เอกสารประกอบการสอน กระบวนวิชา 206331

# แคลคูลัสขั้นสูง
# Advanced Calculus

*A gateway to advanced mathematics*

**อาจารย์ ดร.ศุภณัฐ  ชัยดี**

**ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์**
**มหาวิทยาลัยเชียงใหม่**

# เอกสารประกอบการสอน

# 206331 Advanced Calculus

## แคลคูลัสขั้นสูง

---

**อาจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี**

*ภาควิชาคณิตศาสตร์*

*คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*

**ฉบับปรับปรุง เมษายน** 2563

ฉบับออนไลน์ สามารถดาวน์โหลดได้ที่

Website: http://www.schaidee.com/teaching

**เอกสารประกอบการสอนกระบวนวิชา** 206331
**แคลคูลัสขั้นสูง** Advanced Calculus

**พิมพ์ครั้งที่** 0 จำนวน 12 เล่ม (พฤษภาคม 2562) (ฉบับต้นร่างเอกสารประกอบการสอน)
**พิมพ์ครั้งที่** 1 จำนวน 15 เล่ม (เมษายน 2563) (ฉบับปรับปรุงให้มีความสมบูรณ์)
**พิมพ์ครั้งที่** 2 จำนวน 40 เล่ม (พฤศจิกายน 2563)

**จัดทำโดย** อาจารย์ ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
239 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200
E-mail: `supanut.c@cmu.ac.th`
Website: `http://www.schaidee.com`

**พิมพ์ที่** หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
โทร 053 943317, 053 943465
`http://www2.science.cmu.ac.th/offset/`

ข้อคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะ โปรดส่งมาได้ที่อีเมล์ `supanut.c@cmu.ac.th`

# คำนำ

เอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนในกระบวนวิชา 206331 แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งเป็นกระบวนวิชาบังคับสำหรับนักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ และเป็นกระบวนวิชาเลือกสำหรับนักศึกษาสาขาอื่น ๆ ที่ผ่านการศึกษากระบวนวิชาแคลคูลัสพื้นฐานมาแล้ว

กระบวนวิชาแคลคูลัสขั้นสูง เป็นกระบวนวิชาที่มุ่งเน้นการศึกษาประเด็นต่าง ๆ ที่น่าสนใจและจำเป็นสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น รวมถึงทำการพิสูจน์ประเด็นต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาแล้วในกระบวนวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน กระบวนวิชานี้มีพื้นฐานของการศึกษาด้านคณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis) แต่ยังคงมีเนื้อหาในภาคคำนวณอยู่บ้าง จึงกล่าวได้ว่า กระบวนวิชานี้เป็นกระบวนวิชาที่เปรียบเสมือนประตูเชื่อมไปสู่การศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง ซึ่งต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน ตลอดจนการวิเคราะห์คุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน เพื่อการนำไปใช้ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

ผู้เขียนได้แบ่งเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ออกเป็น 3 บท ตามคำอธิบายลักษณะกระบวนวิชา ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหา **บทที่** 1 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร **บทที่** 2 ปริพันธ์จำกัดเขต และ**บทที่** 3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ โดยภาพรวมของกระบวนวิชานี้ ผู้อ่านจะได้เห็นว่า เมื่อเราขยายแนวคิดจากฟังก์ชันตัวแปรเดียวสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร มีหลายแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีของฟังก์ชันหลายตัวแปรซึ่งมีความคล้ายกับทฤษฎีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว แต่ก็มีหลาย ๆ แนวคิดก็มีความแตกต่างไปจากทฤษฎีของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเช่นกัน

เพื่อให้ผู้อ่านเกิดความซาบซึ้งในการศึกษากระบวนวิชานี้ ผู้เขียนจึงได้จัดทำเอกสารฉบับนี้อย่างพิถีพิถัน โดยพยายามให้ผู้อ่านได้เห็นการเปรียบเทียบทฤษฎีบทที่ทราบในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันหลายตัวแปรเพื่อให้เห็นภาพความเชื่อมโยงจากความรู้เดิมที่เคยมีอยู่ นอกจากนี้ ผู้เขียนได้เลือกตัวอย่างที่เป็นทั้งตัวอย่างที่สนับสนุนทฤษฎีบท และตัวอย่างที่ค้านการคาดการณ์ข้อความทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีบทต่าง ๆ ซึ่งผู้เขียนคาดหวังว่า ผู้อ่านจะได้เข้าใจทฤษฎีบทต่าง ๆ และการใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมา เพื่อให้เห็นภาพของการศึกษาคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการพิสูจน์ทฤษฎีบท และนำทฤษฎีบทไปใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในบริบทที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ เอกสารฉบับนี้ได้บรรจุภาพและกราฟของฟังก์ชันที่นำมาเป็นตัวอย่าง โดยผู้เขียนได้วาดกราฟโดยใช้โปรแกรม Wolfram Mathematica® 11.1 และวาดแผนภาพโดยใช้โปรแกรม Keynote เพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจตัวอย่าง ตลอดจนสามารถสังเกตและเห็นภาพของทฤษฎีบทและตัวอย่าง เพื่อนำไปสู่การคาดการณ์ลักษณะของฟังก์ชัน ทั้งนี้ ผู้เขียนได้เลือกแบบฝึกหัดประจำหัวข้อ เพื่อฝึกประสบการณ์การพิสูจน์ และให้ผู้อ่านได้เห็นแง่มุมที่น่าสนใจที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท รวมถึงตัวอย่างค้านต่าง ๆ ที่น่าสนใจที่ใช้ประกอบทฤษฎีบทอีกด้วย

เอกสารนี้จะสำเร็จลงไม่ได้ หากขาดความช่วยเหลือและสนับสนุนจากหลาย ๆ ส่วน ผู้เขียนขอขอบคุณนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ รหัส 59 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ลงทะเบียนกระบวนวิชานี้ในภาคการศึกษา 2/2560 ทำให้เกิดโครงร่างของเอกสารฉบับเขียนด้วยลายมือ ที่ขาดไม่ได้คือ นักศึกษาที่ลงทะเบียนกระบวนวิชานี้ในภาคการศึกษา 2/2561 ที่เป็นส่วนสำคัญซึ่งทำให้เอกสารฉบับนี้เกิดขึ้นเป็นเล่มจริงสมดังความตั้งใจของผู้เขียน ตลอดจนได้แนะนำข้อบกพร่องเพื่อแก้ไขเอกสารฉบับนี้ให้สมบูรณ์ รวมถึง ธนกร อุดมวรรัตน์ และ ธนัท เปี่ยมสุวรรณ์ ซึ่งได้ช่วยตรวจทานต้นฉบับอย่างละเอียด นอกจากนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์ ที่ได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการสอนในกระบวนวิชานี้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมลักษณ์ อุตุดี ที่ได้อ่านต้นฉบับ ให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อแก้ไขเอกสารนี้ให้สมบูรณ์ในทุก ๆ ด้าน รวมถึงคณาจารย์ในภาควิชาที่เป็นกำลังใจในการจัดทำเอกสารฉบับนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารฉบับนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่าน และก่อให้เกิดความงอกงามทางวิชาการ คุณงามความดีของหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอยกให้แก่ครอบครัว ครูบาอาจารย์ที่ได้อบรมสั่งสอนตั้งแต่เด็กจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Prof. Kokichi Sugihara อาจารย์ที่ปรึกษาระดับปริญญาเอกของผู้เขียน ซึ่งเป็นแรงบันดาลใจให้แก่ผู้เขียนในการทำงานมาโดยตลอด และหากเอกสารฉบับนี้มีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนขอน้อมรับไว้ ณ ที่นี้ รวมถึงผู้อ่านสามารถแจ้งให้ผู้เขียนทราบเพื่อที่จะได้นำไปปรับปรุงและแก้ไขในลำดับต่อไป

ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พฤษภาคม 2562

ฉบับปรับปรุง เมษายน 2563

# สารบัญ

# แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

บทที่ 1

## การจัดการเรียนการสอน บทที่ 1 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

**กระบวนวิชา** แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus)
**ชื่อผู้สอน** อ.ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
**เวลาที่ใช้** 27 ชั่วโมง

**วัตถุประสงค์**

1. นักศึกษาสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร พร้อมทำการพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
2. นักศึกษาสามารถพิสูจน์การหาค่าได้ และการหาค่าไม่ได้ของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
3. นักศึกษาสามารถพิสูจน์การเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
4. นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยใช้นิยาม และอธิบายความหมายทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องได้
5. นักศึกษาสามารถพิสูจน์การหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยใช้นิยาม และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์ได้ ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันช่วยในการตรวจสอบการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้
6. นักศึกษาสามารถใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม และการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ ประมาณค่าของฟังก์ชันได้
7. นักศึกษาสามารถพิสูจน์การเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ และใช้สมบัติของฟังก์ชันเอกพันธุ์ในการพิสูจน์ฟังก์ชันบางชนิดได้
8. นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชันที่กำหนด ใช้สมบัติที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ระบุทิศทางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และอธิบายความหมายที่เกี่ยวข้องได้
9. นักศึกษาสามารถหาจาโคเบียนการแปลงจากระนาบหนึ่งไปยังอีกระนาบหนึ่งได้
10. นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงโดยใช้จาโคเบียนการแปลงได้
11. นักศึกษาสามารถเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์หลายชั้นโดยใช้จาโคเบียนการแปลงได้

12. นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันหลายตัวแปรที่กำหนดให้ได้

13. นักศึกษาสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรได้

14. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทค่าสุดขีดสัมพัทธ์ และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ และสามารถหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

15. นักศึกษาสามารถอธิบายระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ และสามารถแก้ปัญหาการหาค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดโดยใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ได้

16. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาได้

**กิจกรรมการเรียนการสอน**

1. การบรรยายในชั้นเรียน

2. การยกตัวอย่าง การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องในแต่ละหัวข้อ

3. นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัดจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน

4. นักศึกษาทำแบบฝึกหัดทบทวน และทำการบ้านเพื่อพัฒนาทักษะการพิสูจน์

**สื่อการเรียนการสอน**

1. เอกสารประกอบการเรียนการสอน กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง

2. กระดาน ปากกา กระดาษ เครื่องฉายทึบแสง

3. กระดาษชาร์ตสำหรับเขียนคำตอบหน้าชั้นเรียน

**เอกสารอ้างอิง**

1. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

2. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

3. อติชาต เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

4. Amazigo, J. C., & Rubenfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.

5. Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.

6. Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.

7. Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley

8. Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
9. Shifrin, T. (2005). Multivariable mathematics: linear algebra, multivariable calculus, and manifolds. John Wiley & Sons Inc.
10. Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
11. Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.
12. Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
13. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.

*This page is intentionally left blank. หน้านี้ตั้งใจเว้นว่างไว้*

*This gives us a contradiction. เกิดข้อขัดแย้ง*

# แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันหลายตัวแปร และแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรเพื่อนำไปใช้งานในบริบทต่าง ๆ สำหรับการศึกษาในกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษาแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันหลายตัวแปรในมุมมองของการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เคยใช้ในแคลคูลัสพื้นฐาน ตลอดจนการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการศึกษาด้านอื่น ๆ ต่อไป

## 1.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ต่อไปนี้ จะกำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง จะเรียก $\mathbb{R}$ ว่าเป็น**ปริภูมิหนึ่งมิติ** (One-dimensional space)

ผลคูณของเซต $A_1, ..., A_n$ เมื่อ $n \geq 2$ เขียนแทนด้วย $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ คือเซตของ $n$ สิ่งอันดับ ($n$-tuple) $(a_1, ..., a_n)$ เมื่อ $a_i \in A_i$ นั่นคือ

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) | a_i \in A_i \text{ ทุก } i = 1, ..., n\}$$

สำหรับกรณีที่ $A_i$ คือเซตของจำนวนจริง เราจะเขียน $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ ตัว}}$ ดังนั้นสมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ คือ $n$ สิ่งอันดับ $(x_1, ..., x_n)$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{R}$ สำหรับทุก $i$

> **หมายเหตุ** เราอาจมองได้ว่า สมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ ที่เป็น $n$ สิ่งอันดับ เป็น**เวกเตอร์** (vector) ดังนั้น ในหนังสือหลาย ๆ เล่ม การเขียนแทน $n$ สิ่งอันดับจะใช้สัญลักษณ์แบบเวกเตอร์ กล่าวคือ อาจเขียนว่า $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n})$ ได้

ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน เราได้นิยามฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว กล่าวคือ ความสัมพันธ์ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน (function / mapping) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

เพื่อวางนัยไปสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร กำหนด**ตัวแปรอิสระ** (independent variable) $x_1, ..., x_n$ จำนวน $n$ ตัว เขียนในรูป n สิ่งอันดับ $\mathbf{P} = (x_1, ..., x_n)$ สมมติว่าแต่ละ $n$ สิ่งอันดับ $\mathbf{P}$ มี $w \in \mathbb{R}$ เป็น**ตัวแปรตาม** (dependent variable) เซตของคู่ $(\mathbf{P}, w)$ เรียกว่า ฟังก์ชันค่าจริง $n$ ตัวแปร (real-valued function of $n$ variables) เขียนแทนด้วย $f$

> **บทนิยาม** 1.1.1 ให้ $f \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ เป็นความสัมพันธ์จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $f$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง $n$ ตัวแปร ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละคู่ $(\mathbf{P}_1, w_1), (\mathbf{P}_2, w_2)$ โดยที่ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^n$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ ถ้า $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ แล้ว $w_1 = w_2$

**หมายเหตุ** ถ้าสมมติให้ $\mathbf{P}_1 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ และ $\mathbf{P}_1 = (y_1, y_2, ..., y_n)$ แล้ว จะได้ว่า $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., และ $x_n = y_n$

ในการเขียนฟังก์ชัน เราเขียนได้ว่า

$$w = f(\mathbf{P}) \qquad \text{หรือ} \qquad w = f(x_1, ..., x_n) \tag{1.1.1}$$

ทั้งนี้ ฟังก์ชันที่เขียนดังสมการ (1.1.1) เราเรียกว่า **ฟังก์ชันชัดแจ้ง** (explicit function) อย่างไรก็ตาม ในบางครั้ง เราไม่อาจเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบที่เห็นเด่นชัด ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร อาจเขียนได้อยู่ในรูป**ฟังก์ชันโดยปริยาย** (implicit function) เขียนได้ในรูปแบบ

$$\phi(x_1, ..., x_n) = 0 \tag{1.1.2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชัน $n$ ตัวแปรที่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่ชัดแจ้งของ $x_i$ ในเทอมของตัวแปรอิสระที่เหลือ $n-1$ ตัวแปรได้ อย่างไรก็ตาม เราศึกษาฟังก์ชันชัดแจ้งเป็นหลักในกระบวนวิชานี้

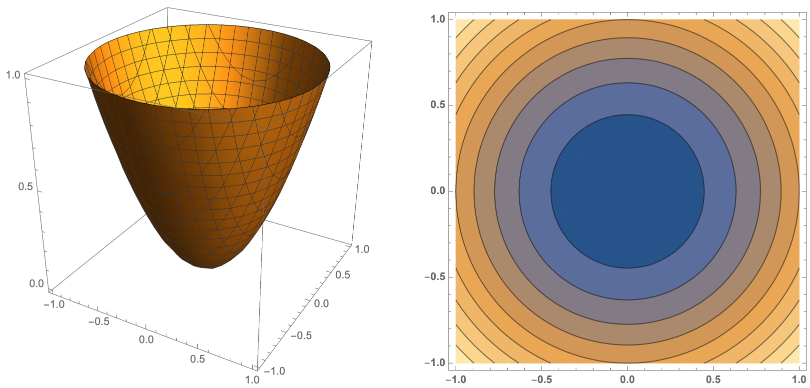
เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถนิยามโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปรได้ ดังนี้

**บทนิยาม** 1.1.2 ให้ $w = f(\mathbf{P})$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร **โดเมน** (Domain) แทนด้วย $D_f$ และ**เรนจ์** (Range) แทนด้วย $R_f$ ของฟังก์ชัน $f$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_f &= \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n \,|\, \text{มี } w \in \mathbb{R} \text{ ซึ่ง } (\mathbf{P}, w) \in f\} \\ R_f &= \{w \in \mathbb{R} \,|\, \text{มี } \mathbf{P} \in \mathbb{R}^n \text{ ซึ่ง } (\mathbf{P}, w) \in f\} \end{aligned}$$

**ความหมายทางเรขาคณิตสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร**

สำหรับฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร ฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงพื้นผิว และเมื่อพิจารณา $z$ เป็นค่าคงที่แต่ละค่า จะสามารถพิจารณา $f$ ในรูปเส้นชั้นความสูง (level curves / contour map) ดังภาพต่อไปนี้



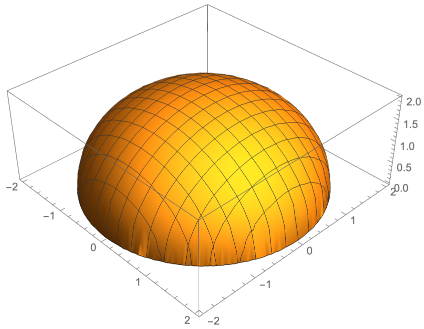

**ภาพที่** 1.1. (ซ้าย) พื้นผิวของ $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (ขวา) เส้นชั้นความสูงของ $f$

สมมตินิยามฟังก์ชันสองตัวแปรโดย $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ เมื่อทำการวาดกราฟ จะได้พื้นผิวของ $z = f(x, y)$ ดังภาพซ้าย จะเห็นว่า เมื่อกำหนดให้ $z$ เป็นค่าคงที่แต่ละค่า จะปรากฏเป็นเส้นชั้นความสูงของ $f$

**ตัวอย่าง** 1.1.1 กำหนดความสัมพันธ์

$$f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

1. จงแสดงว่า $f$ ซึ่งมี $z$ เป็นตัวแปรตาม เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ $y$
2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $f$ พร้อมทั้งพิสูจน์



**ภาพที่** 1.2. พื้นผิวที่นิยามโดย $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

จะเห็นว่า พื้นผิวของ $f$ สามารถวาดได้ดังภาพที่ 1.2 ซึ่งสามารถวิเคราะห์โดยคร่าว ๆ ได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากแต่ละคู่อันดับ $(x, y)$ ให้ค่า $z$ เพียงหนึ่งค่า และเราสามารถวิเคราะห์โดเมนและเรนจ์ได้อย่างคร่าว ๆ ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดนิยามแจ่มชัด รวมถึงพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

**พิสูจน์**

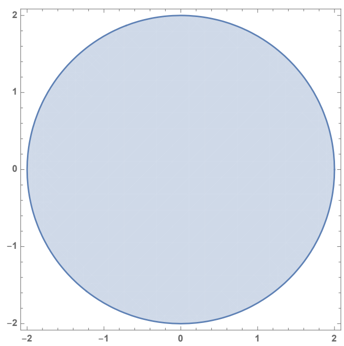
1. จะแสดงว่า ความสัมพันธ์ $f$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ $y$

