-\theta$  แล้วได้สมการเดิม
- 2) ความสมมาตรตามแกน y : แทน  $\theta$  ด้วย  $\pi - \theta$  แล้วได้สมการเดิม
- 3) ความสมมาตรตามจุดกำเนิด : แทน  $r$  ด้วย  $-r$  และ  $\theta$  ด้วย  $\theta + \pi$



## แบบฝึกหัดสำหรับปลายภาค ชุดที่ 2

1. กำหนดฟังก์ชันในรูปเชิงขั้ว  $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

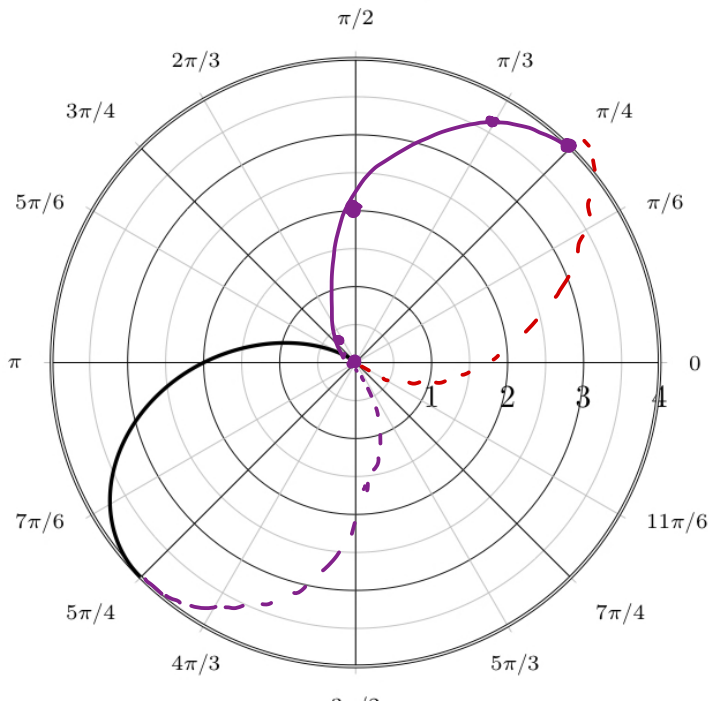
1.1. จงแสดงว่ากราฟของ  $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$  ไม่สมมาตร กับแกน  $y$  โดยแทน  $\theta$  ด้วย  $\pi - \theta$

1.2. จงแสดงว่ากราฟของ  $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$  สมมาตร กับจุดกำเนิดโดยแทน  $\theta$  ด้วย  $\pi + \theta$

1.3. กำหนดข้อมูลในตารางของกราฟ  $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$

| $\theta$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| $r$      | 4               | 3.73            | 2               | 0.27             | 0                |

และกำหนดกราฟในช่วง  $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$  ดังรูป จงวาดกราฟในช่วง  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  โดยใช้ข้อมูลจากตารางที่กำหนดให้ จากนั้นให้ใช้การสมมาตรกับจุดกำเนิดวาดกราฟทั้งหมดของ  $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$  ในช่วง  $[0, 2\pi]$



1.1 แทน  $\theta$  ด้วย  $\pi - \theta$

$$\begin{aligned} \therefore r &= 2 + 2 \sin(2(\pi - \theta)) \\ &= 2 + 2 \sin(2\pi - 2\theta) \\ &= 2 + 2 [\sin 2\pi \cos 2\theta - \cos 2\pi \sin 2\theta] \\ &= 2 - 2 \sin 2\theta \quad \text{ไม่ได้สมการเดิม} \\ \therefore r &= 2 + 2 \sin 2\theta \quad \text{ไม่สมการเดิม} \end{aligned}$$

1.2 แทน  $\theta$  ด้วย  $\pi + \theta$

$$\begin{aligned} r &= 2 + 2 \sin(2(\pi + \theta)) \\ &= 2 + 2 \sin(2\pi + 2\theta) \\ &= 2 + 2 [\sin 2\pi \cos 2\theta + \cos 2\pi \sin 2\theta] \\ &= 2 + 2 \sin 2\theta \quad \text{สมการกับที่กำหนด} \end{aligned}$$

2. จงเขียนจุด  $P(x, y, z) = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$  ในพิกัดฉากให้อยู่ในพิกัดที่กำหนด

2.1. พิกัดทรงกระบอก  $P(r, \theta, z) = \dots (2, \frac{5\pi}{6}, 1)$

2.2. พิกัดทรงกลม  $P(\rho, \phi, \theta) = \dots (2, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

$$(2.1) \quad r^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2$$

$$r^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + 1$$

$$\therefore r^2 = \frac{16}{4} \Leftrightarrow r^2 = 4$$

$$\therefore r = \pm 2 \quad (\text{ใช้ } r \text{ เป็นบวก})$$

$$\therefore r = 2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\right)$$

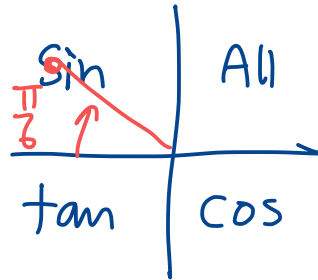
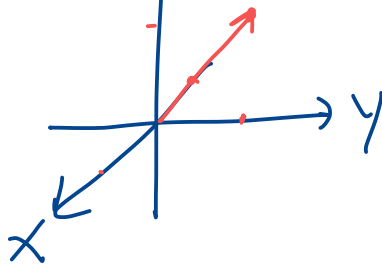
$$(2.2) \quad \rho^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1$$

$$\boxed{\rho = 2}$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$1 = 2 \cos \phi \Leftrightarrow \cos \phi = \frac{1}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

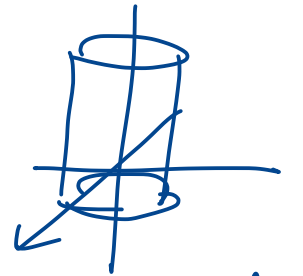


พิกัดทรงกระบอก

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$



Constant surface

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

พิกัดทรงกลม

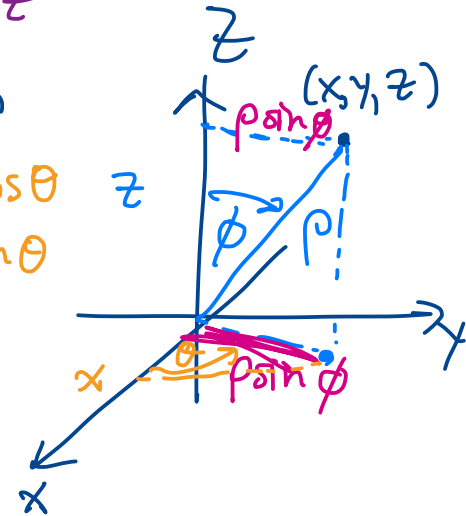
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