ให้ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^2$ โดยที่ $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$ และ $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$
จาก $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ จะได้ว่า $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
นั่นคือ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$
ดังนั้น $z_1 = \sqrt{4 - x_1^2 - y_1^2} = \sqrt{4 - x_2^2 - y_2^2} = z_2$
จึงได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ $y$

2. ก่อนอื่น จะหาโดเมนของ $f$

จะเห็นว่า $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
ซึ่งสมมูลกับ $x^2 + y^2 \leq 4$ ดังนั้น จึงคาดว่าโดเมนของ $f$ คือ

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$$



**ภาพที่** 1.3. บริเวณที่แสดงโดเมนของ $f$

ซึ่งเป็นบริเวณภายในที่รวมขอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมี 2 หน่วย ดังภาพ 1.3

ต่อไป จะแสดงว่า $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\subseteq$) ให้ $(a, b) \in D_f$
เนื่องจาก $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
โดยนิยามของโดเมน จะได้ว่า มี $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ซึ่ง $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$
เนื่องจาก $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$ จึงได้ว่า $c^2 + a^2 + b^2 = 4$
นั่นคือ $a^2 + b^2 \leq c^2 + a^2 + b^2 = 4$
จึงได้ว่า $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\supseteq$) ให้ $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$
จะได้ว่า $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ และ $a^2 + b^2 \leq 4$ นั่นคือ $\sqrt{4 - a^2 - b^2} \geq 0$
เลือก $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2} \geq 0$ ซึ่ง $f(a, b) = \sqrt{4 - a^2 - b^2} = c$
ดังนั้น $(a, b) \in D_f$
เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

3. ต่อไป จะหาเรนจ์ของ $f$

จะเห็นว่า $z \geq 0$ และ $z^2 = 4 - x^2 - y^2 \leq 4$ นั่นคือ $z \in [0, 2]$ ดังนั้น เรนจ์ของ

$f$ คือ

$$R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$$

ต่อไป จะแสดงว่า $R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

($\subseteq$) ให้ $c \in R_f$ ดังนั้น $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$
และมี $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$
ได้ว่า $c^2 = 4 - a^2 - b^2 \leq 4$ นั่นคือ $-2 \leq c \leq 2$
เนื่องจาก $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ได้ว่า $0 \leq c \leq 2$
กล่าวคือ $c \in \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

($\supseteq$) ให้ $c \in \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$
เลือก $(a, b) = (\sqrt{4 - c^2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง

$$f(a, b) = \sqrt{4 - (\sqrt{4 - c})^2 - 0} = c$$

ดังนั้น $c \in R_f$

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$ □

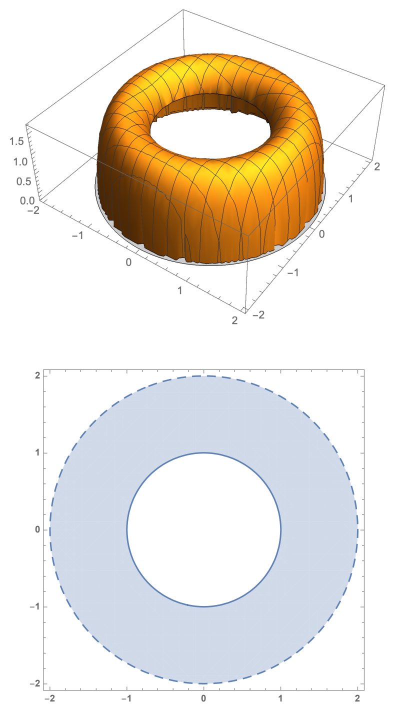
**ตัวอย่าง 1.1.2** จงหาโดเมนของฟังก์ชันสองตัวแปร

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$$

**พิสูจน์** จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชัน $f$ หาค่าได้คือ $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ และ $4 - x^2 - y^2 > 0$ ซึ่งสมมูลกับเงื่อนไข $x^2 + y^2 \geq 1$ และ $x^2 + y^2 < 4$
ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน $f$ คือ

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1 \text{ และ } x^2 + y^2 < 4\} \end{aligned}$$

มีบริเวณดังภาพ 1.4 □



**ภาพที่** 1.4. พื้นผิวและบริเวณของโดเมนในตัวอย่าง 1.1.2

นอกจากการพิจารณาฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจากเซตของ $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ แล้ว เรายังสามารถพิจารณาฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}^m$ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.1.3** กำหนดให้ $x = \phi(t), y = \varphi(t)$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$
ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในปริภูมิสองมิติ นิยามโดย

$$f(t) = (x, y) = (\phi(t), \varphi(t)) \qquad ; t \in \mathbb{R}$$

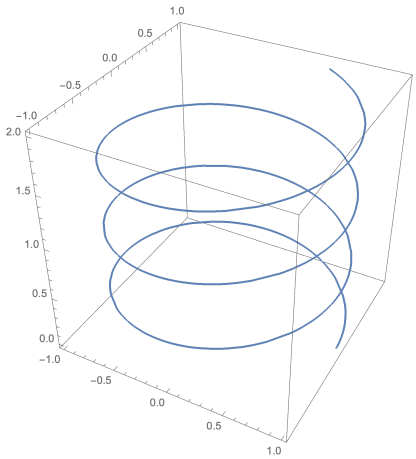
ในตัวอย่าง 1.1.3 สำหรับปริภูมิสองมิติ เราจะกล่าวว่า เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมเป็น**เส้นโค้งเรียบ** (smooth curve) บนช่วง $[a, b]$ ถ้า $\phi(t)$ และ $\varphi(t)$ หาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ $\phi'(t)$ และ $\varphi'(t)$มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ด้วย เราจะใช้นิยามของเส้นโค้งเรียบในการพิสูจน์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรต่อไป

**ตัวอย่าง** 1.1.4 พิจารณาฟังก์ชันที่นิยามแบบอิงตัวแปรเสริม $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ กำหนดโดย

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t/10) \qquad ; t \in [0, \infty)$$

$f$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ แสดงได้ดังภาพ 1.5

ในกรณีนี้จะเห็นว่า โดเมนของ $f$ คือ $[0, \infty)$ ซึ่งโดเมนเป็นเซตใน 1 มิติ




**ภาพที่** 1.5. เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมที่นิยามโดยฟังก์ชัน $f$ ในตัวอย่าง 1.1.4

**ตัวอย่าง** 1.1.5 กำหนดให้ $x = \phi(u,v), y = \varphi(u,v), z = \theta(u,v)$ โดยที่ $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันของพื้นผิวอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ นิยามโดย

$$F(u,v) = (x,y,z) = (\phi(u,v), \varphi(u,v), \theta(u,v)), u, v \in \mathbb{R}$$

โดยทั่วไป $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ จะเรียกว่า **การแปลง** (transformation) เราจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการแปลงในภายหลังอีกครั้งหนึ่งในเรื่องต่อ ๆ ไป

# แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน พร้อมหาโดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน พร้อมทั้งพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันด้วย

   (a) $f_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \ln(x^2 + y^2 - 1)\right\}$

   (b) $f_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \sqrt{6 - (2x + 3y)}\right\}$

   (c) $f_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right\}$

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{1/2}$

   (b) $f(x,y) = \ln(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

   (d) $f(u,v,w) = \exp\left(\dfrac{u}{v - w}\right)$

   (e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{2x_1 - 3x_2}{x_3 + 5x_4}$

   (f) $f(x,y,z) = \ln(xy/z)$

## 1.2 ลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร

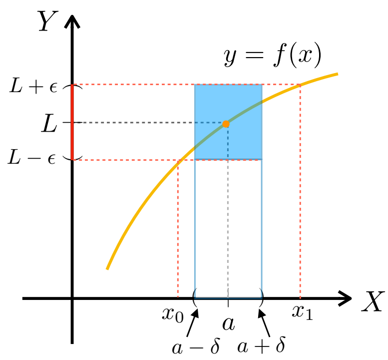
ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร เพื่อให้เข้าใจภาพของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะพิจารณาจากภาพใกล้ตัวก่อน โดยศึกษามโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว จากนั้นเราขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร โดยศึกษาทอพอโลยีเบื้องต้นของ $\mathbb{R}^n$ และนิยามลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร

### 1.2.1 มโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว

ในแคลคูลัสขั้นมูลฐาน เราคุ้นเคยกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เมื่อกล่าวถึงภาษาพูดอย่างง่าย การกล่าวถึงลิมิต

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

หมายความว่า เมื่อ $x$ เข้าใกล้ $a$ ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ $L$ ด้วย จะเห็นว่าการที่ $x$ เข้าใกล้ $a$ ในโดเมนของ $f$ เราพิจารณาการเข้าสู่ $a$ ในสองทิศทาง คือ ทางบวก $x \to a^+$ และทางลบ $x \to a^-$ บนเส้นจำนวน ดังภาพ 1.6

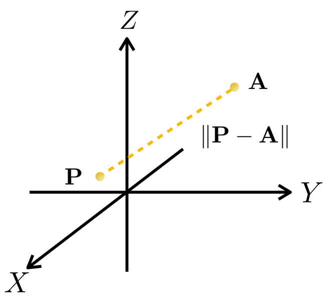



**ภาพที่** 1.6. ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

จากนิยามของลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปรได้ อย่างไรก็ตาม จะเห็นว่าการขยายแนวความคิด จำเป็นต้องพิจารณาการเข้าใกล้ในมิติที่สูงขึ้น การพิจารณาการเข้าใกล้บนช่วงจึงไม่เพียงพอ ในการนี้ เราจึงจะเริ่มต้นศึกษาทอพอโลยีของ $\mathbb{R}^n$ เพื่อนำไปสู่นิยามของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรต่อไป

### 1.2.2 ทอพอโลยีเบื้องต้นของ $\mathbb{R}^n$

ทอพอโลยี (Topology) เป็นการศึกษาสมบัติของปริภูมิที่คงสภาพภายใต้การแปลงที่ต่อเนื่อง โดยการพิจารณากลุ่มของสับเซตที่เรียกว่า เซตเปิด (open set) อย่างไรก็ตาม ทอพอโลยีในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ มีสมบัติที่เพียงพอและเหมาะสมต่อการใช้งาน




**ภาพที่** 1.7. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

**ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$**

ให้ $\mathbf{P}(x_1, \dots, x_n)$ และ $\mathbf{A}(a_1, \dots, a_n)$ เป็นจุดในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$

**นอร์ม** (norm) ระหว่างจุด $\mathbf{P}$ และ $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\|\mathbf{P}-\mathbf{A}\|$

ในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ นอร์มคือการวัดระยะทางระหว่างจุด $\mathbf{P}$ และ $\mathbf{A}$ ซึ่งอาจเขียนระยะทาง (เมตริก) ได้โดย $d(\mathbf{P}, \mathbf{A})$

นอร์มยูคลิด (Euclidean norm) (หรือ ระยะทางยูคลิด) บน $\mathbb{R}^n$ นิยามโดย

$$\|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2}$$

**สมบัติของเซตใน $\mathbb{R}^n$**

**บทนิยาม** 1.2.1 **บอลเปิด** (open ball) ของจุด $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $B(\mathbf{A}; r)$ คือเซตของจุด $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $0 \le \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < r$ โดยที่ $r > 0$

- บอลเปิด $B(\mathbf{A}; r)$ เขียนได้โดย

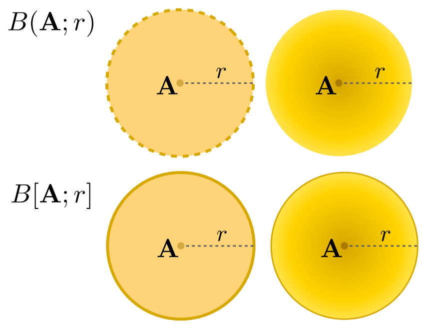
$$B(\mathbf{A}; r) = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \le \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < r\}$$

- บอลปิด $B[\mathbf{A}; r]$ เขียนได้โดย

$$B[\mathbf{A}; r] = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \le \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| \le r\}$$

จะเห็นว่าในปริภูมิ $\mathbb{R}^2$ จะเรียก $B(\mathbf{A};r)$ เรียกว่า จานเปิด (open disk) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^2$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี $r$ ไม่รวมขอบ และ $B[A;r]$ เรียกว่า จานปิด (closed disk) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^2$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี $r$ รวมขอบ ดังภาพ 1.8 (ด้านบน)

สำหรับปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ จะเรียก $B(\mathbf{A};r)$ เรียกว่า บอลเปิด (open sphere) ซึ่งบริเวณใน $\mathbb{R}^3$ เป็นทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี $r$ ไม่รวมขอบและ $B[\mathbf{A};r]$ เรียกว่า บอลปิด (closed ball) ซึ่งเป็นบริเวณใน $\mathbb{R}^3$ เป็นทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี $r$ รวมขอบ ดังภาพ 1.8 (ด้านล่าง)




**ภาพที่** 1.8. $B(\mathbf{A};r)$ และ $B[\mathbf{A};r]$

**บทนิยาม** 1.2.2 ให้ $S$ เป็นเซต และสมมติให้ $\mathbf{A} \in \mathbf{S}$ จะกล่าวว่า เซต $N(\mathbf{A})$ เป็น**ย่านจุดเปิด** (neighborhood) ของจุด $\mathbf{A}$ ถ้า $N(\mathbf{A})$ บรรจุบอล $B(\mathbf{A};r)$ สำหรับบางจำนวนจริง $r > 0$
นั่นคือ $N(\mathbf{A})$ เป็นย่านจุดเปิดของ $\mathbf{A}$ ถ้ามี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $B(\mathbf{A};r) \subset N(\mathbf{A})$

เพื่อความสะดวก เราอาจพิจารณาย่านจุดเปิดเป็นเซตของบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\mathbf{A}$ และมีรัศมี $r > 0$ ในกรณีนี้ จะใช้สัญลักษณ์ $N(\mathbf{A};r)$ ซึ่งจะได้ว่า ย่านจุดเปิด $N(\mathbf{A};r)$ เขียนได้โดย

$$N(\mathbf{A};r) = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r\}$$

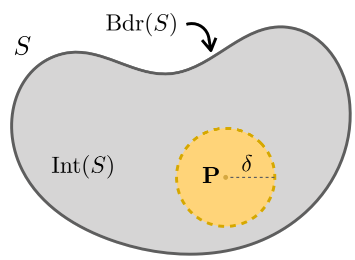
และสำหรับย่านจุดปิด $N[\mathbf{A};r]$ เขียนได้โดย

$$N[\mathbf{A};r] = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| \leq r\}$$

**บทนิยาม 1.2.3 ย่านใกล้เคียงจุด** A (deleted neighborhood of $\mathbf{A}$) คือเซตของจุด $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r$ โดยที่ $r > 0$ นั่นคือ

$$\{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r\}$$

จะเห็นว่า ย่านใกล้เคียงจุด A คือ ย่านจุดเปิด $A$ ที่ไม่รวมจุด $\mathbf{A}$




**ภาพที่** 1.9. เซต $S$ และส่วนประกอบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

**หมายเหตุ** เมื่อกล่าวโดยทั่วไป ให้ $S$ เป็นเซตในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ เราจะกล่าวถึงนิยามที่เกี่ยวข้องกับทอพอโลยีได้ดังต่อไปนี้

1. เรากล่าวว่า เซตของบรรดาจุด $\mathbf{P}$ อยู่ใกล้กับจุด $\mathbf{A}$ ด้วยระยะ $\delta$ เมื่อ $0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ เป็นบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\mathbf{A}$ รัศมี $\delta$
2. จุด $\mathbf{Q}$ เป็นจุดภายในของเซต $S$ (interior point) ถ้าสำหรับทุก ๆ จุดที่อยู่ใกล้ $\mathbf{Q}$ อยู่ในเซต $S$ กล่าวคือ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $N(\mathbf{Q};\delta) \subseteq S$
3. เซตของจุดภายใน (interior) ของเซต $S$ คือ สับเซตของ $S$ ที่บรรจุทุกจุด $\mathbf{Q}$ ที่เป็นจุดภายในของเซต $S$
4. เซต $S$ เรียกว่าเป็นเซตเปิด (open set) ถ้าทุก ๆ จุดใน $S$ เป็นจุดภายใน
5. จุด $\mathbf{P}$ ซึ่ง $\mathbf{P} \notin S$ เรียกว่า จุดภายนอก (exterior) ของ $S$ ถ้าทุกจุดที่อยู่ใกล้จุด $\mathbf{P}$ (ทุกจุดในบอลเปิด $B(\mathbf{P},\mathbf{r})$ สำหรับบาง $r > 0$) อยู่นอกเซต $S$

6. เซต $S$ เรียกว่าเป็นเซตปิด (closed set) ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้า $\mathbb{R}^n \backslash S$ เป็นเซตเปิด
7. จุดขอบ (boundary point) ของเซต $S$ คือจุดซึ่งไม่เป็นจุดภายในและจุดภายนอกของเซต $S$
   บรรดาจุดขอบทั้งหมดของเซต $S$ เรียกว่า ขอบ (boundary) ของเซต $S$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{Bdr}(S)$
8. ส่วนปกคลุม (closure) ของเซต $S$ แทนด้วย $\overline{S} = S \cup \mathrm{Bdr}(S)$
9. เซต $S$ มีขอบเขต (bounded) ถ้ามี $M > 0$ ซึ่ง $\|\mathbf{P}\| < M$ สำหรับทุก $\mathbf{P} \in S$
10. เซต $N$ ใด ๆ เรียกว่าเป็นย่านจุดเปิดของ $\mathbf{A}$ ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นจุดภายในของ $N$ จะได้ว่า
    - สำหรับบอลเปิดที่รวมจุด $\mathbf{A}$ เป็นย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$
    - แต่ละย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$ บรรจุเซตบอลเปิดที่รวมจุด $\mathbf{A}$
11. จุด $\mathbf{P}$ เรียกว่า จุดเกาะกลุ่ม (cluster point / limit point / accumulation point) ของเซต $S$ ถ้าทุก ๆ ย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{P}$ บรรจุจุดใน $S$

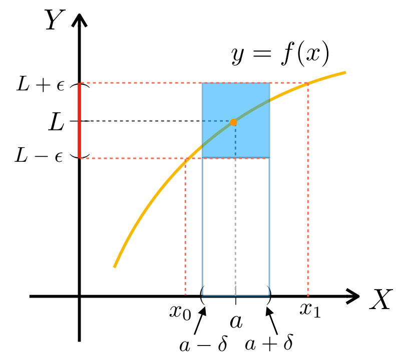
### 1.2.3 **นิยามและการพิสูจน์**

ดังที่กล่าวมาในมโนคติเบื้องต้นของลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว การกล่าวถึงลิมิต