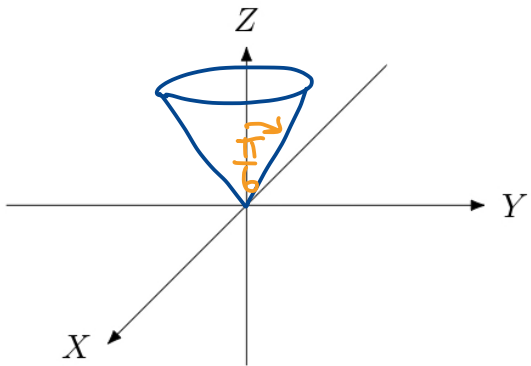
$$\cos \phi = \frac{z}{\rho}$$



3. กำหนดสมการใน 3 มิติ ให้เลือกสมการในข้อ A – H ที่มีรูปเหมือนกันกับสมการในข้อ ก.- ง. มาเติมในช่องว่างที่เว้นไว้ และวาดกราฟของข้อ ก. และ ข.

|                             | เลือก A – H |
|-----------------------------|-------------|
| ก. $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ | <u>A</u>    |
| ข. $x = \sqrt{3}y$          | <u>C</u>    |
| ค. $\rho = 2$               | <u>E</u>    |
| ง. $x^2 + y^2 = 4$          | <u>H</u>    |

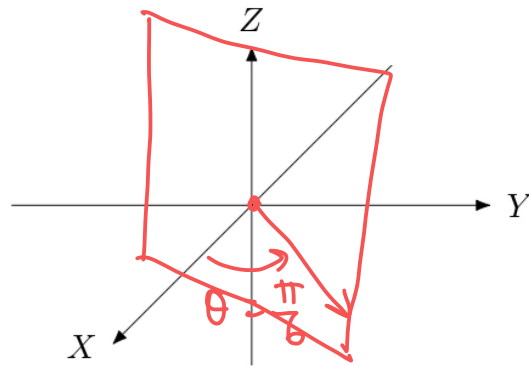
กราฟของข้อ ก.



ข.  $x = \sqrt{3}y$   
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$   
 $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \theta$   
 $\theta = \frac{\pi}{6}$

ค.  $\rho = 2$   
 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = 4$   
 $x^2 + y^2 = r^2$   
 $\therefore r^2 + z^2 = 4$

กราฟของข้อ ข.



- A.  $\phi = \pi/6$   
 B.  $\phi = \pi/3$   
C.  $\theta = \pi/6$   
 D.  $\theta = \pi/3$   
E.  $r^2 + z^2 = 4$   
 F.  $r^2 + z^2 = 2$   
 G.  $\rho \sin \phi = 4$   
H.  $\rho^2 \sin^2 \phi = 4$

## Quadratic Surfaces

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  hyperbolic paraboloid  
 $z = x^2 + y^2$  paraboloid  
 $z^2 = x^2 + y^2$  cone  
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ellipsoid  
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  hyperboloid 1 sheet  
 $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  hyperboloid 2 sheet

ก.  $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} ; z \geq 0$   
 $z^2 = 3x^2 + 3y^2$

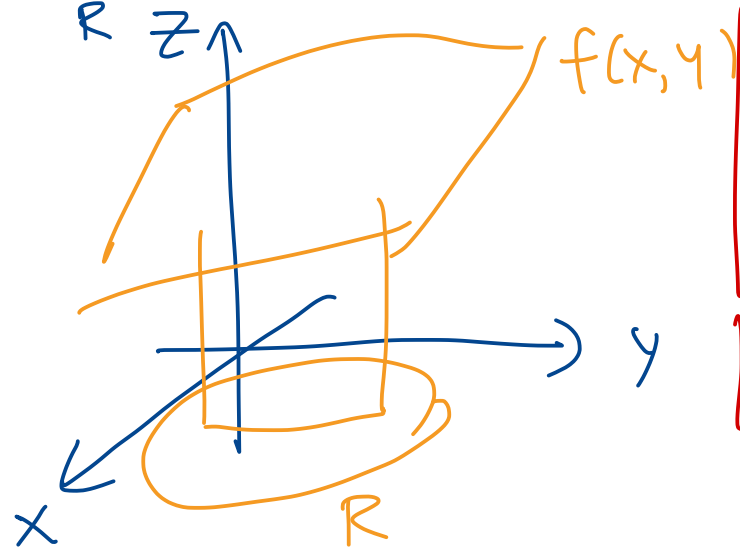
$x = \rho \sin \phi \cos \theta$   
 $y = \rho \sin \phi \sin \theta$   
 $z = \rho \cos \phi$

ข.  $x^2 + y^2 = 4$   
 $\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = 4$   
 $\rho^2 \sin^2 \phi = 4$

$\rho \cos \phi = \sqrt{3} [(\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2]$   
 $\rho \cos \phi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sin \phi)^2} \Leftrightarrow \rho \cos \phi = \sqrt{3} \cdot \rho \sin \phi$   
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \phi \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$

# CHAPTER 5 Multiple integral

$\iint_R f(x,y) dA$ 
 $\begin{cases} \rightarrow R : \text{บริเวณ 2D} \quad \square \quad \text{Fubini's Thm.} \\ \rightarrow R : \text{เส้นบริเวณ 1D} \quad \rightarrow \text{วาด บริเวณที่จะอินทิเกรต}$



(พ.ท.)  $R$  Set  $f(x,y) = 1$

$\rightarrow R$  เส้นระนาบจำกัด  $n$

$\rightarrow R$  เส้นระนาบจำกัดเชิงวง  $\iint_R f(r,\theta) \cdot r dr d\theta$

$\iiint_E f(x,y,z) dV$ 
 $\begin{cases} \rightarrow E : \text{บริเวณ 3D} \quad \text{Fubini's Thm} \\ \rightarrow E : \text{บริเวณ 2D} \quad \rightarrow \text{ลึกลับบริเวณ 3D}$

$\rightarrow r$ : เส้นจำกัดทรงกระบอก  $\iiint_E f(r,\theta,z) r dz dr d\theta$   
 $\rightarrow r$ : เส้นจำกัดทรงกลม  $\iiint_E f(\rho,\phi,\theta) \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

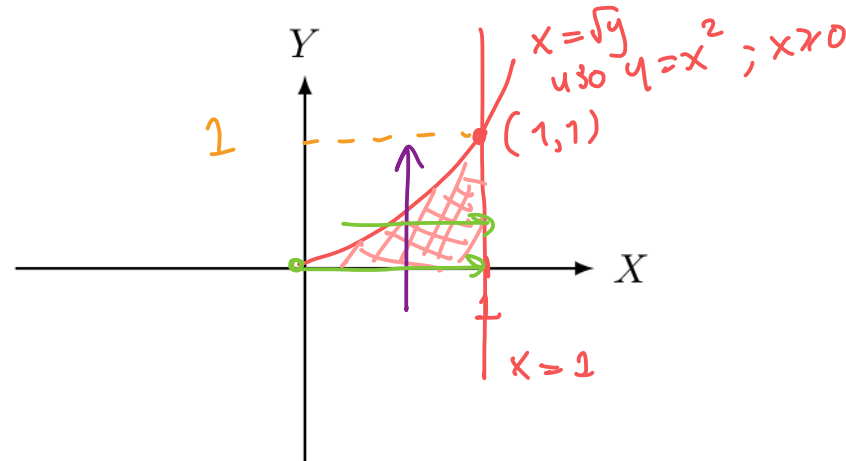
บริเวณ  $E$   $f(x,y,z) = 1$

4. กำหนดอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

$$H = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 y \cos\left(\frac{\pi x^5}{2}\right) dx dy$$