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ที่กล่าวว่า $x$ เข้าใกล้ $a$ หรือ $f(x)$ เข้าใกล้ $L$ ปัญหาที่สำคัญคือ เข้าใกล้อย่างไร และอย่างไรจึงเรียกว่าใกล้

ดังนั้น เพื่อให้เกิดความรัดกุม เราจึงต้องนิยามลิมิตในความหมายของการเข้าใกล้ โดยใช้นิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ดังนี้




**ภาพที่** 1.10. ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

**บทนิยาม** 1.2.1 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก $x$ ในช่วงเปิดที่บรรจุ $a$ โดยที่ $f(x)$ อาจไม่นิยามที่ $a$ จะได้ว่า

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \epsilon$

เราสามารถพิจารณานิยามดังกล่าวได้จากภาพ 1.10

จากความหมายในทางทอพอโลยีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราจึงกล่าวได้ว่า ทุก ๆ จุด $x$ ในย่านจุดใกล้เคียงของ $a$ ด้วยระยะ $\delta$ จะต้องมีภาพ $f(x)$ ซึ่ง $f(x)$ อยู่ใกล้ $f(a) = L$ ภายในระยะ $\epsilon$ กล่าวคือ $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$

ดังนั้น เมื่อทำการขยายความคิดสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร เราก็จะสามารถนิยามได้ดังนี้

**บทนิยาม** 1.2.4 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชัน $n$ ตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$ จะเรียกว่า $L$ เป็นลิมิตของฟังก์ชัน $f$ เมื่อจุด $\mathbf{P}(x_1, ..., x_n)$ เข้าใกล้จุด $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\lim_{\mathbf{P} \to \mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ ก็ต่อเมื่อ

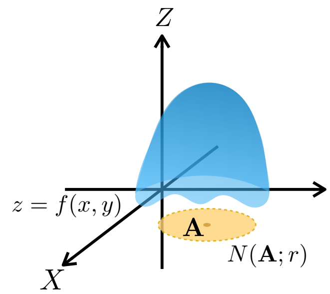
สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว $|f(\mathbf{P}) - L| < \epsilon$

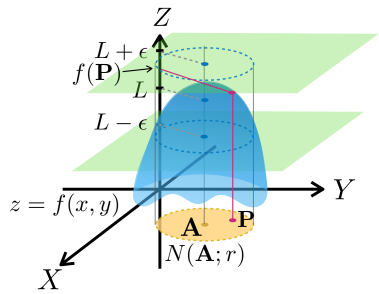
ในกระบวนวิชานี้ เราจะสนใจลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร จะเห็นว่า สำหรับจุด $\mathbf{P} = (x, y)$ และ $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$ เราสามารถเขียน $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ โดย

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

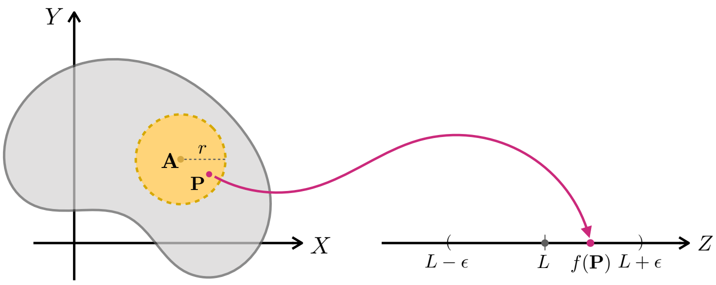
ซึ่งสำหรับกรณีพื้นผิว เราสามารถอธิบายได้ดังภาพที่ 1.11 และพิจารณาการส่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ในภาพที่ 1.12

เราจะมาพิจารณาตัวอย่างของการพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร ทั้งนี้ เนื่องจากการเขียนพิสูจน์ดังกล่าวเป็นการเขียนพิสูจน์ครั้งแรก ๆ ของผู้อ่าน ผู้เขียนจึงขอแยกตัวอย่างออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแนวคิด สำหรับเรียบเรียงภาพรวม และการพิสูจน์ ซึ่งเป็นการเรียบเรียงแนวคิด นำมาเขียนให้สมบูรณ์และกระชับ




**ภาพที่** 1.11. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร




**ภาพที่** 1.12. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร เมื่อพิจารณา
(ภาพซ้าย) บริเวณโดเมน $XY$ และ $N(\mathbf{A}; r)$
(ภาพขวา) จุด $\mathbf{P}$ ในบริเวณใกล้ ๆ $\mathbf{A}$ ถูกส่งไปยัง $f(\mathbf{P})$ โดยที่ $f(\mathbf{P})$ อยู่ในช่วง $(L - \epsilon, L + \epsilon)$

**ตัวอย่าง** 1.2.1 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (2x + y) = 1$

**แนวคิด** เพื่อที่จะแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (2x + y) = 1$ เราจะต้องแสดงว่า

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0\, [0 < \|(x, y) - (0, 1)\| < \delta \Rightarrow |(2x + y) - 1| < \epsilon]$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $\epsilon > 0$ ขั้นตอนที่สำคัญคือ หา $\delta$ ที่สอดคล้องกับสิ่งที่เราต้องการคือ $|(2x + y) - 1| < \epsilon$ เมื่อ $0 < \|(x, y) - (0, 1)\| < \delta$

ถ้าลองสมมติให้ $\|(x, y) - (0, 1)\| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta$ จะได้ว่า

$$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta$$
$$|y - 1| = \sqrt{(y - 1)^2} \le \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} < \delta$$

เราลองจัดรูปให้

$$|(2x + y) - 1| = |2x + (y - 1)| \le |2x| + |y - 1| = 2|x| + |y - 1|$$

เราพอจะเห็นว่า เราสามารถเลือก $\delta = \epsilon/3$ หรือ $\delta$ ใด ๆ ที่เล็กกว่า $\epsilon/3$ เพื่อทำให้

$$|(2x + y) - 1| \le 2|x| + |y - 1| < 3\delta = \epsilon$$

**พิสูจน์** ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/3 > 0$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,1)\| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta$ และ

$$
\begin{aligned}
|x| = \sqrt{x^2} &\le \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta \\
|y-1| = \sqrt{(y-1)^2} &\le \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|(2x+y)-1| &\le 2|x|+|y-1| \\
&< 2\delta+\delta \\
&= 3\delta = \epsilon
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(2x+y) = 1$ ตามต้องการ □

**หมายเหตุ** อสมการต่อไปนี้เป็นอสมการสำคัญที่อาจมีประโยชน์ในการพิสูจน์
ให้ $a_1, ..., a_n$ และ $b_1, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. **อสมการโคชี-ชวาร์ซ** (Cauchy-Schwarz inequality)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

2. **อสมการสามเหลี่ยม** (triangle inequality)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

3. **อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิค** (AM-GM-HM inequality)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

**ตัวอย่าง 1.2.2** จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y) = 5$

**แนวคิด** เพื่อที่จะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y) = 5$ เราจะต้องแสดงว่า

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0\left[0 < \|(x,y)-(1,2)\| < \delta \Rightarrow |(x^2+2y)-5| < \epsilon\right]$$

จะเห็นว่า หากพิจารณา $0 < \|(x,y)-(1,2)\| < \delta$ หรือความหมายเดียวกันกับ $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$ จะได้ว่า $|x-1| < \delta$ และ $|y-2| < \delta$ เช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ผ่านมา เราสามารถจัดพจน์เพื่อให้อยู่ในรูปที่มีอยู่แล้ว คือ

$$
\begin{aligned}
|(x^2+2y)-5| &= |(x^2-1)+(2y-4)| \\
&\le |x^2-1|+2|y-2| = |x+1||x-1|+2|y-2|
\end{aligned}
$$

เราเกือบพร้อมที่จะพิสูจน์แล้ว เหลือเพียงการพิจารณาพจน์ $|x+1|$
เนื่องจาก $|x-1|<\delta$ หากเราเลือก $\delta=1$ จะพบว่า $|x+1|<3$ และ

$$|(x^2+2y)-5|<3\delta+2\delta=5\delta$$

ดังนั้น ในการเลือก $\delta$ ในการพิสูจน์ เราจึงจะเลือก $\delta=\epsilon/5$ หรือ $1$ ตัวใดก็ได้ที่น้อยกว่า ดังนั้น จึงเลือก $\delta=\min\{1,\epsilon/5\}$ เพื่อให้

$$|(x^2+2y)-5|<3\delta+2\delta=5\delta=\epsilon$$

จากแนวคิดดังกล่าว เราสามารถเขียนพิสูจน์ให้กระชับได้ดังนี้

**พิสูจน์** ให้ $\epsilon>0$ เลือก $\delta=\min\{1,\epsilon/5\}>0$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(1,2)\|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ และ

$$\begin{aligned}|x-1|&=\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta\\|y-2|&=\sqrt{(y-2)^2}\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|(x^2+2y)-5|&=|(x^2-1)+(2y-4)|\\&\leq|x^2-1|+2|y-2|\\&=|x+1||x-1|+2|y-2|\\&<3\delta+2\delta=5\delta=\epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y)=5$ ตามต้องการ □

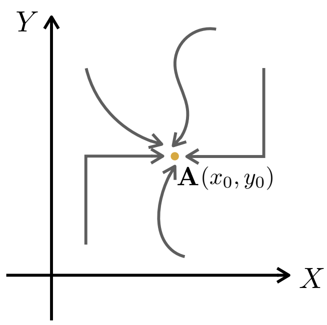
**ลิมิตทำซ้ำ และลิมิตตามเส้น**

จากภาพของลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว การเข้าใกล้ของ $x$ สู่ $a$ สามารถพิจารณาการเข้าใกล้ได้สองทิศทางดังที่กล่าวมาข้างต้น และการที่ลิมิตของ $f$ หาค่าได้ ค่าของลิมิตที่เข้าใกล้ในทิศทางทั้งสองจะต้องเท่ากันด้วย

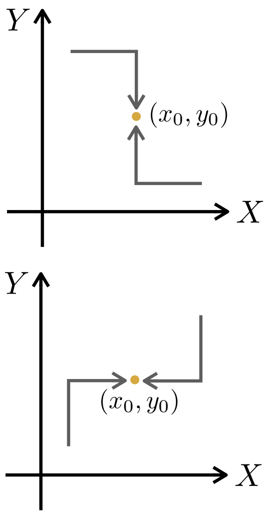
ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยพิจารณาลิมิตของ $f$ ที่ $x$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ $a$ ทั้งสองทิศทาง ($x\to a$) เราเคยกล่าวว่า ลิมิตของ $f$ ที่ $x$ เมื่อ $x\to a$ หาค่าไม่ได้ ถ้าลิมิตของ $f$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ $a$ ฝั่งใดฝั่งหนึ่ง ($x\to a^+$ หรือ $x\to a^-$) หรือทั้งสองฝั่งหาค่าไม่ได้ (เช่น มีค่าเป็นอนันต์) หรือลิมิตทั้งสองฝั่งหาค่าได้แต่มีค่าไม่เท่ากัน

ในกรณีของฟังก์ชันหลายตัวแปร จากนิยามของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะเห็นว่า แต่ละจุด $\mathbf{P}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ ซึ่งสอดคล้องกับ $\|\mathbf{P}-\mathbf{A}\|<\delta$ มีความหมายว่า จุด $\mathbf{P}$ วิ่งเข้าหา $\mathbf{A}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ จะเห็นว่า การวิ่งเข้าสู่จุด $\mathbf{A}$ สามารถเป็นไปได้หลายทิศทาง ดังภาพ 1.13

ดังนั้น หากพิจารณาแล้วพบว่า ในทุก ๆ เส้นทางจาก $\mathbf{P}$ ไปยัง $\mathbf{A}$ ค่าของลิมิตมีค่าเท่ากัน เราจึงจะสามารถสรุปได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันที่จุด $\mathbf{A}$ หาค่าได้ สอดคล้องดังทฤษฎีบทต่อไปนี้




**ภาพที่** 1.13. เส้นทางของจุด $\mathbf{P}$ ที่เข้าหาจุด $\mathbf{A}$ ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร




**ภาพที่ 1.14.** (บน) ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1 (ล่าง) ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2

**ทฤษฎีบท 1.2.3** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร

1. ถ้า $f(x,y) \to L$ เมื่อ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ แล้ว $f(x,y) \to L$ เมื่อ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ สำหรับทุก ๆ เส้นโค้งเรียบใด ๆ
2. ถ้าลิมิตของ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ สำหรับบางเส้นโค้ง หรือ $f(x,y)$ มีค่าลิมิตที่แตกต่างกันเมื่อ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ สำหรับสองเส้นโค้งที่ต่างกันแล้ว ลิมิตของ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $(x,y) \to (x_0,y_0)$

เราเริ่มต้นพิจารณาเส้นทางที่ง่ายที่สุด คือทิศทางที่จากจุด $\mathbf{P}$ ไปยังจุด $\mathbf{A}$ ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน $X$ และ $Y$ ก่อน การพิจารณาเส้นทางของลิมิตดังกล่าวนี้จะเรียกว่า **ลิมิตทำซ้ำ** (Iterated limit) โดยลิมิตทำซ้ำ มีสองลักษณะ ซึ่งสอดคล้องดังภาพ 1.14 ดังนี้

**แบบที่ 1** ลิมิตของฟังก์ชัน $f$ เมื่อให้ $x \to x_0$ ก่อน ขณะที่ $y$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากนั้นจึงให้ $y \to y_0$ เขียนแทนด้วย $\displaystyle\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$

**แบบที่ 2** ลิมิตของฟังก์ชัน $f$ เมื่อให้ $y \to y_0$ ก่อน ขณะที่ $x$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากนั้นจึงให้ $x \to x_0$ เขียนแทนด้วย $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$

จะเห็นว่า หากลิมิตทำซ้ำทั้งสองทางหาค่าได้ และไม่เท่ากัน กล่าวคือ

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_1 \neq L_2 \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 เราสามารถสรุปได้ว่า ลิมิต $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

อย่างไรก็ตาม หากลิมิตทำซ้ำทั้งสองทางมีค่าเท่ากัน กล่าวคือ

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

หากยังไม่ได้ทำการพิสูจน์ เราก็**ยังสรุปไม่ได้**ว่า ลิมิตจะมีค่าเท่ากับ $L$ เนื่องจาก อาจมีเส้นทางบางเส้นทางที่ทำให้ลิมิตจากเส้นทางหนึ่งไม่เท่ากัน

**ตัวอย่าง 1.2.4** กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{5x-2y}{x+2y}$ โดยที่ $(x,y) \neq (0,0)$ จงหาค่าของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ถ้ามี)

**พิสูจน์** เราเริ่มพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ กล่าวคือ

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1:</u> $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{5x-2y}{x+2y}\right] = \lim_{y\to 0}[-1] = -1$

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{5x-2y}{x+2y}\right] = \lim_{x\to 0}[5] = 5$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{5x-2y}{x+2y}\right] = -1 \neq 5 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{5x-2y}{x+2y}\right]$

จึงได้ว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ □

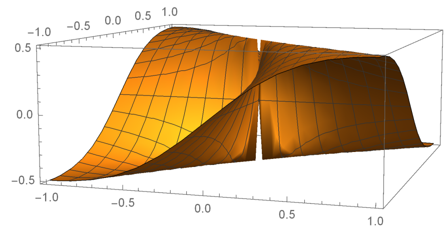
เนื่องจากเส้นโค้งในระนาบ $XY$ สามารถเขียนได้ในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริมหนึ่งตัวแปร ดังนั้น เราจึงสามารถพิจารณา ลิมิตจากจุด $(x, y)$ ที่เข้าสู่จุด $(x_0, y_0)$ ตามเส้นทางอื่น ๆ ที่นิยามโดยสมการอิงตัวแปรเสริมได้ โดยจะนิยามลิมิตตามเส้น (limit along curves) ได้ดังนี้

**บทนิยาม 1.2.5** ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), y = y(t)$$

และถ้า $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ แล้ว **ลิมิตตามเส้น** $C$ (limit along curve $C$) นิยามโดย

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (\text{ตามเส้น } C)}} f(x, y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$$




**ภาพที่** 1.15. พื้นผิวของ $f(x, y) = -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 ถึงแม้ว่าลิมิตทำซ้ำจะเท่ากัน แต่หากเราพบว่า มีเส้นทางบางเส้นทางที่เข้าสู่จุด $(x_0, y_0)$ ที่ทำให้ค่าของลิมิตไม่เท่ากันแล้ว เราก็สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.2.5** กำหนดให้ $f(x, y) = -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ โดยที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ (ถ้ามี)

**พิสูจน์** ก่อนอื่น เราพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ กล่าวคือ

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right] = \lim_{y\to 0} [0] = 0$

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right] = \lim_{x\to 0} [0] = 0$

จะเห็นว่า

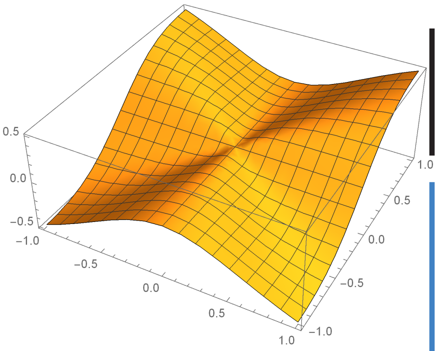
$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} -\frac{xy}{x^2 + y^2}\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} -\frac{xy}{x^2 + y^2}\right]$$

อย่างไรก็ตาม เราต้องพิจารณาตามเส้นอื่น ๆ โดยใช้ลิมิตตามเส้น
เมื่อเลือกแนวเส้นตรง $y = x$ จะเห็นว่า เมื่อ $x \to 0$ แล้ว $y \to 0$ ดังนั้นเราจะพิจารณา

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} -\frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ □

**หมายเหตุ** จะเห็นว่าในตัวอย่าง 1.2.5 การกำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม เรากำหนดว่า ถ้าให้ $x = t$ แล้ว $y = t$ ในกรณีที่มีการกำหนดให้ตัวแปร $x$ หรือ $y$ ตัวใดตัวหนึ่งเป็น $t$ เราอาจกำหนดให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรหลัก และอีกตัวแปรเป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรหลักนั้นตามการเขียนในตัวอย่าง 1.2.5 ได้




**ภาพที่** 1.16. พื้นผิวของ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

**ตัวอย่าง** 1.2.6 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
จงหาและพิสูจน์ค่าของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ถ้ามี)

**พิสูจน์** เราเริ่มต้นจากการพิจารณาลิมิตทำซ้ำ

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}[0] = 0$

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}[0] = 0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right]$$

ต่อไป เราจะพิจารณาเส้นทางต่าง ๆ โดยเลือกเส้นทางที่ผ่านจุด $(0,0)$ เริ่มต้นจึงเลือก $y = x$ ได้ว่า เมื่อ $x \to 0$ แล้ว $y \to 0$ นั่นคือ