$y=1$   
 $x=1$   
 $y=0$   
 $x=\sqrt{y} \Leftrightarrow x^2=y ; x \geq 0$

4.1. จงวาดรูปและแรเงาบริเวณ  $R$  ที่สอดคล้องกับ  $H$  (ระบุจุดตัดให้ชัดเจน)



4.2. จงหาค่าของ  $H = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 y \cos\left(\frac{\pi x^5}{2}\right) dx dy$

สลับลำดับการอินทิเกรต

$$H = \int_0^1 \int_0^{x^2} y \cos\left(\frac{\pi}{2} x^5\right) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left. \frac{y^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^5\right) \right|_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^5\right) dx = \frac{1}{5\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x^5\right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{5\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \right] = \frac{1}{5\pi}$$

ทด  $\int \frac{x^4}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^5\right) dx$

ให้  $u = \frac{\pi}{2} x^5 ; du = \frac{5\pi}{2} x^4 dx$

$dx = \frac{2}{5\pi} x^4 du$

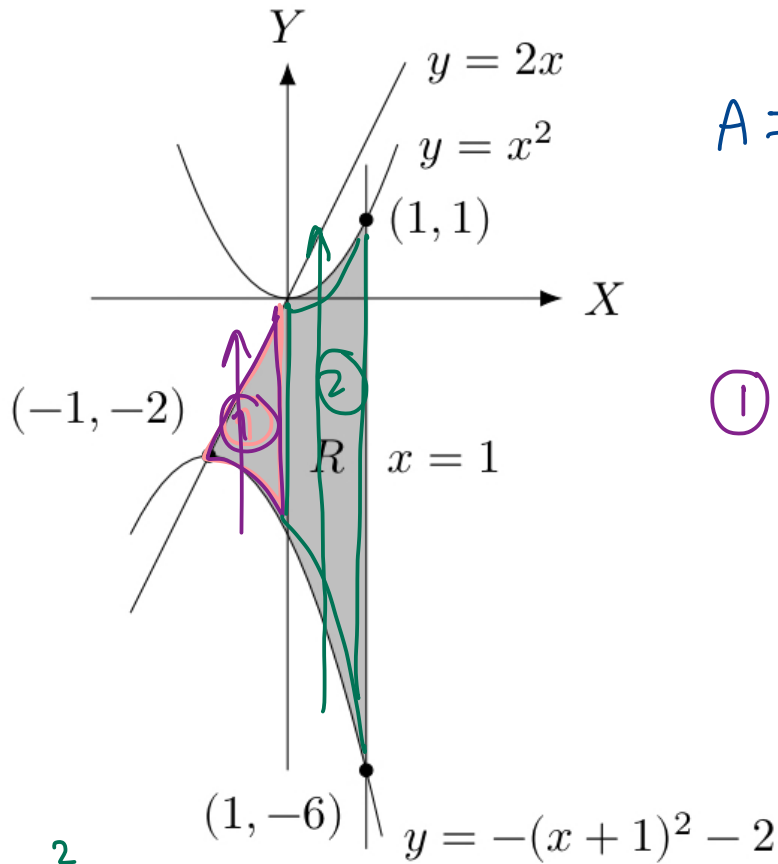
$= \int \frac{x^4}{2} \cos(u) \cdot \frac{2}{5\pi} du$

$= \frac{1}{5\pi} \int \cos u du = \frac{1}{5\pi} \sin u + C$

$= \frac{1}{5\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x^5\right) + C$

5. กำหนดให้  $R$  เป็นบริเวณที่แรเงาดังรูป จงใช้อินทิกรัลสองชั้นคำนวณหาพื้นที่  $R$

$$\text{Area } R = \iint_R dA$$



$$A = \underbrace{\int_{-1}^0 \int_{-(x+1)^2-2}^{2x} dy dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^1 \int_{-(x+1)^2-2}^{x^2} dy dx}_{(2)}$$

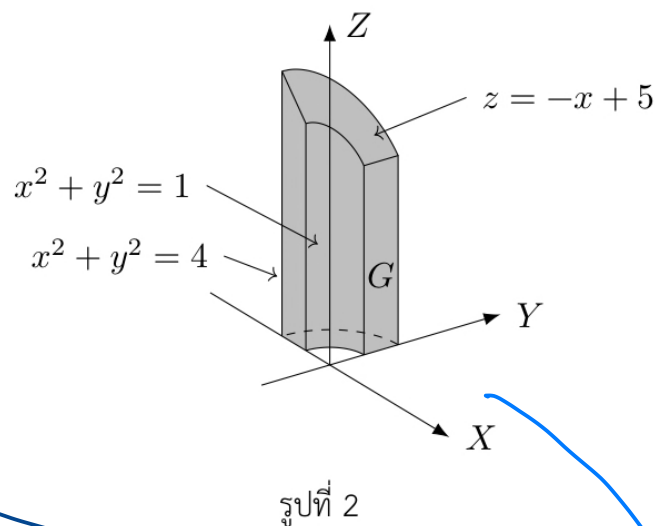
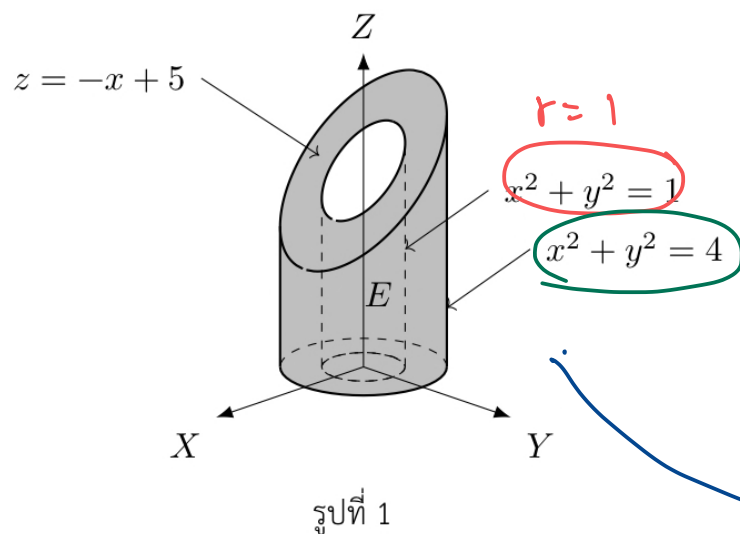
โจทย์  
21.35 ค.

$$\begin{aligned} (1); \int_{-1}^0 \int_{-(x+1)^2-2}^{2x} dy dx &= \int_{-1}^0 [2x - [-(x+1)^2 - 2]] dx \\ &= \int_{-1}^0 [2x + (x+1)^2 + 2] dx \\ &= \int_{-1}^0 [2x + x^2 + 2x + 1 + 2] dx \\ &= \int_{-1}^0 [x^2 + 4x + 3] dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right|_{x=-1}^{x=0} \\ &= (0) - \left( -\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