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=x)}}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^2} = 0$$

ทำการเลือกเส้นทางอื่น ๆ อีก เช่น เลือก $y = x^2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=x^2)}}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2(1+x^2)} = 0$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือกเส้นทางใดในที่นี้ ก็จะได้ค่าของลิมิตเท่ากับ $0$ เราจึงคาดเดาว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

**แนวคิด** เราจะแสดงว่า

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0\left[0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon\right]$$

เราพบว่า $|x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ $|y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และเราทราบว่า $x^2+y^2 \ge x^2$ โดยสิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$
ถ้าเราจัดรูป $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right||y|$ ก็จะพบว่า เราจะเลือก $\delta = \epsilon$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ

$$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$
$$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

จะได้ว่า

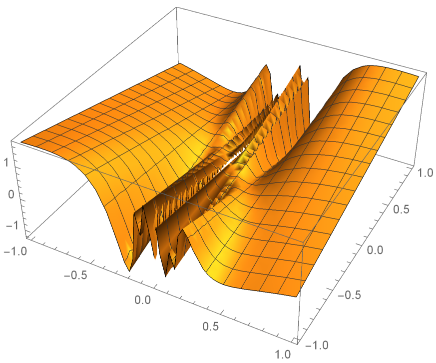
$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| &= \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \\ &= \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||y| \\ &\le |y| \\ &< \delta = \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ ตามต้องการ □

**หมายเหตุ** ถ้าลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าได้ อาจเกิดเหตุการณ์ที่ลิมิตทำซ้ำ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]$ หรือ $\lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ หาค่าไม่ได้ ทั้งนี้ เราจะพิจารณาเหตุการณ์ดังกล่าวนี้ในแบบฝึกหัดที่ 1.2 ข้อที่ 7

**ตัวอย่าง 1.2.7** จงหาและพิสูจน์ค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนด

$$f(x,y) = \begin{cases}(x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$$




**ภาพ ที่ 1.17.** พื้นผิวของ $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.2.7

**แนวคิด** จะเห็นว่า เราสามารถแบ่งกรณีได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ $x=0$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$

กรณีที่ $x\neq 0$ หากพิจารณาลิมิตตามเส้น $y=x$ จะพบว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\text{ตามเส้น } y=x)}} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

และเมื่อลองพิจารณาเส้นทางอื่น ๆ เช่น $y=x^n$ จะพบเช่นกันว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\text{ตามเส้น } y=x^n)}} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x+x^n)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

จึงคาดเดาว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

สำหรับการพิสูจน์ในข้อนี้ จะต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ เมื่อ $x=0$ และ $x\neq 0$ โดยเราจะต้องเลือก $\delta$ ที่สอดคล้องทั้งสองกรณี

ในกรณีที่ $x\neq 0$ เราพบว่า $\left|(x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = |x+y|\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ โดยใช้อสมการสามเหลี่ยม และความรู้ที่ว่า $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \le 1$ จึงจะเลือก $\delta = \epsilon/2$

**พิสูจน์** ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/2$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$
$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

กรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$|f(x,y)-0| = |0-0| < \epsilon$$

กรณีที่ $x \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| &= |x+y|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq |x|+|y| \\ &< \delta+\delta = 2\delta = \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ตามต้องการ $\square$

ถ้า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $S$ เราสามารถพิจารณาพีชคณิตของฟังก์ชัน $f \pm g, fg, f/g$ บน $S$ โดย

$$\begin{aligned}(f+g)(x,y) &= f(x,y)+g(x,y) \\ (f-g)(x,y) &= f(x,y)-g(x,y) \\ (f\cdot g)(x,y) &= f(x,y)\cdot g(x,y) \\ (f/g)(x,y) &= f(x,y)/g(x,y) \text{ เมื่อ } g(x,y)\neq 0 \text{ สำหรับ } (x,y)\in N\end{aligned}$$

เราสามารถพิจารณาทฤษฎีบทของลิมิตได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 1.2.8** ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ที่นิยามบนย่านจุดเปิด $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ โดยที่ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ และ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} g(\mathbf{P}) = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P}) = L + M$
2. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) - g(\mathbf{P}) = L - M$
3. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} cf(\mathbf{P}) = cL$ เมื่อ $c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ
4. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) \cdot g(\mathbf{P}) = L \cdot M$
5. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})/g(\mathbf{P}) = L/M$ เมื่อ $M \neq 0$

**พิสูจน์** เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ในข้อ 1. สำหรับข้ออื่น ๆ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด
เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P}) = L + M$
ให้ $\epsilon > 0$
สมมติให้ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ และ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} g(\mathbf{P}) = M$

จะได้ว่า มี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|f(\mathbf{P}) - L| < \epsilon/2$ เมื่อ $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta_1$
และมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $|g(\mathbf{P}) - M)| < \epsilon/2$ เมื่อ $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta_2$

**แนวคิด** เราจะต้องแสดงว่า ถ้าให้ $\epsilon > 0$ จะเลือก $\delta > 0$ ซึ่ง
ถ้า $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว $|(f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P})) - (L + M)| < \epsilon$
เราพิจารณาว่า

$$|(f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P})) - (L + M)| \leq |f(\mathbf{P}) - L| + |g(\mathbf{P}) - M|$$

ซึ่งการเลือก $\delta$ ครั้งนี้ ขึ้นอยู่กับการเลือก $\delta_1, \delta_2$ ตัวเดิมของลิมิตของฟังก์ชัน $f(\mathbf{P})$ และ $g(\mathbf{P})$ ว่าตัวใดน้อยกว่ากัน จึงเลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ด้วยเหตุนี้ เราจึงกำหนดให้ $|f(\mathbf{P} - L)| < \epsilon/2$ และ $|g(\mathbf{P} - M)| < \epsilon/2$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ซึ่งสำหรับ $0 < \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned}|(f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P})) - (L + M)| &\leq |f(\mathbf{P}) - L| + |g(\mathbf{P}) - M| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

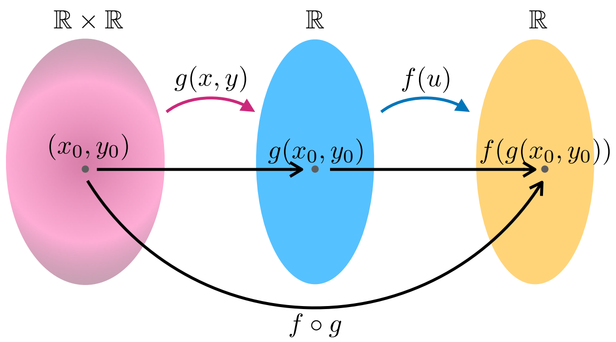
นั่นคือ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) + g(\mathbf{P}) = L + M$ □

**ตัวอย่าง 1.2.9** จงใช้ทฤษฎีลิมิตหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} (5x^3y^2 - 9)$

**วิธีทำ** โดยทฤษฎีลิมิต จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,4)} (5x^3y^2 - 9) &= \lim_{(x,y)\to(1,4)} 5x^3y^2 - \lim_{(x,y)\to(1,4)} 9 \\ &= 5\left(\lim_{(x,y)\to(1,4)} x^3\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,4)} y^2\right) - \left(\lim_{(x,y)\to(1,4)} 9\right) \\ &= 5(1)^3(4)^2 - 9 = 71\end{aligned}$$

ในกรณีที่เรามีฟังก์ชัน $f$ ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว และมี $g$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร เราพิจารณาการประกอบของฟังก์ชัน $f \circ g$ ได้ ดังแผนภาพ 1.18 ทำให้เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้




**ภาพที่** 1.18. การประกอบฟังก์ชันสองตัวแปร กับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

**ทฤษฎีบท** 1.2.10 ให้ $g$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร ซึ่ง $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = c$ และถ้าฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว $f$ ต่อเนื่องที่จุด $c$ แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f \circ g(x,y) = f(c)$$

กล่าวคือ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f \circ g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right)$$

**แนวคิด** เราจะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ แต่จะให้แนวคิดแก่ผู้อ่านสำหรับการพิสูจน์ ดังนี้ สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in A$
ฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว $f$ มีความต่อเนื่องที่ $c$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งถ้าทุกจุดใน $A$ ที่สอดคล้องกับ $|x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(c)| < \epsilon$

จะเห็นว่า การพิสูจน์ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน มีเค้าโครงการพิสูจน์คล้ายกันกับการพิสูจน์ลิมิต ซึ่งจะเห็นว่า เราจะเลือก $\delta$ จากการที่ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = c$ เพื่อแสดงให้ได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f \circ g(x,y) = f(c)$

ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ มีประโยชน์สำหรับการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรที่ถูกประกอบกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** 1.2.11 จงหาลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1 + x^2y^3)$

**วิธีทำ** เราสามารถมองได้ว่า $f(u) = \ln u$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมน กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ และ $g(x,y) = 1 + x^2y^3$ โดยที่ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2y^3) = 1$

โดยทฤษฎีบท 1.2.10 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1 + x^2y^3) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f \circ g(x,y) \\
&= \ln(\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2y^3)) \\
&= \ln 1 = 0
\end{aligned}$$

# แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงแสดงว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้หาค่าไม่ได้

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x^2 - y^2)^2}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y - x}{y + x} \cdot \dfrac{1 + x}{1 + y}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ (คำใบ้: พิจารณาเส้น $y = x - mx^3$)

2. จงใช้นิยามของลิมิตแสดงว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้หาค่าได้

   (a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} 3xy$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{\sqrt{2x^2+3y^2}}$ $;(x,y) \neq (0,0)$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ $;(x,y) \neq (0,0)$

3. จงใช้ลิมิตทำซ้ำตรวจสอบการหาค่าได้ของลิมิต $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ ทั้งนี้ หากลิมิตหาค่าได้ ให้พิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันนั้นด้วย

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^4}$

> **ทฤษฎีบท** 1.2.12 (ทฤษฎีบทบีบอัด : Squeeze Theorem) ถ้า $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ สำหรับทุก $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ ในย่านจุดเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(x_0,y_0)$ และถ้า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ แล้ว $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

4. จงหาค่าของลิมิต $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนด
$$f(x,y) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2}$$
(คำใบ้ : ใช้ Squeeze Theorem พิจารณาการลู่เข้าของ $|\ln x|$)

5. เมื่อทราบว่า $2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} \leq 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} \leq 2|xy|$ แล้ว จงหาค่าของลิมิต
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$
(คำใบ้ : ใช้ Squeeze Theorem และแบ่งกรณีเมื่อ $xy > 0$ และ $xy < 0$)

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2.8 ข้อ 2 - 5

7. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีลิมิตที่จุดกำเนิด $(0,0)$ แต่ลิมิตทำซ้ำที่ $(0,0)$ หาค่าไม่ได้
$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) + y\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,xy \neq 0 \\ 0 & ,xy = 0 \end{cases}$$

8. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีลิมิตทำซ้ำที่จุดกำเนิด $(0,0)$ แต่ไม่มีลิมิตที่จุด $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & ,xy\neq 0\\ 0 & ,xy=0\end{cases}$$

9. จงแสดงว่า สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]$ หาค่าไม่ได้ แต่ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ และ $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$ หาค่าได้

$$f(x,y)=\begin{cases}y+x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & ,y\neq 0\\ 0 & ,y=0\end{cases}$$

10. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีลิมิต และการประกอบของฟังก์ชันตัวแปรเดียวกับฟังก์ชันหลายตัวแปร

(a) $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy^3}{x+2y}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln(1+x^2y^3)$

(c) $\lim_{(x,y)\to(1/4,\pi)} (xy^2\sin xy)$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+2\sqrt{x}-y+2\sqrt{y}}$ เมื่อ $x\neq y$

(e) $\lim_{(x,y)\to(4,3)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$ เมื่อ $x\neq y+1$

(f) $\lim_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

## 1.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร

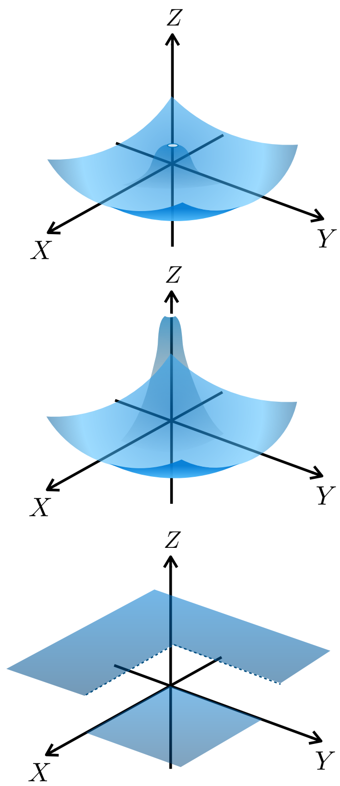
สมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันคือ สมบัติเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (continuity of a function) สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะสามารถพิจารณาความต่อเนื่องได้ในทำนองคล้ายกันกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียวได้ ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 1.3.1 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P}\in\mathbb{R}^n$ ที่กำหนดตามโดเมน ฟังก์ชัน $f$ มีความต่อเนื่อง (continuity) ที่จุด $\mathbf{P}=\mathbf{A}\in\mathbb{R}^n$ ถ้า $f$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(\mathbf{A})$ หาค่าได้
2. $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})$ หาค่าได้
3. $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})=f(\mathbf{A})$

จากนิยามดังกล่าว เราสามารถกล่าวได้โดยมุมมองของนิยามแบบ $\delta-\epsilon$ ได้ว่า

ฟังก์ชัน $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$ บนโดเมนของฟังก์ชัน ถ้าสำหรับทุก $\epsilon>0$ มีย่านจุดเปิด $N(\mathbf{A};\delta)$ ของ $\mathbf{A}$ ที่ทำให้ $|f(\mathbf{P})-f(\mathbf{A})|<\epsilon$ สำหรับทุก $\mathbf{P}\in N(\mathbf{A};\delta)$




**ภาพที่** 1.19. ตัวอย่างของความไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ แบบต่างๆ
(ภาพบน) ฟังก์ชันไม่นิยามที่จุด $(0,0)$ เกิดความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด
(ภาพกลาง) ค่าของฟังก์ชันเป็นอนันต์ที่จุด $(0,0)$
(ภาพล่าง) ฟังก์ชัน มี การก ระ โดด แนว ตั้ง (vertical jump) ที่จุด $(0,0)$

ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ที่จุด $\mathbf{A}$ ทั้งนี้ ตัวอย่างของความต่อเนื่องแบบต่าง ๆ แสดงในภาพที่ 1.19

**ตัวอย่าง** 1.3.1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x,y) = 2x+y$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,1)$

**พิสูจน์** จะเห็นว่า $f(0,1) = 1$ และเนื่องจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(2x+y) = 1$ จากตัวอย่าง 1.2.8

ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(2x+y) = 1 = f(0,1)$

นั่นคือ $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,1)$ $\square$

เราสามารถพิสูจน์ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบางชนิด รวมถึงฟังก์ชันที่สร้างจากฟังก์ชันอื่น ๆ ที่มีความต่อเนื่อง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ โดยเว้นให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

**ทฤษฎีบท** 1.3.2 .

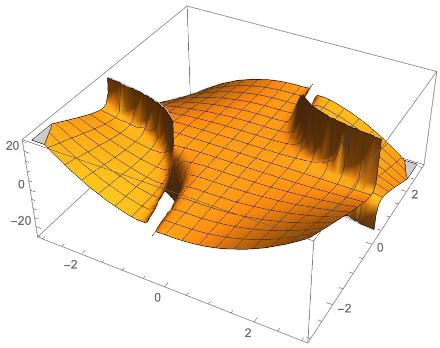
1. ฟังก์ชันพหุนามที่มี $n$ ตัวแปร มีความต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}^n$
2. ฟังก์ชันตรรกยะ มีความต่อเนื่องทุก ๆ จุดในโดเมนของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง** 1.3.3 จงหาลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(-1,2)$ โดยนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2+(2)^2} = -\frac{2}{5}$$

**ตัวอย่าง** 1.3.4 ฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{1-xy}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ มีความต่อเนื่องทุกจุดยกเว้นบริเวณที่ $xy = 1$



**ภาพที่** 1.20. พื้นผิวของ $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{1-xy}$

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ที่มีความต่อเนื่อง จากฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องได้ โดยให้ผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

**ทฤษฎีบท** 1.3.5 ถ้า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ แล้ว

1. $f \pm g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $A$
2. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $A$
3. $f/g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $A$ โดยที่ $g(\mathbf{A}) \neq 0$

**ตัวอย่าง 1.3.6** จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**พิสูจน์** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(0,0)=0$ เราจึงพิจารณาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ โดยเริ่มต้น เราจะพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]=\lim\limits_{y\to 0}[-1]=-1$

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}[1]=1$

ดังนั้นจะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ $f$ ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ □

**ตัวอย่าง 1.3.7** จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่จุด $(1,2)$ หรือไม่

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+2y & ,(x,y)\neq(1,2)\\ 0 & ,(x,y)=(1,2)\end{cases}$$

**พิสูจน์** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(1,2)=0$
และ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=5$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=5\neq 0=f(1,2)$

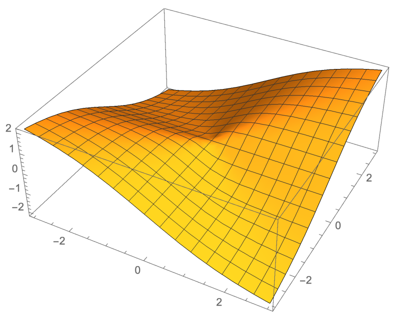
นั่นคือ $f$ ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(1,2)$ □

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 1.3.7 หากเรานิยามให้ $f(1,2)=5$ จึงจะทำให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับฟังก์ชันลักษณะนี้ มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด (removable discontinuity)

**หมายเหตุ** ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด (removable discontinuity) ที่ $(x_0,y_0)$ ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าได้ แต่ $f$ ไม่ต่อเนื่อง เนื่องจาก $f$ ไม่นิยามที่จุด $(x_0,y_0)$ หรือ $f(x_0,y_0)$ มีค่าต่างจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

**ตัวอย่าง 1.3.8** จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$




**ภาพที่ 1.21.** พื้นผิวของฟังก์ชันในตัวอย่าง 1.3.8

**พิสูจน์** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(0,0)=0$
ต่อไป เราจะพิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

เราเริ่มต้นจากการพิจารณาลิมิตทำซ้ำ

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1:</u> $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=\lim\limits_{y\to 0}[0]=0$

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=\lim\limits_{x\to 0}[0]=0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=0=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

ต่อไป เราจะพิจารณาเส้นทางต่าง ๆ โดยเลือกเส้นทางที่ผ่านจุด $(0,0)$ เริ่มต้นจึงเลือก $y=mx$ สำหรับจำนวนจริง $m$ ใด ๆ ได้ว่า เมื่อ $x\to 0$ แล้ว $y\to 0$ นั่นคือ

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=mx)}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}=0$$

ทำการเลือกเส้นทางอื่น ๆ อีก เช่น เลือก $y=mx^2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=mx^2)}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{\sqrt{x^2(1+m^2x^2)}}=0$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือกเส้นทางใดในที่นี้ ก็จะได้ค่าของลิมิตเท่ากับ $0$ เราจึงคาดเดาว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

ให้ $\epsilon>0$ เลือก $\delta=\epsilon>0$

ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ และ

$$|x|=\sqrt{x^2}\ \le\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta$$
$$|y|=\sqrt{y^2}\ \le\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| &= \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\\ &= \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right||y|\\ &\le |y|\\ &< \delta=\epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$
จึงได้ว่า $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ $\square$

# แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x-y} & ,x \neq y \\ 0 & ,x = y \end{cases}$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^3+y^3} & ,x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,x = y = 0 \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} 2xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & ,(x,y) = (2y,y) \\ \mathrm{e}^{|x-2y|/|(x^2-4xy+4y^2)} & ,(x,y) \neq (2y,y) \end{cases}$

4. ให้ฟังก์ชัน $f(x,y) = |x|(1+y)$ จงแสดงว่า $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

5. ให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x_0$ และ $h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $y_0$ แล้วจงแสดงว่า $f(x,y) = g(x)h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$

   (คำใบ้: ใช้นิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ในการพิสูจน์)

6. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f$ ที่กำหนดโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy & ,(x,y) \neq (2,3) \\ 6 & ,(x,y) = (2,3) \end{cases}$$

   มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด พร้อมทั้งนิยามค่าของฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่อง

7. สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้ เราสามารถนิยามค่าของฟังก์ชันที่จุด $(0,0)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = |x|^y$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

## 1.4 อนุพันธ์ย่อย

ถ้า $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร เราสนใจการศึกษาว่า $z$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ $x$ เปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ $y$ ถูกตรึงให้คงที่ และเมื่อ $y$ เปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ $x$ ถูกตรึงให้คงที่ การศึกษาการเปลี่ยนแปลงในลักษณะดังกล่าว คล้ายคลึงกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว และจะเรียกว่า อนุพันธ์ย่อย (partial derivative)

**บทนิยาม** 1.4.1 ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรแล้ว

1. อนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบกับ $x$ เขียนแทนด้วย $f_x$, $\partial f/\partial x$, $D_x f(x,y)$ หรือ $f_x(x,y)$ นิยามโดย

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

2. อนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบกับ $y$ เขียนแทนด้วย $f_y$ หรือ $\partial f/\partial y$, $D_y f(x,y)$ หรือ $f_y(x,y)$ นิยามโดย

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

ถ้าลิมิตดังกล่าวหาค่าได้

อนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0)$ ในโดเมนของ $f$ เขียนแทนด้วย

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, D_x f(x_0,y_0) \quad \text{หรือ } f_x(x_0,y_0)$$

และทำนองเดียวกัน

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, D_y f(x_0,y_0) \quad \text{หรือ } f_y(x_0,y_0)$$

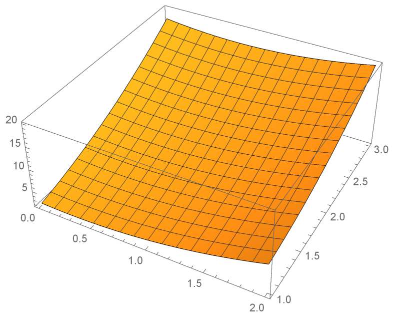
ดังนั้น จะได้ว่า อนุพันธ์ย่อยของ $f$ ที่จุด $(x_0,y_0)$ สามารถพิจารณาได้โดย

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ f_y(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

และถ้าให้ $\Delta x = x - x_0$ และ $\Delta y = y - y_0$ เราจะได้ว่า

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$



**ภาพที่** 1.22. พื้นผิวของฟังก์ชันในตัวอย่าง $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$

**ตัวอย่าง 1.4.1** กำหนด $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$ และหา $f_x(1, 2), f_y(1, 2)$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์ย่อย

**วิธีทำ** ก่อนอื่น จะหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $x$ และ $y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2(x + \Delta x)^2 - y(x + \Delta x) + 2y^2\right) - (2x^2 - xy + 2y^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x - y \\
&= 4x - y
\end{aligned}$$

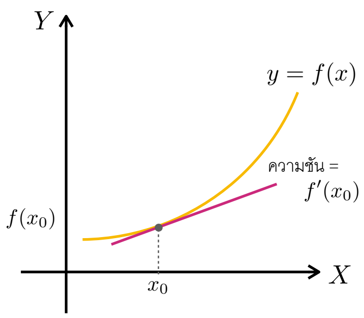
และทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
f_y(x, y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left(2x^2 - x(y + \Delta x) + 2(y + \Delta y)^2\right) - (2x^2 - xy + 2y^2)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} -x + 4y + 2\Delta y \\
&= -x + 4y
\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $f_x(1, 2) = 4(1) - 2 = 2$ และ $f_y(1, 2) = -1 + 4(2) = 7$

**หมายเหตุ** ในตัวอย่างดังกล่าว เราอาจเลือกใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ที่จุดดังกล่าวได้เช่นเดียวกัน โดยให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

### 1.4.1 ความหมายของอนุพันธ์ในทางเรขาคณิต

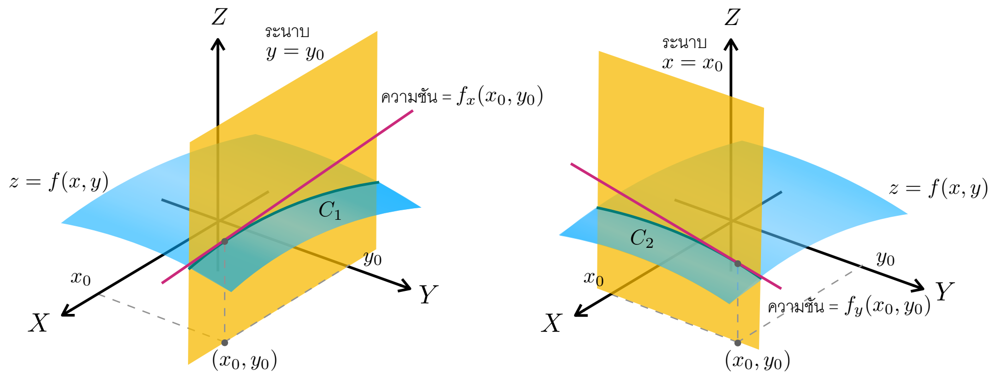



**ภาพที่** 1.23. ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $f$ ที่จุด $x_0$

สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ ความหมายของอนุพันธ์ $f'(x_0)$ คือ การเปลี่ยนของ $y$ เทียบกับ $x$ ที่จุด $x_0$ ซึ่งมีความหมายทางเรขาคณิตคือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $f$ ณ จุด $x_0$ ดังแสดงในภาพที่ 1.23

จากนิยามของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ เราสามารถพิจารณาได้ว่า $f_x(x_0, y_0)$ คือ ความชันของเส้นโค้ง $C_1$ ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y = y_0$ และพื้นผิว $z = f(x, y)$ ณ ตำแหน่งที่ $x = x_0$ นั่นคือ $f_x(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $z$ ตามเส้นโค้ง $C_1$ และทำนองเดียวกัน $f_y(x_0, y_0)$ คือการพิจารณาความชันของเส้นโค้ง $C_2$ ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $x = x_0$ และพื้นผิว $z = f(x, y)$ ณ ตำแหน่งที่ $y = y_0$ นั่นคือ $f_y(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $z$ ตามเส้นโค้ง $C_2$ ดังแสดงในภาพที่ 1.24

กล่าวโดยสรุป คือ $f_x(x_0, y_0)$ คืออัตราการการเปลี่ยนแปลงของ $z$ เมื่อเทียบกับ $x$ ตามเส้นโค้ง $C_1$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ คืออัตราการการเปลี่ยนแปลงของ $z$ เมื่อเทียบกับ $y$ ตามเส้นโค้ง $C_2$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ นั่นเอง




**ภาพที่** 1.24. ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ (ภาพซ้าย) $f_x(x_0, y_0)$ (ภาพขวา) $f_y(x_0, y_0)$

จากความหมายในทางเรขาคณิตดังกล่าว ทำให้เราสามารถใช้สูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว มาช่วยในการหาอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ การหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ เราให้ตัวแปร $y$ คงที่ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร $x$ และในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ย่อย $f_y(x, y)$ เราให้ตัวแปร $x$ คงที่ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร $y$

**ตัวอย่าง** 1.4.2 กำหนด $f(x, y) = x^3y^5 + e^{xy}\sin(x + 2y)$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$

**วิธีทำ** จากสูตรของการหาอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2y^5 + (e^{xy}\cos(x + 2y) + y\sin(x + 2y)e^{xy}) \\ f_y(x, y) &= 5x^3y^4 + (2e^{xy}\cos(x + 2y) + x\sin(x + 2y)e^{xy}) \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง** 1.4.3 กำหนดพื้นผิว $f(x, y) = x^3y + 5y^3$ จงหาความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ในทิศทางของ $x$ ที่จุด $(-1, 2)$

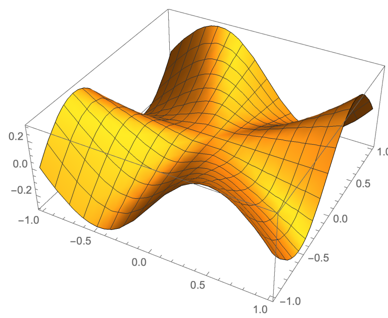
**วิธีทำ** ความหมายของการหาความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ในทิศทางของ $x$ คือการหา $f_x(x, y)$ ที่จุด $(-1, 2)$ นั่นคือ $f_x(x, y) = 3x^2y$ ดังนั้น $f_x(-1, 2) = 6$

กล่าวคือ $z$ เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 6 หน่วย ต่อหนึ่งหน่วยการเพิ่มขึ้นของ $x$

**ตัวอย่าง** 1.4.4 ให้ฟังก์ชัน $f$ นิยามโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_x(0, y)$, $f_y(x, 0)$




**ภาพที่** 1.25. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.4.4

**วิธีทำ** จะเห็นว่า ในกรณีที่ $(x, y) \neq (0, 0)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y\left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] \\ f_y(x, y) &= x\left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] \end{aligned}$$

ต่อไป เราจะพิจารณา $f_x(0, y)$ ในกรณีนี้จะเห็นว่า เราต้องแบ่งกรณีออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ $y \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y \end{aligned}$$

กรณีที่ $y = 0$ จะได้ว่า

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f_x(0,y) = \begin{cases} -y & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$f_y(x,0) = \begin{cases} x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

### 1.4.2 อนุพันธ์ย่อยในมิติที่สูงขึ้น

ในกรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร เราสามารถวางนัยทั่วไปนิยามของอนุพันธ์ย่อยได้

ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ เขียนแทนด้วย $f = f(x_1, ..., x_n)$ อนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบกับตัวแปร $x_k$ นิยามโดย

$$f_{x_k}(\mathbf{P}) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n) - f(\mathbf{P})}{\Delta x_k}$$

การหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้สูตร ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

**ตัวอย่าง** 1.4.5 กำหนด $f(x,y,z) = x^3y^4z^5 + 3xy + 4z$
จงหา $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$, $f_z(-1,1,0)$

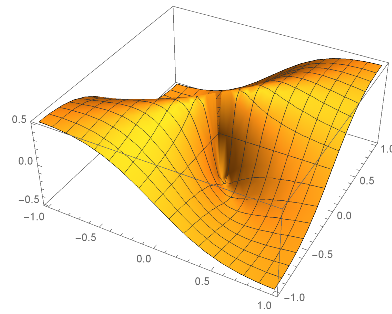
**วิธีทำ** จากสูตรของการหาอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 3x^2y^4z^5 + 3y \\ f_y(x,y,z) &= 4x^3y^3z^5 + 3x \\ f_z(x,y,z) &= 5x^3y^4z^4 + 4 \\ f_z(-1,1,0) &= 5(-1)^3(1)^4(0)^4 + 4 = 4 \end{aligned}$$

### 1.4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องและอนุพันธ์ย่อย

ในแคลคูลัสในหนึ่งตัวแปร เรามีทฤษฎีบทที่คุ้นเคยที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการมีอนุพันธ์ และความต่อเนื่อง ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.4.1 ถ้าฟังก์ชัน $f$ มีอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ แล้ว $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$




**ภาพที่** 1.26. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.5.5

คำถามหนึ่งที่อาจเกิดขึ้นในทำนองคล้ายกันกับกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียว คือ การมีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0)$ สามารถรับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด $(x_0, y_0)$ ได้หรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า คำตอบของคำถามนี้ไม่จริงเสมอไป

**ตัวอย่างค้าน** 1.4.6 ให้ฟังก์ชัน $f$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ หาค่าได้ แต่ $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

**พิสูจน์** ก่อนอื่น จะพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ $f$ ที่จุด $(0,0)$ คือ

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{y} = 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ อนุพันธ์ย่อย $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ หาค่าได้

ต่อไปจะแสดงว่า $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ จะเห็นว่า $f(0,0) = 0$ ต่อมาจึงพิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ จะเห็นว่า สำหรับลิมิตทำซ้ำ

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right]$$

แต่สำหรับลิมิตตามเส้น เมื่อเลือกเส้น $y = x$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ ลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ จึงได้ว่า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ □

จากตัวอย่าง 1.4.6 จะเห็นว่า หาก $(x,y) \neq (0,0)$ เราจะสามารถคำนวณอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ จะต้องใช้นิยามโดยตรง ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.4.6 ไม่สามารถคำนวณผ่านการหาอนุพันธ์ย่อยทั่ว ๆ ไปแล้วแทนค่าได้

ถึงแม้การมีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0)$ ไม่ได้รับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด $(x_0, y_0)$ แต่หากเพิ่มเติมเงื่อนไขบางประการ จะทำให้เรายืนยันความต่อเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยได้ เพื่อพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าว เราจะพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัชฌิมของฟังก์ชันสองตัวแปร โดยก่อนอื่น จะขอยกทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.4.2 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว)
ถ้าฟังก์ชัน $f$ ที่นิยามบน $[a, b]$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด $(a, b)$ แล้ว มีจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

จากทฤษฎีบท 1.4.2 หากเราพิจารณาให้ $b$ เขียนแทนด้วย $a + h$ แล้ว จำนวนจริง $c$ ที่อยู่ในช่วง $(a, b)$ สามารถเขียนได้ในรูป $a + \theta h$ เมื่อ $0 < \theta < 1$ นั่นคือ

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \qquad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

ต่อไป เราจะขยายแนวคิดทฤษฎีบทค่ามัชฌิมไปสู่ฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.4.7 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร)
ถ้า $f_x$ หาค่าได้สำหรับจุดในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ และ $f_y(a, b)$ หาค่าได้แล้ว สำหรับทุกจุด $(a + h, b + k)$ ของย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ $\eta$ เป็นฟังก์ชันของ $k$ ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to 0$

**พิสูจน์** ก่อนอื่น พิจารณา

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] + [f(a, b+k) - f(a, b)]$$

เนื่องจาก $f_x$ หาค่าได้ในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = hf_x(a + \theta h, b + k) \qquad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

และเนื่องจาก $f_y(a, b)$ หาค่าได้ นั่นคือ

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = f_y(a, b)$$

จึงได้ว่า

$$f(a, b + k) - f(a, b) = k[f_y(a, b) + \eta]$$

โดยที่ $\eta$ เป็นฟังก์ชันของ $k$ ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to 0$ เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ $\eta$ เป็นฟังก์ชันของ $k$ ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to 0$ ตามต้องการ $\square$

เมื่อเราเพิ่มเงื่อนไขให้อนุพันธ์ย่อยมีขอบเขต (bounded) ในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ ก็จะสามารถรับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.4.8 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าหนึ่งในบรรดาอนุพันธ์ย่อยของ $f$ หาค่าได้ และมีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ และอนุพันธ์ย่อยที่เหลือหาค่าได้ที่จุด $(a, b)$ แล้ว $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(a, b)$

**พิสูจน์** โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $f_x$ หาค่าได้และมีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ และให้ $f_y(a, b)$ หาค่าได้ แล้วสำหรับทุกจุด $(a + h, y + k)$ ในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ $\eta \to 0$ เมื่อ $k \to 0$
เราทำการผ่านลิมิตให้ $(h, k) \to (0, 0)$ เนื่องจาก $f_x(a + \theta h, b + k)$ มีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด $(a, b)$ จึงได้ว่า

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a + h, b + k) = f(a, b)$$

นั่นคือ $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(a, b)$ ตามต้องการ □

ดังนั้น สำหรับบริเวณปิด เราจึงสรุปได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก** 1.4.9 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามในบริเวณปิด ถ้าอนุพันธ์ย่อยของ $f$ ทั้งสองหาค่าได้ และมีขอบเขตในบริเวณปิดดังกล่าวแล้ว $f$ มีความต่อเนื่องในบริเวณปิดดังกล่าว

ในหัวข้อต่อไป เราจะพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปร รวมถึงความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องระหว่างอนุพันธ์ย่อย การหาอนุพันธ์ได้ และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

# แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. กำหนดฟังก์ชัน $f$ ต่อไปนี้ จงหา $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$

   (b) $f(x,y) = y^{-3/2}\arctan(x/y)$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{3x^4y - 7x^3y}$

2. จงหาความชันที่จุด $(-1,1,5)$ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพื้นผิว $z = x^2 + 4y^2$ และ

   (a) ระนาบ $x = -1$

   (b) ระนาบ $y = 1$

3. จุดหนึ่งเคลื่อนที่อยู่บนเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพาราโบลอยด์เชิงวงรี $z = x^2 + 3y^2$ กับระนาบ $x = 2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $z$ เมื่อเทียบกับ $y$ เมื่อจุดนั้นอยู่ที่ตำแหน่ง $(3,1,12)$

4. จงหา $\partial w/\partial x_i$ สำหรับ $i = 1,...,n$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $w = \cos(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n)$

   (b) $w = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$ จงแสดงว่า

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. จงหา $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x+y} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. สำหรับฟังก์ชัน $f$ ที่กำหนดโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x-y} & ,x \neq y \\ 0 & ,x = y \end{cases}$$

   จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f$ ที่กำหนดให้ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ (แบบฝึกหัดที่ 1.3 ข้อ 1.c) แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ สามารถหาค่าได้ทุกจุดรวมถึงจุด $(0,0)$

8. กำหนดฟังก์ชัน
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$
จงแสดงว่า $xf_x + yf_y = 2f$