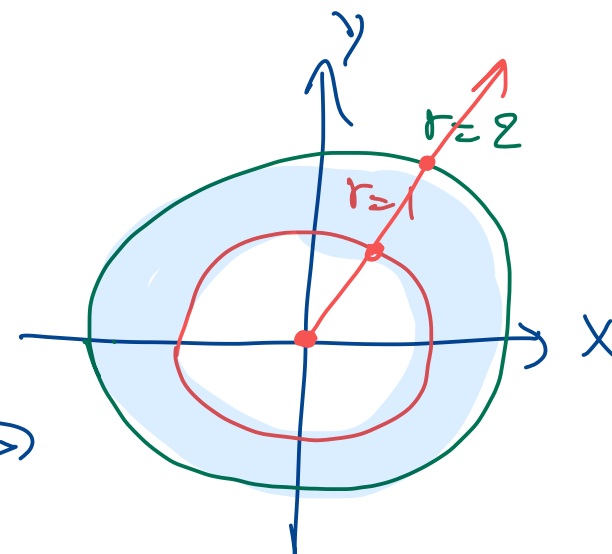
$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 \int_{-(x+1)^2-2}^{x^2} dy dx &= \int_0^1 [x^2 + (x+1)^2 + 2] dx \\ &= \int_0^1 [x^2 + x^2 + 2x + 1 + 2] dx \\ &= \int_0^1 [2x^2 + 2x + 3] dx = \left. \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x \right|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{2}{3} + 1 + 3 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$A = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. กำหนดให้  $E$  เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ  $z = -x + 5$  ด้านล่างด้วยระนาบ  $z = 0$  ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก  $x^2 + y^2 = 1$  และ ทรงกระบอก  $x^2 + y^2 = 4$  ดังรูปที่ 1



6.1  $V = \iint_R f(r, \theta) \cdot r dr d\theta$   
 $x = r \cos \theta$   
 $\therefore z = -r \cos \theta + 5$

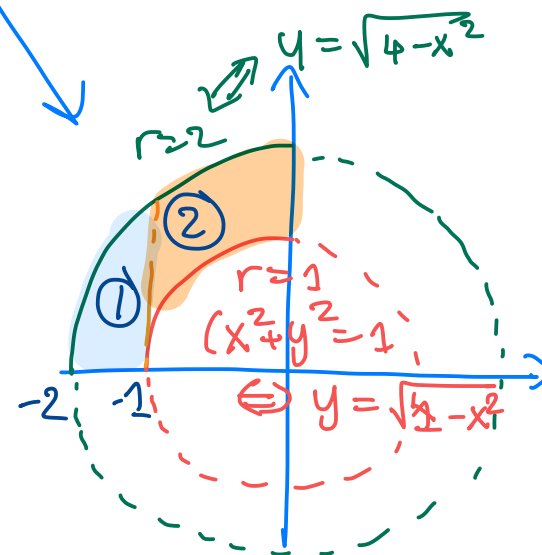


- 6.1. จงเขียนปริมาตรของทรงตัน  $E$  ในรูปของ อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า

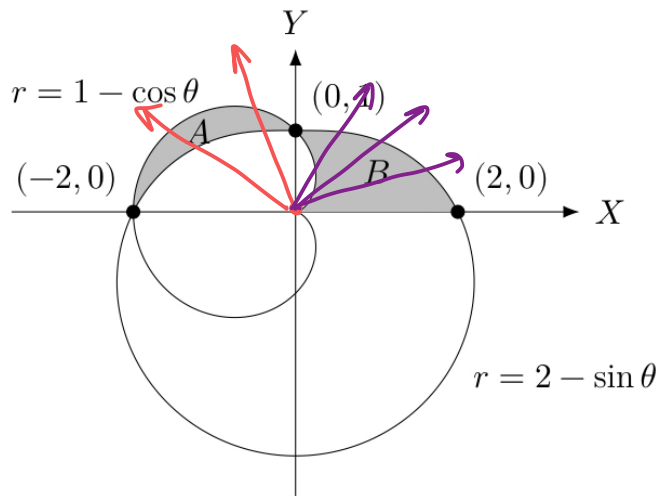
ปริมาตร  $E = \dots \int_0^{2\pi} \int_1^2 (-r \cos \theta + 5) r dr d\theta \dots$

- 6.2. ให้  $G$  เป็นส่วนของทรงตัน  $E$  ในออกแทนต์ที่ 2 ( $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) ดังรูปที่ 2 จงเขียนปริมาตรของ  $G$  ในรูปของ อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดฉาก โดยไม่ต้องคำนวณค่า

ปริมาตร  $E = \dots \int_{-2}^{-1} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (-x+5) dy dx + \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-x+5) dy dx \dots$



7. กำหนดบริเวณ A และ B ดังรูป



7.1. จงเขียนพื้นที่ A ในรูปของอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{2-\sin\theta}^{1-\cos\theta} r dr d\theta$$

7.2 จง คำนวณ หาพื้นที่ B โดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\text{Area B} = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{2-\sin\theta} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=1-\cos\theta}^{r=2-\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [(2-\sin\theta)^2 - (1-\cos\theta)^2] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [4 - 4\sin\theta + \sin^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [3 - 4\sin\theta + 2\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] d\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [3 - 4\sin\theta + 2\cos\theta - \cos 2\theta] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 3\theta + 4\cos\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - 0 - 4\cos 0 - 2\sin 0 - \frac{\sin 0}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{3\pi}{2} + 2 - 4 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\pi}{2} - 2 \right] \neq$$

8. กำหนดให้  $R$  เป็นบริเวณในปริภูมิสองมิติ ที่มีพื้นที่  $A$  ตารางหน่วย โดยที่

$$A = \int_0^{1/(2\sqrt{2})} \int_{x=y}^{\sqrt{(1/4)-y^2}} dx dy + \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx dy$$

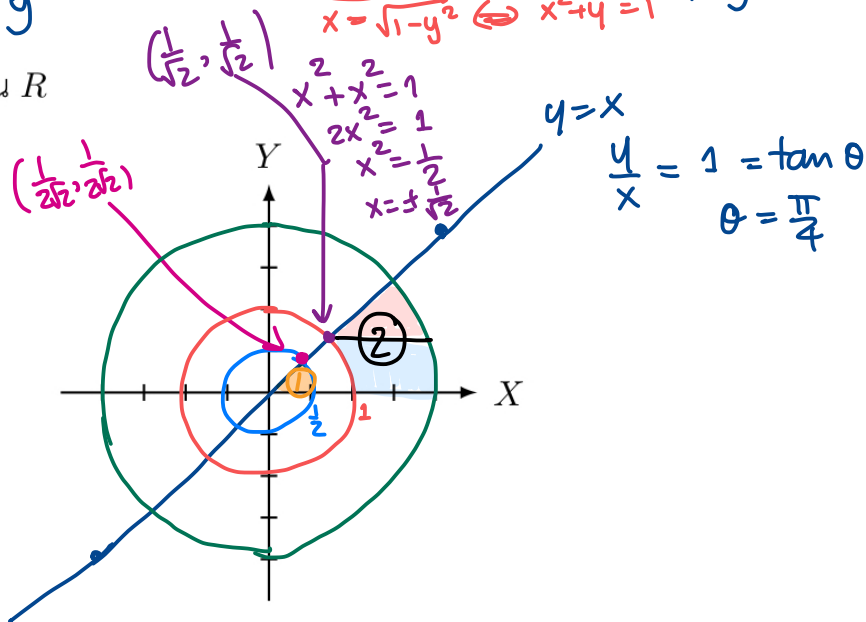
Handwritten notes above the integral:

- For the first integral:  $x = \sqrt{1/4 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1/4$
- For the second integral:  $x = \sqrt{4 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$
- For the third integral:  $x = \sqrt{4 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$
- For the second integral:  $x = \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

8.1. จงวาดรูปและแรเงาบริเวณ  $R$

จุดตัด

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= \frac{1}{4} \\ 2x^2 &= \frac{1}{4} \\ x^2 &= \frac{1}{8} \\ x &= \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$



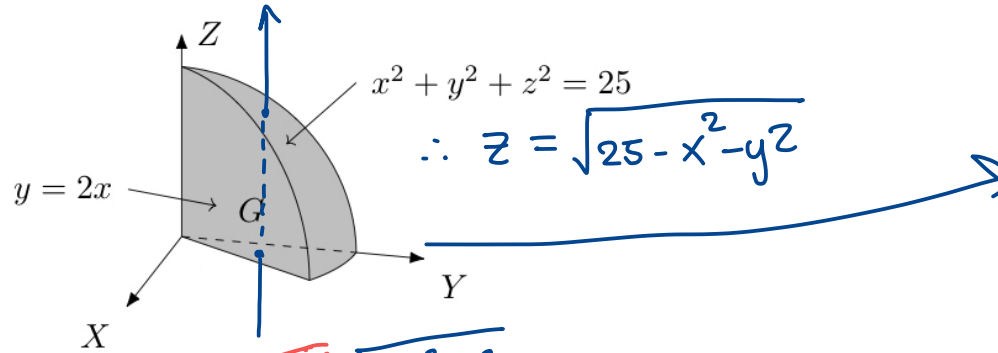
8.2. จงเขียน  $A$  ในรูปของอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า

$$A = \underbrace{\int_0^{\pi/4} \int_0^{1/2} r dr d\theta}_{(1)} + \int_0^{\pi/4} \int_1^2 r dr d\theta$$

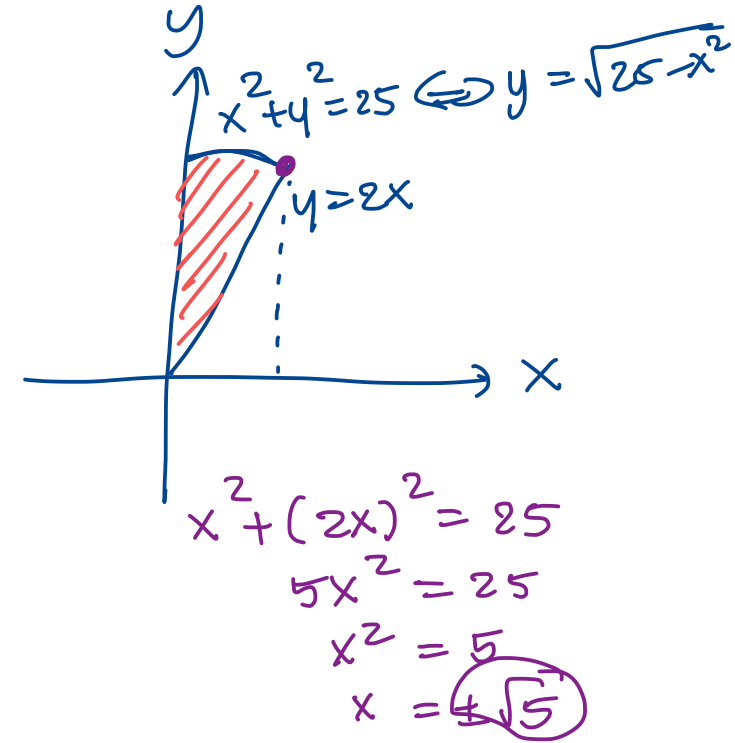
9. จงเขียนอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก  $\iiint_G f(x, y, z) dV$  เมื่อ  $G$  เป็นทรงตันที่กำหนดให้ดังรูป ใน

ลำดับการอินทิเกรตที่กำหนดให้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

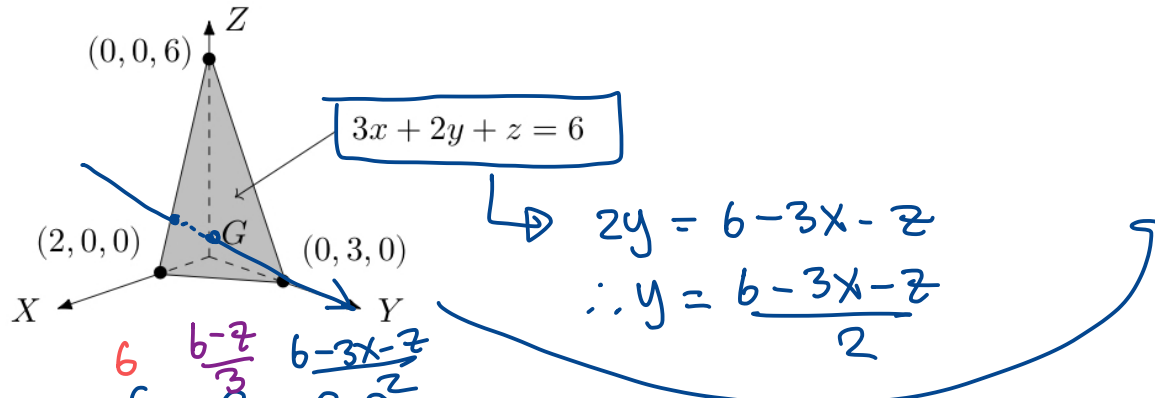
9.1.  $G$  เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวทรงกลม  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  ระนาบ  $y = 2x$  ระนาบ  $z = 0$  และระนาบ  $x = 0$



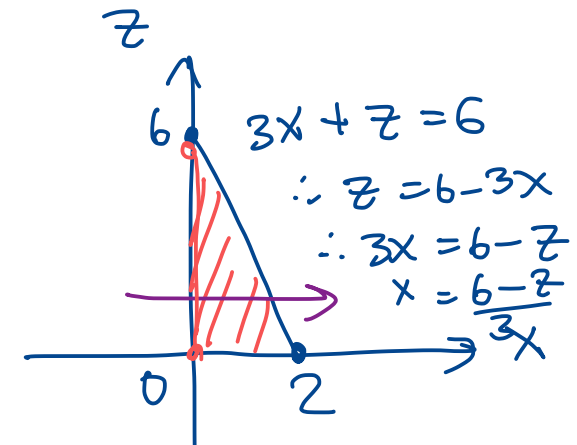
$$\iiint_G f(x, y, z) dz dy dx = \int_0^{\sqrt{5}} \int_{2x}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$$