9. จงหา $f_x, f_y, f_x(0,0), f_y(0,0)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

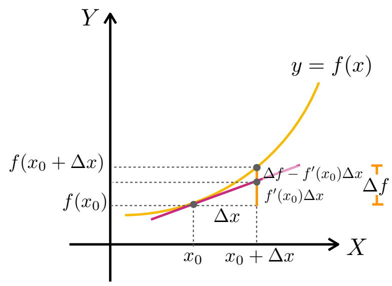
(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,x=y=0 \end{cases}$

10. กำหนด $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ จงหา $f_x(0,0), f_y(0,0)$

## 1.5 การหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

สืบเนื่องจากปัญหาที่เกิดขึ้นในหัวข้อที่ 1.4 เราพบว่า ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ ณ จุด $(x_0,y_0)$ อาจไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$ ดังตัวอย่าง 1.4.6

สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว $f$ จะกล่าวว่า $f$ หาอนุพันธ์ที่ได้ (differentiable) ที่จุด $x_0$ ถ้าลิมิต
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
หาค่าได้ ดังนั้น ผลที่ตามมาจากการที่ $f$ หาอนุพันธ์ได้ ประกอบด้วย



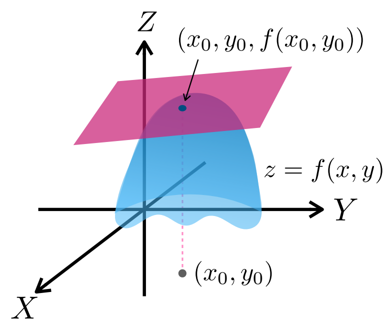

**ภาพที่** 1.27. การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน $f$ ใกล้จุด $x_0$ สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

($1D$): 1 กราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ มีเส้นสัมผัสที่ไม่ใช่เส้นสัมผัสแนวตั้งที่จุด $(x_0, f(x_0))$

($1D$): 2 $f$ สามารถประมาณได้โดยการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation) ณ จุดที่ใกล้ ๆ $x_0$ (ดังภาพที่ 1.27)

($1D$): 3 $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x_0$ (โดยทฤษฎีบท 1.4.1)

ดังนั้น เราจึงต้องการที่จะขยายผลดังกล่าวไปสู่กรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร เพื่อให้ได้ผลที่เป็นไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ




**ภาพที่** 1.28. ระนาบสัมผัสที่ไม่ใช่ระนาบแนวตั้งที่จุด $(x_0,y_0)$

($nD$): 1 พื้นผิวของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ มีระนาบสัมผัสที่ไม่ใช่ระนาบสัมผัสแนวตั้งที่จุด $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

($nD$): 2 ค่าของฟังก์ชัน $f$ ที่จุดที่ใกล้ ๆ $(x_0,y_0)$ สามารถประมาณได้ด้วยค่าที่คำนวณจากค่าของฟังก์ชันเชิงเส้น

($nD$): 3 $f$ มีความต่อเนื่องที่ $(x_0,y_0)$

ก่อนอื่น เราจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรก่อน

### 1.5.1 การหาอนุพันธ์ได้

ในแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราศึกษาส่วนเปลี่ยนแปลง (increment) ของตัวแปรตาม $\Delta f$ เมื่อตัวแปร $x$ มีการเปลี่ยนแปลงจาก $x_0$ ไป $\Delta x$ เป็น $x_0 + \Delta x$ โดย

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ซึ่งในการศึกษาเกี่ยวกับดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราทราบว่า เมื่อ $\Delta x$ มีค่าใกล้ ๆ 0 จะสามารถประมาณ

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

ดังนั้น เมื่อค่า $\Delta x$ เข้าใกล้ 0 ความคลาดเคลื่อน $\Delta f - f'(x_0)\Delta x$ ควรมีขนาดที่น้อยกว่า $\Delta x$ ทั้งนี้ เพราะ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

จะเห็นว่า $\Delta x$ คือระยะระหว่างจุด $x_0$ และ $x_0 + \Delta x$ ดังนั้น หากให้ระยะระหว่างจุดสองจุดเข้าใกล้กันมาก ๆ การประมาณค่าของจุดก็ควรจะมีความคลาดเคลื่อนที่น้อยลงเรื่อย ๆ ดังภาพ 1.27 ด้วยแนวคิดเช่นนี้ เราจึงขยายไปสู่แนวคิดของฟังก์ชันสองตัวแปรได้ ดังนี้

ให้ $\Delta f$ แทน **ส่วนเปลี่ยนแปลง** (increment) ของ $f$ ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ เมื่อ $(x, y)$ เปลี่ยนแปลงจากจุด $(x_0, y_0)$ ไปสู่จุดใหม่ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ กล่าวคือ

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

เราจะนิยามการหาอนุพันธ์ได้ ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 1.5.1 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร โดยที่ $(x, y)$ และ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชัน $f$ ฟังก์ชัน $f$ จะ**หาอนุพันธ์ได้** (differentiable)ที่จุด $(x, y)$ ถ้าการเปลี่ยนแปลง $\Delta f$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1.5.1)$$

โดยที่ $A$ และ $B$ เป็นค่าที่เป็นอิสระจาก $\Delta x, \Delta y$ และ $\phi, \psi$ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ โดยที่ $\phi \to 0, \psi \to 0$ เมื่อ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$

จากสมการ (1.5.1) จะเห็นว่า ถ้า $\Delta y = 0$ จะได้ว่า

$$\Delta f = A\Delta x + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x \qquad (1.5.2)$$

ดังนั้น หากหารสมการ (1.5.2) ด้วย $\Delta x$ แล้วให้ $\Delta x \to 0$ จะทำให้ได้ว่า $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

และในทำนองเดียวกัน จากสมการ (1.5.1) ถ้าให้ $\Delta x = 0$ แล้วนำ $\Delta y$ ไปหารทั้งสมการ จะทำให้ได้ว่า $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ดังนั้น เราจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.5.1 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว อนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าได้

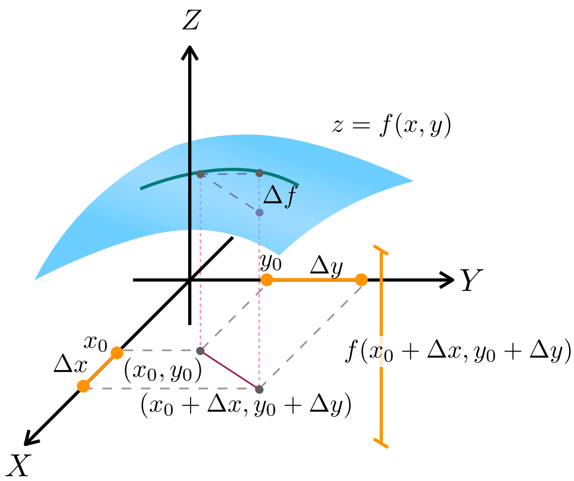
จากทฤษฎีบท 1.5.1 เราจึงสามารถพิจารณานิยามของการหาอนุพันธ์ได้ในรูปของอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ

ฟังก์ชัน $f$ จะ**หาอนุพันธ์ได้** (differentiable)ที่จุด $(x_0, y_0)$ ถ้าการเปลี่ยนแปลง $\Delta f$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

โดยที่ $\phi, \psi$ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ โดยที่ $\phi \to 0, \psi \to 0$ เมื่อ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$

ภาพที่ 1.29 แสดงให้เห็นถึงการพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$




**ภาพที่** 1.29. ส่วนเปลี่ยนแปลงของ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$

**ตัวอย่าง 1.5.2** จงแสดงว่า $f(x, y) = x^2 + 3xy$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$

**พิสูจน์** ให้ $(x_0, y_0)$ เป็นจุดใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$ ก่อนอื่นจะพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ $f$ เมื่อ $(x, y)$ มีการเปลี่ยนแปลงจาก $(x_0, y_0)$ ไปเป็น $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= [(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)] - [x_0^2 + 3x_0y_0] \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0y_0 + 3x_0\Delta y + 3y_0\Delta x + \Delta x\Delta y - x_0^2 - 3x_0y_0 \\
&= 2x_0\Delta x + 3x_0\Delta y + 3y_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x\Delta y \qquad (1.5.3)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + 3y_0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 3x_0$ ดังนั้น จากสมการ (1.5.3) จะสามารถจัดรูปได้ว่า

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \Delta x\Delta x + \Delta x\Delta y$$

เลือก $\phi(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$ และ $\psi(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$ ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x$ และ $\Delta y$ จะเห็นว่า $\phi(\Delta x, \Delta y) \to 0$ และ $\psi(\Delta x, \Delta y) \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

ดังนั้น $f$ จึงหาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$ $\square$

**หมายเหตุ** การเลือก $\phi(\Delta x, \Delta y)$ หรือ $\psi(\Delta x, \Delta y)$ ไม่จำเป็นต้องเลือกได้เพียงอย่างเดียว หากสามารถแสดงได้ว่า มี $\phi(\Delta x, \Delta y)$ หรือ $\psi(\Delta x, \Delta y)$ ซึ่ง $\phi \to 0$ หรือ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ก็เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

โดยอาศัยแนวคิดที่กล่าวมาในข้างต้น เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 1.29 ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ แล้ว เราจะสามารถประมาณค่าส่วนเปลี่ยนแปลงได้จาก

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

และเมื่อ $\Delta x, \Delta y \to 0$ เราคาดหวังให้ความคลาดเคลื่อน $\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y$ น้อยกว่าระยะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ซึ่งเป็นระยะระหว่างจุด $(x_0, y_0)$ กับจุด $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ โดยต้องการให้ได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

ดังนั้น นิยามของการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ สามารถพิจารณาได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

**บทนิยาม** 1.5.2 ฟังก์ชันสองตัวแปร $f$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ เมื่ออนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

ต่อไป เราตอบคำถามสิ่งที่เราคาดหวังตั้งแต่ต้น คือ การพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์ได้และความต่อเนื่อง ซึ่งโดยสรุปแล้ว คำตอบของคำถามนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีฟังก์ชันสองตัวแปร ดังทฤษฎีบทนี้

**ทฤษฎีบท** 1.5.3 ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว $f$ จะต่อเนื่องที่จุด $(x_0, y_0)$

**พิสูจน์** สมมติให้ $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ เราจะแสดงว่า

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ให้ $x = x_0 + \Delta x$ และ $y = y_0 + \Delta y$ นั่นคือ เราจะแสดงให้ได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

พิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ $f$ เราทราบว่า

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

จาก $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ จะได้ว่า $\Delta f$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y \qquad (1.5.4)$$

เมื่อให้ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$ ทำให้ได้ว่า ด้านขวามือของสมการ (1.5.4) เข้าใกล้ 0 นั่นคือ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \Delta f = 0$$

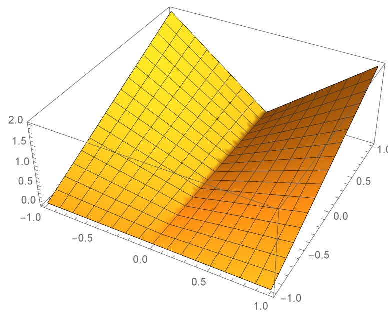
ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ นั่นคือ $f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(x_0, y_0)$ ตามต้องการ □

เช่นเดียวกันกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันตัวแปรเดียว บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

**ตัวอย่างค้าน** 1.5.4 ฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1 + y)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ แต่หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$




**ภาพที่** 1.30. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.5.4

**พิสูจน์** การแสดงความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1 + y)$ ได้ทิ้งไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด ในแบบฝึกหัดที่ 1.3 ข้อที่ 4 แล้ว

เราจะแสดงว่า $f$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$ โดยจะใช้ข้อความแย้งสลับที่ (contrapositive) ของทฤษฎีบท 1.5.1 นั่นคือ

> สำหรับฟังก์ชัน $f$ ที่เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าอนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ หรือ $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าไม่ได้ แล้ว $f$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

พิจารณาอนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|(1 + 0) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

และ $\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ หาค่าไม่ได้ นั่นคืออนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f$ จึงหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0, 0)$ □

คำถามต่อไปที่น่าสนใจ คือ หาก $f$ มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว เราจะสามารถรับประกันการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ หรือไม่ ตัวอย่างค้านต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า

บทกลับของทฤษฎีบท 1.5.1 ไม่จริง นั่นคือ การมีอนุพันธ์ย่อยทั้งสองที่จุด $(x_0, y_0)$ ไม่ได้รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

**ตัวอย่างค้าน** 1.5.5 (ตัวอย่างเดียวกันกับตัวอย่าง 1.4.6) ให้ฟังก์ชัน $f$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $f$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0,0)$

**พิสูจน์** ในตัวอย่าง 1.4.6 เราได้แสดงให้เห็นว่า $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ หาค่าได้ แต่ $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

โดยข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 1.5.3 กล่าวคือ

> ให้ $f = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว $f$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

ทำให้ได้ว่า $f$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ □

คำถามที่ตามมาหลังจากพิจารณาตัวอย่างค้าน 1.5.5 คือ เราจะสามารถเพิ่มเงื่อนไขใดได้หรือไม่ ที่จะทำให้การมีอนุพันธ์ย่อย รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยยืนยันการหาอนุพันธ์ได้จากการมีอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.5.6 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อย $f_x$ และ $f_y$ มีความต่อเนื่องในบริเวณเปิด $D$ แล้ว $f$ จะหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในบริเวณ $D$

**พิสูจน์** ให้ $(x_0, y_0)$ เป็นจุดในบริเวณเปิด $D$ จะได้ว่า มีย่านจุดเปิด $N$ ของจุด $(x_0, y_0)$ ซึ่ง $N \subseteq D$ ดังนั้น สำหรับตัวแปร $\Delta x$ และ $\Delta y$ ที่เล็กเพียงพอที่ทำให้จุด $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ อยู่ในย่านจุดเปิด $N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\ &= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียวในแต่ละพจน์ด้านขวามือ จะได้ว่า

$$\Delta f = \Delta x f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) + \Delta y f_y(x, y+\theta_2\Delta y)$$

เมื่อ $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$

เนื่องจาก $f_x$ และ $f_y$ ต่อเนื่องที่จุด $(x,y)$ ในบริเวณ $D$ ดังนั้น เมื่อให้ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ จะได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x_0,y_0)$$

และ

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x_0,y_0)$$

เราจึงเลือก

$$\phi = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$

และ

$$\psi = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0)$$

ซึ่ง $\phi \to 0$ และ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ ดังนั้น

$$\Delta f = (f_x(x_0, y_0) + \phi)\Delta x + (f_y(x_0, y_0) + \psi)\Delta y$$

นั่นคือ เราสามารถเขียน $\Delta f$ ได้เป็น

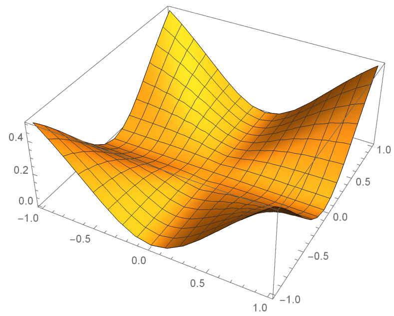
$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + +\psi\Delta y$$

โดยที่ $\phi \to 0$ และ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$
เพราะฉะนั้น $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ ตามต้องการ □

**ตัวอย่าง** 1.5.7 จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$



**ภาพที่** 1.31. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.5.7

**พิสูจน์** ก่อนอื่น เราจะหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ ของ $f$ ซึ่งจะเห็นว่า

กรณีที่ $(x,y) = (0,0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

กรณีที่ $(x,y) \neq (0,0)$ จะได้ว่า

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2xy^2) - (x^2y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

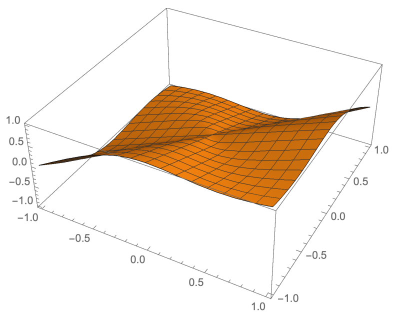
ต่อไป จะแสดงว่า $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ โดยเราจะแสดงเฉพาะกรณี $f_x(x,y)$ เท่านั้น (กรณี $f_y(x,y)$ ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)
จะเห็นว่า $f_x(0,0) = 0$ ต่อไปเราจึงจะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0$
ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/2 > 0$ ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \\ |y| &= \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \end{aligned}$$

และ $y^4 \le (x^2+y^2)^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f_x(x,y) - 0| &= \left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| \\ &= \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &\le 2|x| \\ &< 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$
ได้ว่า $f_x(x,y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ ในทำนองเดียวกันกับ $f_y(x,y)$
โดยทฤษฎีบท 1.5.6 จะได้ว่า $f$ มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ □




**ภาพที่** 1.32. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.5.8

จากทฤษฎีบท 1.5.6 จะเห็นว่า ความต่อเนื่องที่รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ คือ ความต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อย อย่างไรก็ตาม หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$ และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(x_0,y_0)$ อาจจะไม่รับประกันการหาอนุพันธ์ได้

**ตัวอย่างค้าน** 1.5.8 ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \ne (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(0,0)$ แต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ โดยใช้นิยาม (ซึ่งจะให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)

และทำนองเดียวกัน หากฟังก์ชันที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0,y_0)$ อนุพันธ์ย่อยก็ไม่จำเป็นที่จะต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$ เช่นกัน ดังตัวอย่างฟังก์ชันต่อไปนี้

**ตัวอย่างค้าน** 1.5.9 ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,(x,y) \ne (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ (ซึ่งจะให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัดเช่นกัน )

จะเห็นว่าเงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชันในทฤษฎีบท 1.5.6 อาจแรงเกินไปที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น หากเราลดเงื่อนไขความต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันจากเดิมที่อนุพันธ์ย่อยทั้งสองมีความต่อเนื่อง เป็น อนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งมีความต่อเนื่อง ก็จะยังคงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันนั้นหาอนุพันธ์ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.5.10 ให้ $(x_0, y_0)$ เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชันสองตัวแปร $f$ ซึ่ง $f_x$ มีความต่อเนื่องที่ $(x_0, y_0)$ และ $f_y$ หาค่าได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

**พิสูจน์** สมมติให้ข้อสมมติฐานของทฤษฎีบทเป็นจริง กล่าวคือ สมมติว่า $f_x$ มีความต่อเนื่องที่ $(x_0, y_0)$ และ $f_y$ หาค่าได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

จากการที่ $f_x$ มีความต่อเนื่องที่ $(x_0, y_0)$ จะได้ว่า $f_x$ หาค่าได้ในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A}; \delta)$ เมื่อ $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$

ให้ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ เป็นจุดในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A}; \delta)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f_x$ หาค่าได้ในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A}; \delta)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จะได้ว่า