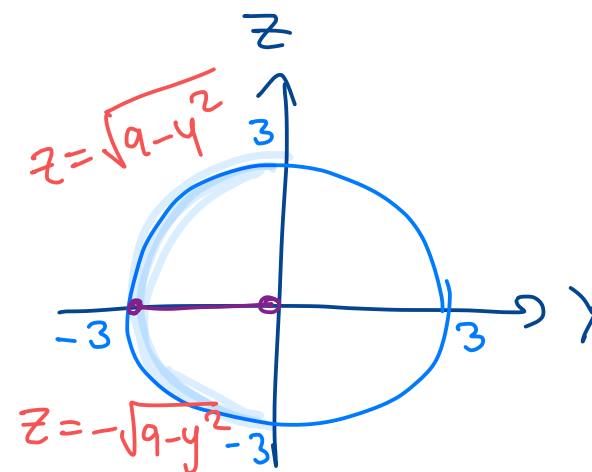
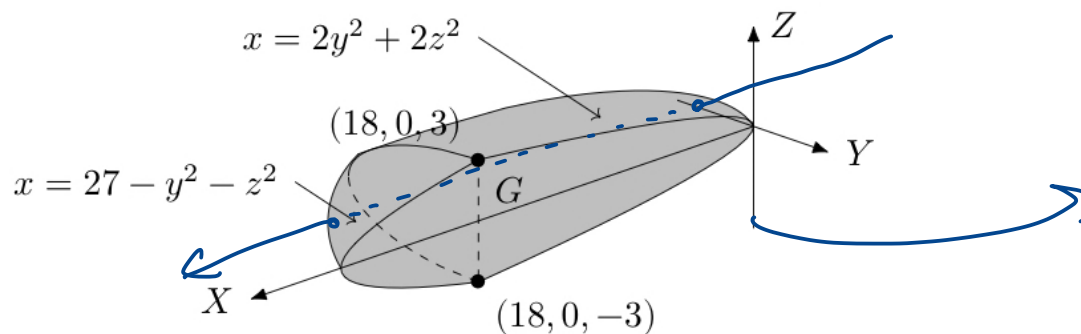
9.2.  $G$  เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ  $3x + 2y + z = 6$  ระนาบ  $z = 0$  ระนาบ  $y = 0$  และระนาบ  $x = 0$



$$\iiint_G f(x, y, z) dy dx dz = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-z}{3}} \int_0^{\frac{6-3x-z}{2}} f(x, y, z) dy dx dz$$



- 9.3.  $G$  เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ  $y = 0$  พื้นผิวพาราโบลอยด์  $x = 2y^2 + 2z^2$  และ  $x = 27 - y^2 - z^2$

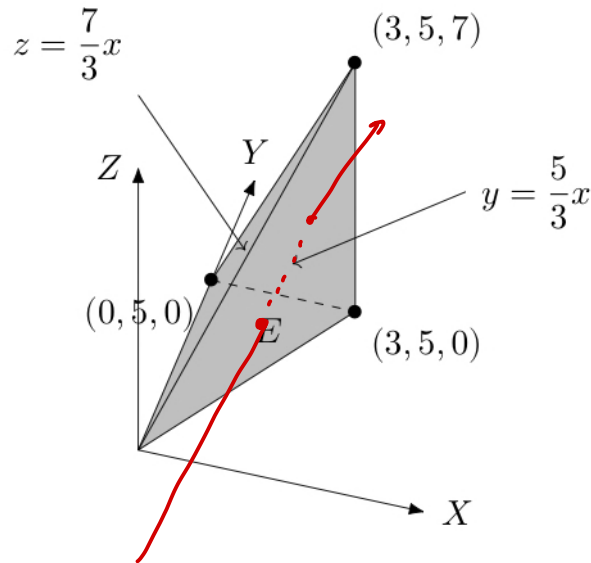
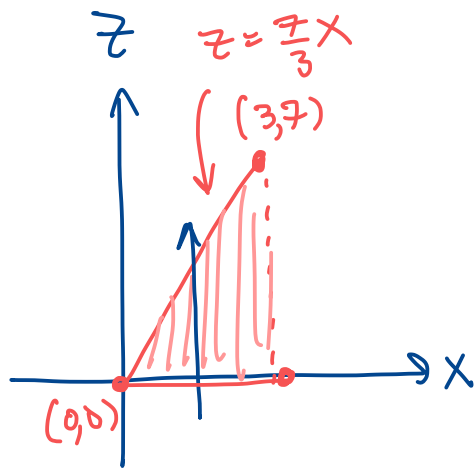


$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy = \dots \int_{-3-\sqrt{9-y^2}}^0 \int_{2y^2+2z^2}^{27-y^2-z^2} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy \dots$$

Check

$$\begin{aligned} 2y^2 + 2z^2 &= 27 - y^2 - z^2 \\ 3y^2 + 3z^2 &= 27 \\ y^2 + z^2 &= 9 \end{aligned}$$

10. กำหนดให้  $E$  เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ  $z = \frac{7}{3}x$  ระนาบ  $y = \frac{5}{3}x$  ระนาบ  $y = 5$  และระนาบ  $z = 0$  มีจุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$ ,  $(3, 5, 0)$  และ  $(3, 5, 7)$  ดังรูป จงใช้ อินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก คำนวณปริมาตรของ  $E$



$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_E dV \\
 V &= \int_0^3 \int_0^{\frac{7}{3}x} \int_{\frac{5}{3}x}^5 dy \, dz \, dx \\
 &= \int_0^3 \int_0^{\frac{7}{3}x} [5 - \frac{5}{3}x] \, dz \, dx \\
 &= \int_0^3 (5 - \frac{5}{3}x) \cdot \frac{7}{3}x \, dx \\
 &= \int_0^3 \left( \frac{35}{3}x - \frac{35}{9}x^2 \right) dx \\
 &= \left. \frac{35}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{35}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=3} \\
 &= \left[ \frac{35}{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{35}{9} \cdot \frac{27}{3} \right] = \frac{105}{2} - 35 = \frac{35}{2} \quad \#
 \end{aligned}$$

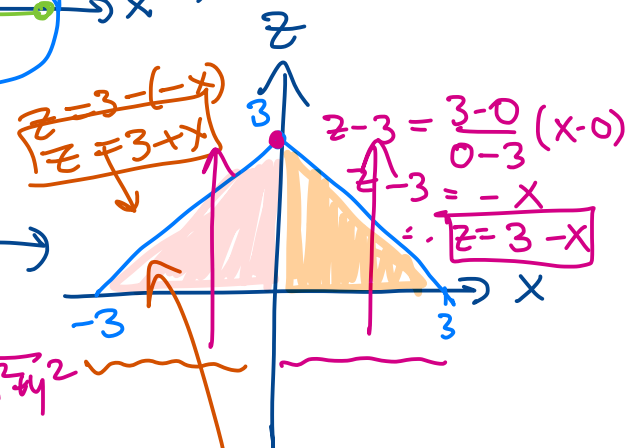
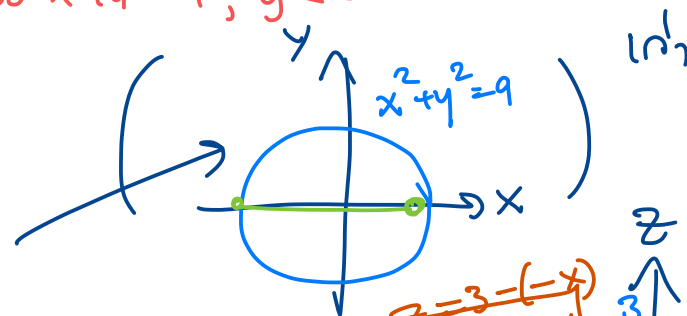
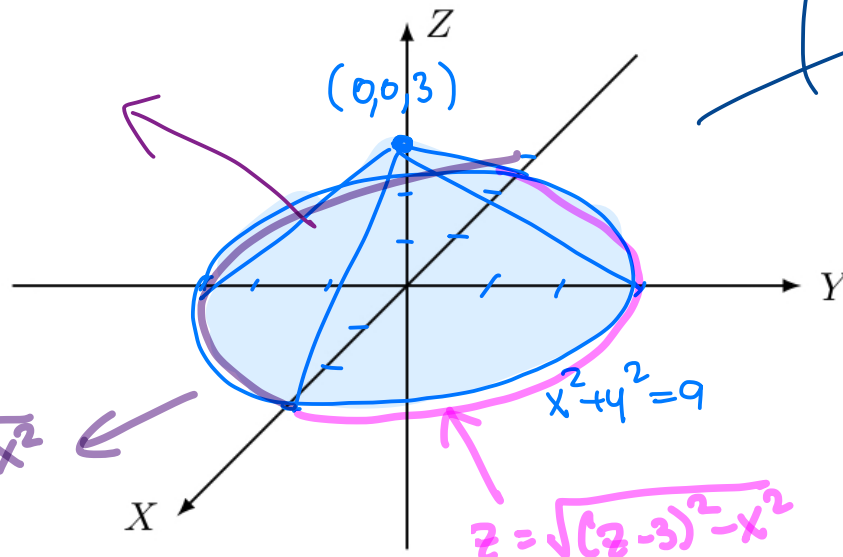
11. กำหนดอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก

$$I = \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{x=-3}^3 \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{z=0}^{3-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$$

$z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (z-3) = -\sqrt{x^2 + y^2}$   
 set  $z=0 \Rightarrow -3 = -\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

11.1. จงเขียนกราฟของทรงตัน  $E$  ที่สอดคล้องกับ  $I$  (ระบุจุดตัดให้ชัดเจน)

$$\begin{aligned}
 z &= 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \\
 z-3 &= -\sqrt{x^2 + y^2} \\
 (z-3)^2 &= x^2 + y^2 \\
 \therefore y^2 &= (z-3)^2 - x^2 \\
 y &= \pm \sqrt{(z-3)^2 - x^2}
 \end{aligned}$$



11.2. จงเขียน  $I$  ในลำดับการอินทิเกรตต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

$$\begin{aligned}
 I = \iiint_E f(x, y, z) dy dz dx &= \int_{-3}^3 \int_0^{3+x} \int_{-\sqrt{(z-3)^2 - x^2}}^{\sqrt{(z-3)^2 - x^2}} f(x, y, z) dy dz dx \\
 &+ \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_{-\sqrt{(z-3)^2 - x^2}}^{\sqrt{(z-3)^2 - x^2}} f(x, y, z) dy dz dx
 \end{aligned}$$

12. กำหนดอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก  $H = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-r}^r e^{r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$

จงเขียน  $H$  ในระบบพิกัดต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

12.1. ระบบพิกัดฉาก

$H = \dots$

12.2. ระบบพิกัดทรงกลม

$H = \dots$

$$r=2 \quad z=r \Leftrightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=0 \quad z=-r \Leftrightarrow z=-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

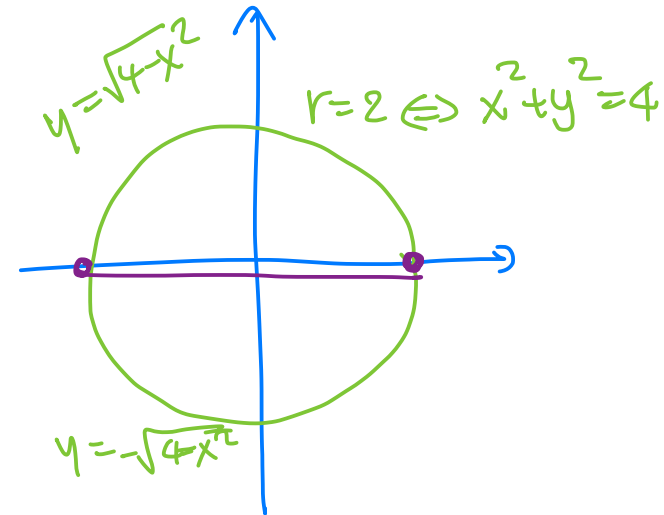
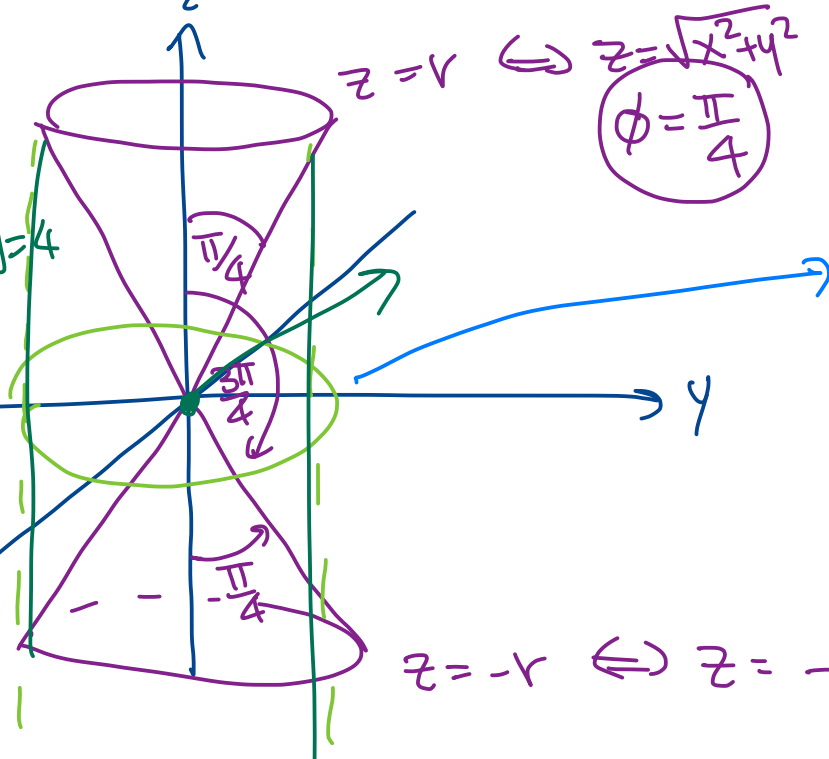
$$\text{สูตร } e^{r^2} r = e^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \rho \sin \theta$$

$$\therefore e^{r^2} r = e^{\rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \rho \sin \theta$$

$$H = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2\csc\phi} e^{\rho^2 \sin^2 \theta} \rho \sin \theta \, \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

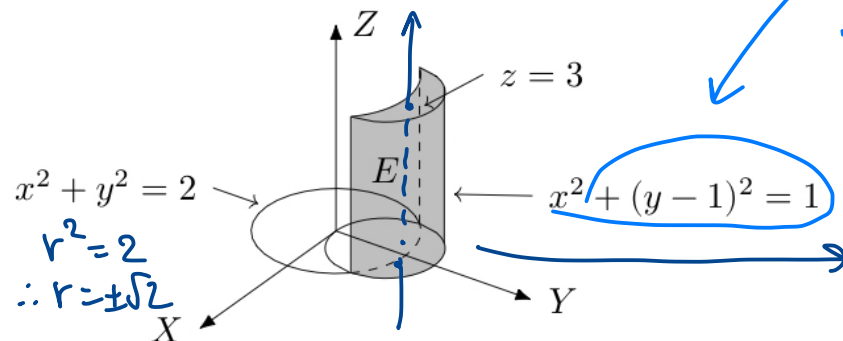
ทรงกระบอก  
 $x^2+y^2=4$   
 $x = \rho \sin \phi \cos \theta$   
 $y = \rho \sin \phi \sin \theta$   
 $\therefore \rho^2 \sin^2 \phi [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] = 4$   
 $\rho^2 \sin^2 \phi = 4$   
 $\rho \sin \phi = 2$   
 $\therefore \rho = \frac{2}{\sin \phi}$   
 หรือ  $\rho = 2 \csc \phi$