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \Delta x f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0, +\Delta y)$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า $\Delta x$ และ $\Delta y$

เนื่องจาก $f_x$ ต่อเนื่องที่จุด $(x_0, y_0)$ ดังนั้น

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0)$$

ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า

$$f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \phi(\Delta x, \Delta y)$$

โดยที่ $\phi(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $f_y(x_0, y_0)$ หาค่าได้ จึงได้ว่า

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

นั่นคือ เราสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0) + \psi(\Delta y)$$

โดยที่ $\psi(\Delta y) \to 0$ เมื่อ $\Delta y \to 0$

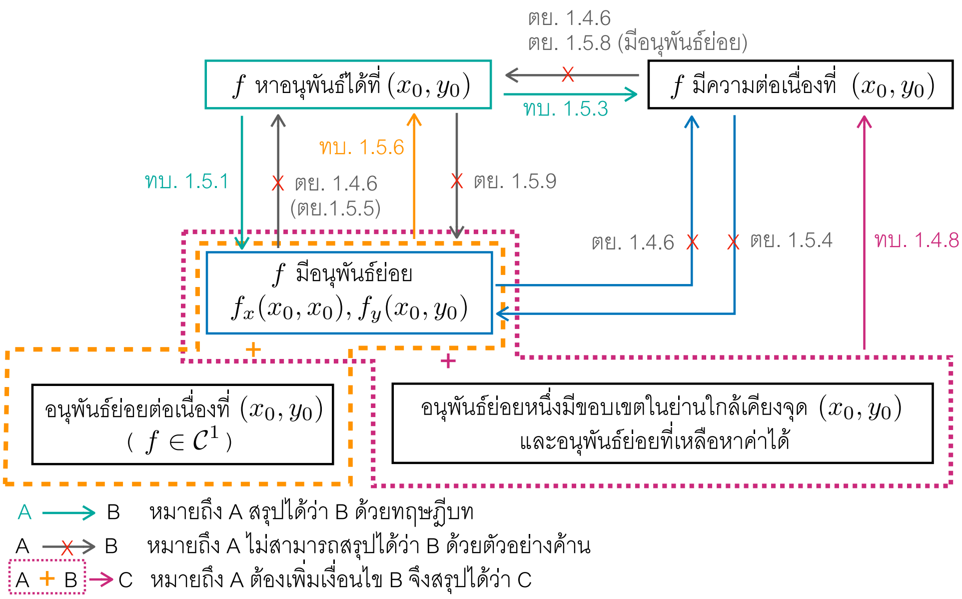
ดังนั้น เราจึงได้ว่า $\Delta f$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + +\psi(\Delta y)\Delta y$$

โดยที่ $\phi \to 0$ และ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ นั่นคือ $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ ตามต้องการ □

ในทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง จะเป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^1$ (continuously differentiable) ซึ่งจากตัวอย่างและทฤษฎีบทที่ผ่าน ๆ มา จะเห็นว่าการที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง มีผลสำคัญสำหรับการหาอนุพันธ์ได้

จากทฤษฎีบท และตัวอย่างค้านที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปเป็นแผนผังของทฤษฎีบทได้ดังนี้




**ภาพที่** 1.33. การสรุปตามทฤษฎีบทและตัวอย่างค้านเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้

หากพิจารณาในกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะพบว่า ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ ซึ่งหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $x = 0$ มีจุดที่กราฟหักงอที่ $x = 0$ ในทำนองคล้ายกัน หากสังเกตลักษณะของพื้นผิวในตัวอย่างที่ผ่าน ๆ มา จะพบว่า ฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ มักมีพื้นผิวมักมีลักษณะไม่เรียบ เช่น มีการพับงอ ดังตัวอย่าง 1.5.4 หรือหากพิจารณาพื้นผิว และทำการวาดระนาบตัดกับพื้นผิวแล้ว พบว่ารอยตัดเป็นเส้นโค้งที่มีการหักงอ ดังตัวอย่าง 1.5.8

### 1.5.2 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

ในทฤษฎีบท 1.5.6 จะเห็นว่า ถ้าพื้นผิวของฟังก์ชัน $f$ เรียบมากพอ (กล่าวคือ $f_x$ และ $f_y$ มีความต่อเนื่อง) จะทำให้เราสามารถหาระนาบที่สัมผัสพื้นผิวได้

สมมติให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ จะทำการสร้างฟังก์ชัน

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

เป็นฟังก์ชันใหม่ที่มีตัวแปรตามคือ ผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) $dz$ และตัวแปรต้นคือ $dx$ และ $dy$ ฟังก์ชันดังกล่าวนี้เรียกว่า **ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม** (total differential) ของ $z$ ที่ $(x_0, y_0)$

ต่อไป เราจะพิจารณาส่วนการประมาณค่าส่วนเปลี่ยนแปลง ผ่านการพิจารณานิยามของการหาอนุพันธ์ได้ พิจารณา

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y \qquad (1.5.5)$$

จะเห็นว่า เมื่อให้ $\Delta x, \Delta y \to 0$ เราจะพิจารณาส่วนสำคัญ (principle part) ของนิยามการหาอนุพันธ์ได้ใน 1.5.5 โดยพิจารณาว่า

$$dz = df(x, y, \Delta x, \Delta y) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \qquad (1.5.6)$$

ถ้าสมมติให้ $z = f(x, y) = x$ จะทำให้ได้ว่า $f_x(x, y) = 1$ และ $f_y(x, y) = 0$ นั่นคือ $dx = \Delta x$

และทำนองเดียวกัน ถ้าสมมติให้ $z = f(x, y) = y$ จะทำให้ได้ว่า $f_x(x, y) = 0$ และ $f_y(x, y) = 1$ นั่นคือ $dy = \Delta y$

นั่นคือ ส่วนเปลี่ยนแปลง $\Delta f$ สามารถประมาณได้โดย

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \qquad (1.5.7)$$

จากการตัดพจน์เล็ก ๆ อีกสองเทอมออกไป เมื่อสมมติให้ $\Delta x, \Delta y$ มีค่าน้อยๆ ซึ่งหากเราพิจารณาว่า $\Delta f$ เล็กมาก ๆ เราสามารถเขียนได้ว่า $\Delta f \approx df$

ดังนั้น การประมาณ $\Delta f$ ที่สามารถทำได้โดยการประมาณด้วยส่วนเปลี่ยนแปลงของ $\Delta x$ และ $\Delta y$ สามารถประมาณค่าได้จากส่วนเปลี่ยนแปลง $dx, dy$ นั่นคือ

$$\Delta f \approx df = dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

โดยความหมายคือ เราสามารถประมาณการเปลี่ยนแปลง $\Delta z$ ได้โดยค่าผลต่างเชิงอนุพันธ์ $dz$ โดยที่ $dx$ คือการเปลี่ยนแปลงของ $x$ และ $dy$ คือการเปลี่ยนแปลงของ $y$ และจะเห็นว่า หาก $\Delta x, \Delta y \to 0$ แล้ว ความคลาดเคลื่อน $\Delta z \approx dz$ ก็จะน้อยกว่าระยะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ระหว่างจุด $(x_0, y_0)$ และ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

**ตัวอย่าง** 1.5.11 กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x, y) = xy^3$ จงประมาณการเปลี่ยนแปลงของ $z$ จากจุด $(0.5, 1.0)$ ไปยัง $(0.501, 1.002)$

**วิธีทำ** การเปลี่ยนแปลง $z$ คือการหา $dz$ ซึ่ง $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$ กล่าวคือ

$$dz = y^3\,dx + 3xy^2\,dy$$

เราทราบว่า $dx = \Delta x = 0.501 - 0.5 = 0.001$ และ $dy = \Delta y = 1.002 - 1.0 = 0.002$ ดังนั้น $dz$ ที่จุด $(0.5, 1.0)$ สามารถประมาณค่าได้จาก

$$dz = (1.0)^3(0.001) + 3(0.5)(1)^2(0.002) = 0.001 + 0.003 = 0.004$$

หากคำนวณค่าของฟังก์ชันนี้โดยตรง จะได้ $f(0.501, 1.002) = 0.504012$ ซึ่ง

$$\Delta z = f(0.501, 1.002) - f(0.5, 1.0) \approx 0.504012 - 0.5 = 0.004012$$

ซึ่งใกล้เคียงกับ $dz$ ที่ทำการประมาณด้วยผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

**ตัวอย่าง 1.5.12** สมการของแก๊สในอุดมคติสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความดัน $P$, อุณหภูมิ $T$ และปริมาตร $V$ เมื่อมวลคงที่ได้โดยสมการ $P = P(V, T) = kT/V$ เมื่อ $k$ เป็นค่าคงที่ สมมติว่าการทดลองเพื่อหาความดันของแก๊สที่บรรจุในภาชนะปิด นักเคมีวัดปริมาตรได้สองหน่วย และอุณหภูมิ 10 หน่วย ในการวัดปริมาตรและอุณหภูมิ มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 หน่วย จงประมาณขอบเขตความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณความดัน ในเทอมของค่าคงที่ $k$

**วิธีทำ** จากความสัมพันธ์ เราต้องการหา $dP$ จากความสัมพันธ์

$$dP = P_V(2, 10)dV + P_T(2, 10)dT$$

ซึ่งเราพบว่า ความคลาดเคลื่อน $dV = \pm 0.01$, $dT = \pm 0.01$ เราจะเห็นว่า

$$dP = (-kT/V^2)dV + (k/V)dT = k(-2.5dV + 0.5dT)$$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของความดัน หาได้จาก

$$|dP| = |k(-2.5dV + 0.5dT)| \leq k(2.5|dV| + 0.5|dT|) = 0.03k$$

ตามต้องการ

### 1.5.3 การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่

สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว หาก $f$ หาอนุพันธ์ได้แล้ว ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $x = x_0$ ถ้าเราเลือกจุดที่ใกล้เคียง $x = x_0$ เราจะสามารถประมาณค่าของฟังก์ชัน $f$ ได้ด้วยจุดที่อยู่บนเส้นตรง $L(x)$ ที่สัมผัสกราฟ $f$ ที่ $x = x_0$ นั่นคือทำการประมาณด้วย

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร จาก (1.5.7) เราพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลง $\Delta f$ ซึ่ง

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ถ้าให้ $x = x_0 + \Delta x$ และ $y = y_0 + \Delta y$ จะได้ว่า เราทำการประมาณ $f$ ด้วย $L(x, y)$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ เรียกว่า การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation)

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ซึ่งในการเขียนลักษณะนี้สื่อความหมายได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว $L(x, y)$ คือระนาบสัมผัสพื้นผิว $f$ ที่ไม่เป็นระนาบแนวตั้ง ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

**ตัวอย่าง 1.5.13** ให้ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ จง ทำการ ประมาณ ค่า ของ $f(5.01, 12.02)$ โดยใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ที่จุด $(5, 12)$

**วิธีทำ** จากความสัมพันธ์

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

จะเห็นว่า

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, f_y(x_0,y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

โดยที่ $f_x(5,12) = 5/13$, $f_y(5,12) = 12/13$ ดังนั้น การประมาณเชิงเส้น $L(x,y)$ หาได้จาก

$$L(x,y) = 13 + \frac{5}{13}(x-5) + \frac{12}{13}(y-12)$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด $(5.01, 12.02)$ จะประมาณได้ว่า

$$L(5.01, 12.02) = 13 + \frac{5}{13}(5.01-5) + \frac{12}{13}(12.02-12) = 13.0226$$

ซึ่งค่าจากการคำนวณโดยตรงคือ

$$f(5.01, 12.02) = \sqrt{(5.01)^2 + (12.02)^2} = 13.0223$$

ซึ่งมีขอบเขตความคลาดเคลื่อนไม่เกิน $|f(5.01, 12.02) - L(5.01, 12.02)| = 0.0003$

เราสามารถขยายแนวคิดการหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมไปสู่กรณีที่ฟังก์ชันมีมากกว่าสองแปรได้

สมมติให้ $\mathbf{P} = (x_1, ..., x_n)$ และ $w = f(x_1, ..., x_n)$ จะนิยามส่วนเปลี่ยนแปลง

$$\Delta f(\mathbf{P}) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

โดย $f$ จะหาอนุพันธ์ได้ ถ้าสามารถเขียน $\Delta f(\mathbf{P})$ ในรูป

$$\Delta f(\mathbf{P}) = f_{x_1}(\mathbf{P})\Delta x_1 + ... + f_{x_n}(\mathbf{P})\Delta x_n + \phi_1 \Delta x_1 + ... + \phi_n \Delta x_n$$

โดยที่ $\phi_1, ..., \phi_n \to 0$ เมื่อ $(\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to (0, ..., 0)$ โดยที่ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม $df$ เขียนได้โดย

$$df = f_{x_1}(\mathbf{P})dx_1 + ... + f_{x_n}(\mathbf{P})dx_n$$

# แบบฝึกหัดที่ 1.5

1. กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x,y) = 2x^2y - 4y$
   (a) จงหาส่วนเปลี่ยนแปลง $\Delta f$
   (b) จงแสดงว่า $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(4,3)$
   (c) จงหา $dz$ เมื่อ $x = 4, y = 3, \Delta x = -0.01, \Delta y = 0.02$

2. จงใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ได้ แสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้ ณ จุดที่กำหนดให้
   (a) $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cx^2$ ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$ เมื่อ $A, B, C$ เป็นค่าคงที่
   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ที่จุด $(x,y,z) = (0,0,0)$

3. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^\alpha} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) เมื่อ $\alpha = 1$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$
   (b) เมื่อ $\alpha < 3/2$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$

4. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2} & ,(x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

   หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0,0)$

5. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x,y) = |x| + |y|$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$

6. ในตัวอย่างที่ 1.3.8 เราได้แสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ จงแสดงว่า $f$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $(0,0)$

7. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   มีอนุพันธ์ย่อยที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$
   (คำใบ้: ใช้ทฤษฎีบท 1.5.3 และทฤษฎีบท 1.5.10 ช่วยในการพิจารณา)

8. สมมติให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ และ $z_0 = f(x_0, y_0)$ จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$

9. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่
   (b) สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

10. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

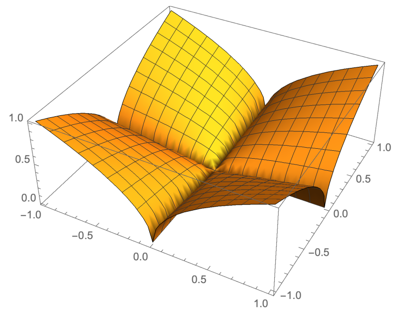
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$

11. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(0, 0)$ แต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$ โดยใช้นิยามการหาอนุพันธ์ได้




**ภาพที่** 1.34. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

12. ในแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 10 ผู้อ่านได้แสดงว่า เมื่อกำหนด $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ แล้ว $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ หาค่าได้
จงแสดงว่า $f$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0, 0)$

13. จงหาผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้
   (a) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{6}$
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

14. จงประมาณค่า $f(x, y) = \ln(xy)$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยเลือกจุดที่เหมาะสมในการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่

15. จงใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ แสดงว่า $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ ที่จุด $(1, 1)$ สามารถประมาณได้โดย

$$x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x-1) + \beta(y-1)$$

16. กรวยกลมอันหนึ่ง เมื่อทำการวัดรัศมีและความสูง พบว่า มีความคลาดเคลื่อนจากการวัดอย่างมาก 2% และ 4% ตามลำดับ จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของปริมาตรที่ได้จากการคำนวณ

17. คาบ $T$ ของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมเมื่อมีการสั่นน้อยมาก คำนวณได้จาก $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ เมื่อ $L$ คือความยาวของเพนดูลัม $g$ คือค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง สมมติว่าในการวัดค่า $L$ และ $g$ พบว่า มีความคลาดเคลื่อนอย่างมาก 0.5% และ 0.1% ตามลำดับ จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของคาบที่ได้จากการคำนวณ

18. กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่ง วัดความกว้าง ยาว และสูงได้ความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 5% จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของพื้นที่ผิวของกล่องที่ได้จากการคำนวณ

## 1.6 ฟังก์ชันเอกพันธุ์

ในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน เรามักให้ความสนใจกับปัญหาการเป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาที่เป็นพื้นฐานในพีชคณิตเชิงเส้น กล่าวคือ สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ จะเป็นการส่งเชิงเส้น (linear map) $f$ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไข $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ สำหรับทุก $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ และ $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ ทุก $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ และค่าคงตัว $c$

เราจะพิจารณาพฤติกรรมอื่น ๆ นอกจากการเป็นเชิงเส้น สมมติว่าสำหรับแต่ละส่วนประกอบ $x_i$ ของ $\mathbf{x}$ มีตัวแปรเสริม $\lambda$ คูณอยู่ ซึ่งมีความหมายคือ แต่ละส่วนประกอบถูกย่อหรือขยายด้วยตัวคูณ (factor) ซึ่งสมมติว่าเป็นตัวแปรเสริม $\lambda$ เราจึงต้องการพิจารณาพฤติกรรมของการย่อขยาย (scaling) ของฟังก์ชันที่ตัวแปรต้นถูกย่อขยายด้วย กล่าวคือ หากแต่ละตัวแปร $x_i$ ถูกคูณด้วยตัวแปรเสริมแล้ว ค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเป็นกำลังบางค่าของตัวแปรเสริมตัวนั้น เราจะนิยามพฤติกรรมดังกล่าว ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 1.6.1 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชัน $n$ ตัวแปร ซึ่ง $f = f(x_1, ..., x_n)$ จะเรียกว่าฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m$ (homogeneous function of degree $m$) ถ้า

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, ..., x_n)$$

สำหรับตัวแปรเสริม $\lambda \in \mathbb{R}$ และ $m$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

**ตัวอย่าง** 1.6.1 พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $2$ เนื่องจากสำหรับตัวแปรเสริม $\lambda$

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 - 2(\lambda z)^2 \\ &= \lambda^2(x^2 - y^2 - 2z^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

2. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $1$

3. $f(x, y) = \dfrac{2x^2}{y^2} \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $0$

4. $f(x, y, z) = \sqrt{\dfrac{z}{x^2 + 2y^2}}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $-1/2$

**ตัวอย่าง** 1.6.2 ในทางเศรษฐศาสตร์ ฟังก์ชัน Cobb-Douglas นิยามโดยค่าเฉลี่ยเรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก ซึ่งมีโดเมนเป็น $\mathbb{R}_+^n$ เมื่อ $\mathbb{R}_+$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก คือ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

เมื่อ $\alpha_i > 0$ สำหรับทุก $i$ จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้น $\alpha_1 + ... + \alpha_n$

ในบางบริบท เราต้องการหาผลคูณระหว่างตัวแปรและอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเมื่อเทียบกับตัวแปรนั้น เมื่อฟังก์ชันบางฟังก์ชันมีความซับซ้อน จะเห็นว่า การหาอนุพันธ์ย่อยโดยตรงอาจทำได้ไม่ง่ายนัก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จึงจะช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าดังกล่าวได้ง่ายขึ้น หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m$