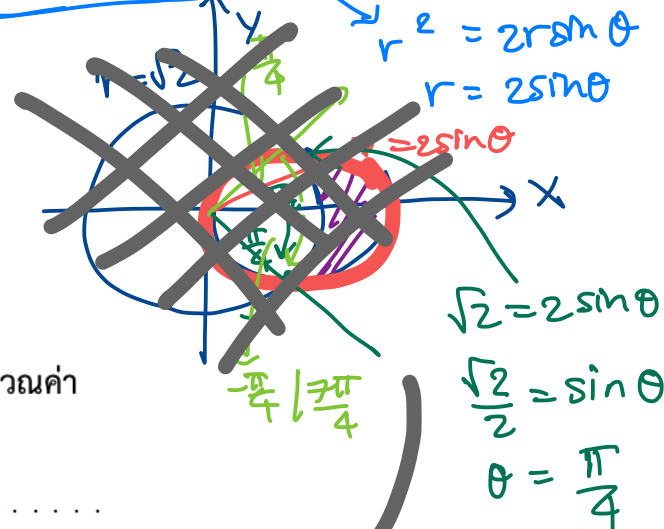
$$z = -r \Leftrightarrow z = -\sqrt{x^2+y^2}$$

13. กำหนดให้  $E$  เป็นทรงตันที่ด้านบนปิดล้อมด้วยระนาบ  $z = 3$  ด้านล่างด้วยระนาบ  $z = 0$  อยู่ภายในทรง

กระบอก  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  และอยู่ภายนอกทรงกระบอก  $x^2 + y^2 = 2$  ดังรูป

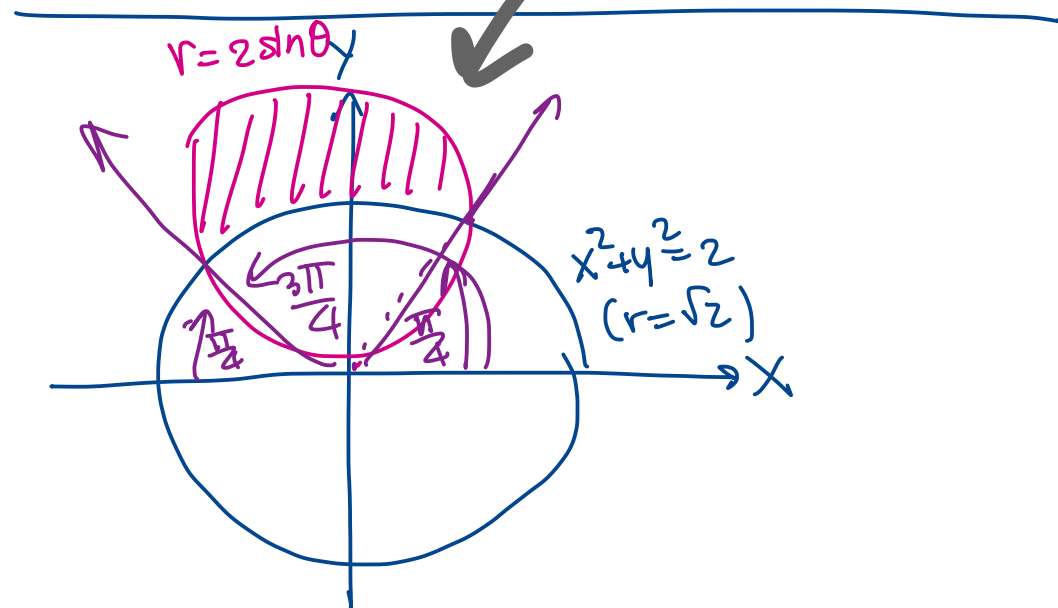


$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - 1)^2 &= 1 \\ r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 2r \sin \theta + 1 &= 1 \\ r^2 &= 2r \sin \theta \\ r &= 2 \sin \theta \end{aligned}$$

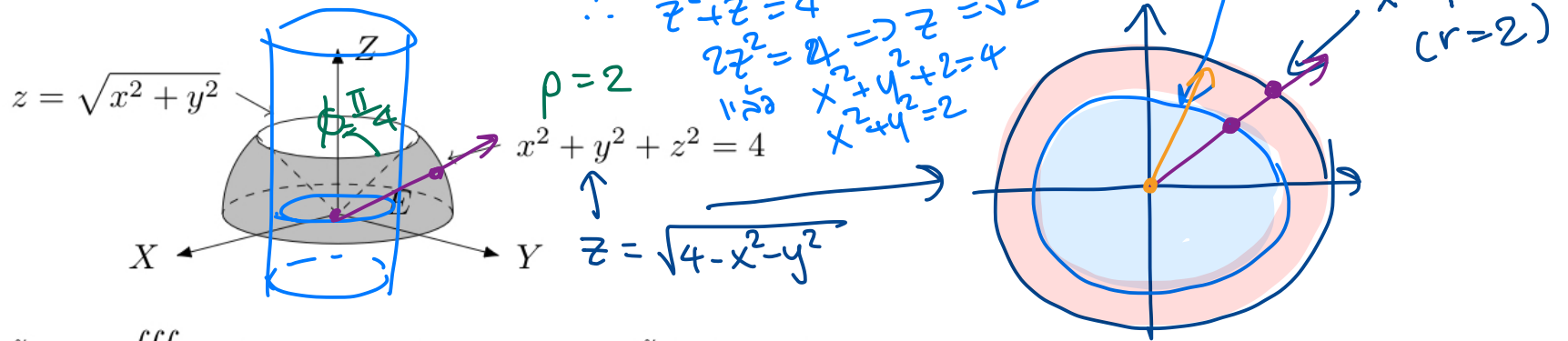


จงเขียนปริมาตรของ  $E$  ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า

ปริมาตร  $E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{2 \sin \theta} \int_0^3 r \, dz \, dr \, d\theta$



14. กำหนดให้  $E$  เป็นทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวกรวย  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  พื้นผิวทรงกลม  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  และระนาบ  $z = 0$  ดังรูป



จงเขียนอินทิกรัลสามชั้น  $I = \iiint_E z \sqrt{x^2 + y^2} dV$  ในระบบพิกัดต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

14.1. พิกัดกระบอก

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (z \cdot r) r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (z \cdot r) r dz dr d\theta$$

14.2. พิกัดทรงกลม

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (p^2 \cos \phi \sin \phi) \cdot p^2 \sin \phi dp d\phi d\theta \dots$$

ระบบพิกัดทรงกระบอก  $z \sqrt{x^2 + y^2} = z \cdot r$

ระบบพิกัดทรงกลม  $z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = p \cos \phi \sqrt{p^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta}$

$$\begin{aligned} z &= p \cos \phi \\ x &= p \sin \phi \cos \theta \\ y &= p \sin \phi \sin \theta \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= p \cos \phi \cdot p \sin \phi \\ &= p^2 \cos \phi \sin \phi \end{aligned}$$