**ทฤษฎีบท** 1.6.3 (ทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธุ์)
ถ้า $f(x_1, ..., x_n)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m$ ที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ $x_1, ..., x_n$ หาค่าได้แล้ว

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, ..., x_n)$$

**พิสูจน์** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m$ ดังนั้น สำหรับตัวแปรเสริม $\lambda$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, ..., x_n) \tag{1.6.1}$$

สมมติให้ $y_i = \lambda x_i$ สำหรับทุก $i = 1, ..., n$ นั่นคือ

$$f(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda^m f(x_1, ..., x_n) \tag{1.6.2}$$

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ $\lambda$ ทั้งสมการ (1.6.2) โดยอาศัยกฎลูกโซ่ของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial \lambda} + ... + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial \lambda} = m\lambda^{m-1} f(x_1, ..., x_n) \tag{1.6.3}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial y_i}{\partial \lambda} = x_i$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial y_i}\dfrac{\partial y_i}{\partial x_i}$ สำหรับทุก $i$ ได้ว่า $\dfrac{\partial f}{\partial y_i} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$
เพราะฉะนั้น จากสมการ (1.6.3) จึงได้ว่า

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m\lambda^m f(x_1, ..., x_n)$$

ให้ $\lambda = 1$ จึงได้ว่า

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, ..., x_n)$$

ตามต้องการ $\square$

**ตัวอย่าง 1.6.4** ให้ $f(x,y) = x^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$
ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่ นอกจากนี้ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์

**วิธีทำ** ให้ $\lambda$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) \\ &= \lambda^2 x^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x^2}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= x\left[-\frac{x^2}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right] + y\left[\frac{x^3}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right] \\ &= 2x^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2f(x,y) \end{aligned}$$

นั่นคือ $f$ สอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธุ์

# แบบฝึกหัดที่ 1.6

1. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ และแสดงว่า $f$ สอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธุ์
   (a) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2} \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$
   (b) $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 - 2xyz$
   (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{y}$
2. ให้ $p(x,y)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรที่แต่ละพจน์มีดีกรีรวมเท่ากับ $n$ จงแสดงว่า ฟังก์ชันพหุนามดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ พร้อมทั้งหาระดับขั้นด้วย
3. ให้ $f(x,y) = x_1 + x_2^2$ โดยที่ $x_1, x_2 \geq 0$ จงแสดงว่า ไม่มีจำนวนจริง $k$ ที่ทำให้ $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k f(x_1, x_2)$ สำหรับจำนวนจริง $\lambda$ ใด ๆ
   (คำใบ้ : พิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง)
4. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงแสดงว่า $f$ เป็นไม่ฟังก์ชันเอกพันธุ์ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

(a) $f(x, y, z) = x^3 + x^2y^2 - 2xyz^2$

(b) $f(x, y) = e^{x^2/(3y^2+x^2)}$

(c) $f(x, y) = \ln(xy)$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

> **ทฤษฎีบท** 1.6.5 ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชัน $n$ ตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $k$ แล้ว อนุพันธ์ย่อย $f_{x_i}$ เมื่อ $i = 1, ..., n$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $k - 1$

6. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m$ และ $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $n$ จงแสดงว่า

(a) $f(x, y)g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m + n$

(b) $f(x, y)/g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m - n$

7. กำหนดฟังก์ชัน $f(x, y) = x^4y^3 \sin^{-1}(y^2/x^2)$ จงแสดงว่า

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 7f(x, y)$$

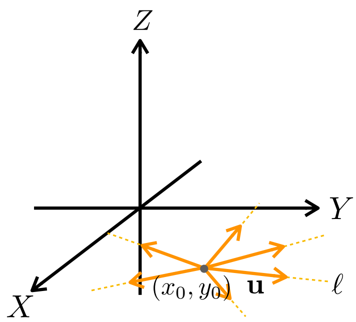
8. ให้ $w = \left(\dfrac{x - y + z}{x + y + z}\right)^n$ จงแสดงว่า

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

## 1.7 อนุพันธ์ระบุทิศทาง

ในเรื่องอนุพันธ์ย่อย เราได้ทำการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันภายใต้ตัวแปรต้นตัวหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ตัวแปรต้นตัวอื่น ๆ คงที่ ในการศึกษาอนุพันธ์ย่อยดังกล่าว สำหรับกรณีฟังก์ชันสองตัวแปร เรากำหนดทิศทางมาตรฐาน คือทิศทางที่ขนานกับแกน $X$ หรือแกน $Y$

หากเราต้องการศึกษาอนุพันธ์ตามทิศทางที่ต้องการ เราจะต้องกำหนดทิศทางขึ้นมาก่อน ซึ่งเราสามารถใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในการกำหนดทิศทางได้ ดังภาพ 1.35




**ภาพที่** 1.35. ทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และเส้นตรง $\ell$

สมมติให้จุด $(x_0, y_0)$ เป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เมื่อ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน $X$ และ $Y$ ตามลำดับ เนื่องจากเวกเตอร์สามารถกำหนดเส้นตรงในปริภูมิได้ เราจึงพิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริม เมื่อ $s$ เป็นตัวแปรเสริมได้ในรูป

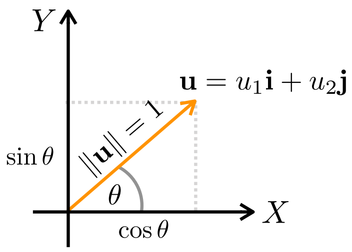
$$x = x_0 + su_1, \qquad y = y_0 + su_2$$

หาก $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะเห็นว่า $s$ จะเป็นความยาวของเส้นโค้งซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $(x_0, y_0)$ และมีทิศทางไปตามทิศที่เป็นบวกของ $\mathbf{u}$ ดังนั้น ถ้าให้ $s = 0$ จุด $(x, y)$ คือจุดอ้างอิง $(x_0, y_0)$ และเมื่อ $s$ เพิ่มขึ้น จุด $(x, y)$ ก็จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง $\ell$ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ดังนั้น หากพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ บนพื้นผิวที่วิ่งไปตามเส้นโค้ง $\ell$ บนเวกเตอร์อ้างอิง $\mathbf{u}$ อนุพันธ์ของ $dz/ds$ เมื่อ $s = 0$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ขณะใดขณะหนึ่งของ $f(x, y)$ ตามระยะทางที่วัดจาก $(x_0, y_0)$ ไปยัง $(x, y)$ ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ เราจึงจะกล่าวถึงนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทางได้ดังนี้

**บทนิยาม 1.7.1** ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ $x,y$ และ $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **อนุพันธ์ระบุทิศทาง** (directional derivative) ของ $f$ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0,y_0)$ เขียนแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s} \qquad (1.7.1)\\ &= \frac{d}{ds}[f(x_0+su_1,y_0+su_2)]_{s=0} \end{aligned}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้




**ภาพที่ 1.36.** เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ในรูปของมุม

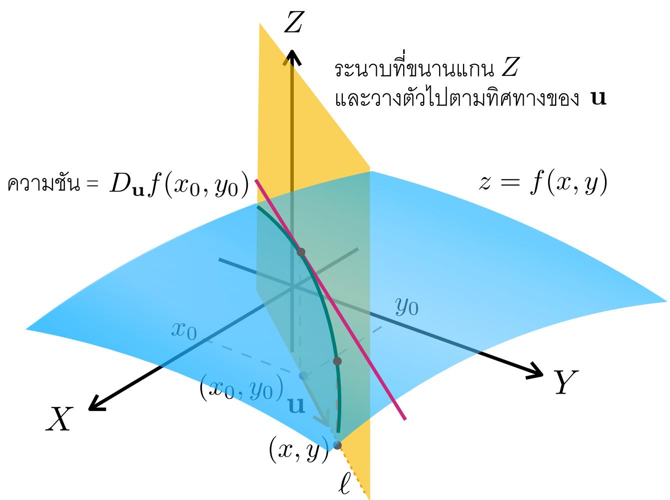
จากนิยามดังกล่าว จะเห็นว่า หากเวกเตอร์ $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งทำมุม $\theta$ กับแกน $X$ ดังภาพ 1.36 จะได้ว่า

$$u_1=\cos\theta,\qquad u_2=\sin\theta$$

นั่นคือ สมการ (1.7.1) สามารถเขียนได้ในรูปของมุมที่ทำกับแกน $x$ ได้โดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+s\cos\theta,y_0+s\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{s}$$

เราจึงพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตได้ดังภาพ 1.37 กล่าวคือ ความหมายของอนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ คือความชันของพื้นผิว $z=f(x,y)$ ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ นั่นเอง ดังนั้น สำหรับจุด $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ที่ตรึงไว้ อาจมีความชันได้มากมายขึ้นอยู่กับทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่กำหนดไว้ ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางที่จุด $(x_0,y_0)$ จึงมีความหมายคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่งของ $f(x,y)$ ขึ้นกับระยะทางในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0,y_0)$




**ภาพที่ 1.37.** อนุพันธ์ระบุทิศทางในทางเรขาคณิต

**หมายเหตุ** สังเกตว่าจากนิยาม (1.7.1)

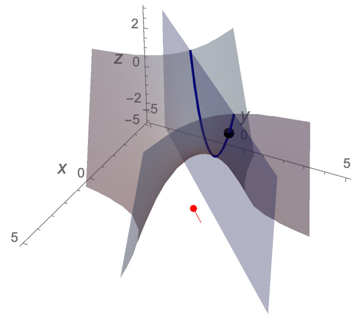
- ถ้าเลือก $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ $(\theta=0)$ จะได้ว่า $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ คือ $f_x(x_0,y_0)$
- ถ้าเลือก $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ $(\theta=\pi/2)$ จะได้ว่า $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ คือ $f_y(x_0,y_0)$

**ตัวอย่าง** 1.7.1 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน $X$ ด้วยมุม $\theta = \pi/4$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยใช้นิยาม

**วิธีทำ** จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1,2) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(1+s\cos(\frac{\pi}{4}), 2+s\sin(\frac{\pi}{4})) - f(1,2)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f(1+s\frac{\sqrt{2}}{2}, 2+s\frac{\sqrt{2}}{2}) - f(1,2)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(1+s\frac{\sqrt{2}}{2})(2+s\frac{\sqrt{2}}{2}) - 2}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{2+3s\frac{\sqrt{2}}{2} + s^2\frac{1}{2}) - 2)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \left(3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{s}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ซึ่งมีความหมายคือ หากเราเคลื่อนที่จากจุด $(1, 2)$ ไปยังจุด $(x, y)$ ด้วยทิศทาง $\mathbf{u}$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ จะเพิ่มขึ้น $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ เท่าของระยะที่เคลื่อนที่ไป



**ภาพ ที่** 1.38. พื้น ผิว ของ ฟังก์ชัน และ อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x, y) = xy$ ที่จุด $(1, 2)$ เมื่อกำหนด $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/4$ กับแกน $X$

**ตัวอย่าง** 1.7.2 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = y^2 \ln x$ เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ที่จุด $(1, 4)$ โดยใช้นิยาม

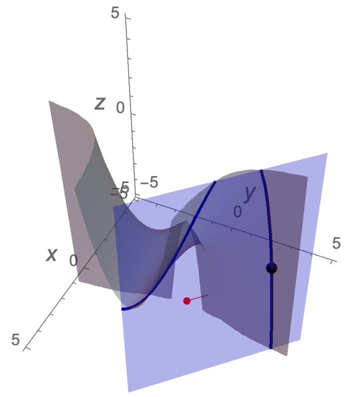
**วิธีทำ** เนื่องจากเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ที่กำหนดให้ยังไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนั้นเราจึงทำเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยก่อน โดยขนาดของเวกเตอร์คือ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ หน่วย ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยนี้คือ

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

ดังนั้น โดยการหาอนุพันธ์จากนิยาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1,2) &= \frac{d}{ds}\left[f(1-\frac{s}{\sqrt{2}}, 4+\frac{s}{\sqrt{2}})\right]_{s=0} \\ &= \left. \frac{\left(4+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}{1-\frac{s}{\sqrt{2}}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(4+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\ln\left(1-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right|_{s=0} \\ &= -8\sqrt{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ หากเราเคลื่อนที่จากจุด $(1, 4)$ ตามทิศทาง $\mathbf{u}$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x, y) = y^2 \ln x$ จะลดลง $8\sqrt{2}$ เท่าของระยะที่เคลื่อนที่ไป



**ภาพ ที่** 1.39. พื้น ผิว ของ ฟังก์ชัน และ อนุพันธ์ ระบุ ทิศทาง ของ $f(x, y) = y^2 \ln x$ ที่จุด $(1, 2)$ เมื่อกำหนด $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/4$ กับแกน $X$

ในกรณีที่ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เราจะสามารถนิยามอนุพันธ์ระบุทิศทางได้ในทำนองเดียวกัน ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 1.7.2 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันของ $x, y, z$ และ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f$ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ เขียนแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} \\ &= \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3)]_{s=0} \end{aligned}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

จะเห็นว่า เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งโดยใช้โคไซน์แสดงทิศทาง (directional cosine) กล่าวคือ ในกรณีที่ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร สมมติให้ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน $X, Y$ ด้วยมุม $\alpha, \beta$ ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j}$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยที่ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน $X, Y, Z$ ด้วยมุม $\alpha, \beta, \gamma$ ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถพิจารณาอนุพันธ์ระบุทิศทางได้โดยง่าย

จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง การหาอนุพันธ์ระบุทิศทางโดยใช้นิยามมีความยุ่งยาก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้เราคำนวณอนุพันธ์ระบุทิศทางได้สะดวกขึ้น

**ทฤษฎีบท** 1.7.3 ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ และถ้า $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และกำหนดโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

**พิสูจน์** จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง ได้ว่า

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)]_{s=0}$$

ให้ $g(s) = f(x_0+su_1, y_0+su_2)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการประกอบกันระหว่าง $z = f(x, y)$ กับ $x(s) = x_0 + su_1$ และ $y(s) = y_0 + su_2$
ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $g$ เทียบกับ $s$ สามารถหาได้โดยใช้กฎลูกโซ่ นั่นคือ

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $g'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ จึงสรุปได้ดังต้องการ $\square$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เราสามารถขยายแนวคิดได้โดยง่าย กล่าวคือ

**ทฤษฎีบท** 1.7.4 ให้ $f = f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ และถ้า $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ หาค่าได้ และกำหนดโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3$$

ในเวกเตอร์แคลคูลัส สำหรับฟังก์ชัน $f$ **เกรเดียนต์** (gradient) ของ $f$ นิยามโดย

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ในรูปตัวดำเนินการเดล $\nabla$ โดย $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรก็จะนิยามได้ในทำนองคล้ายกัน คือ

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.7.3 และ 1.7.4 อนุพันธ์ระบุทิศทางที่ $(x_0, y_0, z_0)$ สามารถพิจารณาได้จากผลคูณจุด (dot product) ระหว่างเวกเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ และทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ กล่าวคือ

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

และในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร หากกำหนดให้ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ แล้ว

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{u}$$

เราจะมาพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** 1.7.5 (ตัวอย่างเดียวกันกับตัวอย่าง 1.7.1) จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน $X$ ด้วยมุม $\theta = \pi/4$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยใช้ทฤษฎีบท 1.7.3

**วิธีทำ** จากข้อมูลที่กำหนดให้ จะได้เวกเตอร์ $\mathbf{u} = \cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{i} + \sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}$
นั่นคือ $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2})\mathbf{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2})\mathbf{j}$ และจะเห็นว่า

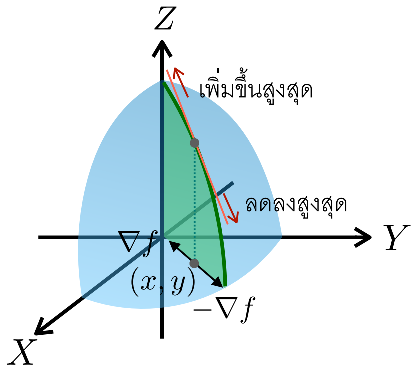
$$\nabla f(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

นั่นคือ $\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1(\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ซึ่งคำตอบตรงกันกับตัวอย่าง 1.7.1

### สมบัติของเกรเดียนต์ที่น่าสนใจ




**ภาพที่** 1.40. การเพิ่มขึ้นหรือลดลงสูงสุดตามทิศทางของ $\nabla f$

จากความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ระบุทิศทางและเกรเดียนต์ ดังปรากฏในทฤษฎีบท 1.7.3 ะเห็นว่า

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

ื่องจาก $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ อยู่ในรูปผลคูณจุด เราสามารถพิจารณาได้อีกนัยหนึ่งคือ

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta \qquad (1.7.2)$$

ดังนั้น สมการ (1.7.2) จะมีค่ามากที่สุด หากมุม $\theta$ มีค่าเท่ากับ 0 และค่าอนุพันธ์ระบุทิศทางที่มากที่สุดที่จุด $(x_0, y_0)$ คือ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ นั่นหมายความว่า ที่จุด $(x_0, y_0)$ พื้นผิว $z = f(x, y)$ มีค่าความชันมากที่สุดในทิศทางของเกรเดียนต์ และความชันที่มากที่สุดคือ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาทิศทางตรงกันข้าม จะพบว่า ค่า $D_{\mathbf{u}} f$ ที่น้อยที่สุดที่จุด $(x_0, y_0)$ คือ $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ซึ่งเกิดในทิศทางตรงข้ามของ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ดังภาพ 1.40 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.7.6 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหรือสามตัวแปร และ $P$ เป็นจุด $P(x_0, y_0)$ หรือ $P(x_0, y_0, z_0)$ ในสองมิติหรือสามมิติตามลำดับ สมมติว่า $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ $P$ แล้ว

1. ถ้า $\nabla f = \mathbf{0}$ แล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f$ ที่ $P$ ทั้งหมดมีค่าเท่ากับศูนย์
2. ถ้า $\nabla f \neq \mathbf{0}$ แล้ว สำหรับอนุพันธ์ระบุทิศทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ $f$ ที่ $P$ จะได้ว่า อนุพันธ์ตามทิศทาง $\nabla f$ ที่จุด $P$ จะมีค่ามากที่สุด และค่าที่มากที่สุดนั้นคือ $\|\nabla f\|$ ที่ $P$
3. ถ้า $\nabla f \neq \mathbf{0}$ แล้ว สำหรับอนุพันธ์ระบุทิศทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ $f$ ที่ $P$ จะได้ว่า อนุพันธ์ตามทิศทางตรงกันข้ามกับ $\nabla f$ ที่จุด $P$ จะมีค่าน้อยที่สุด และค่าที่น้อยที่สุดนั้นคือ $-\|\nabla f\|$ ที่ $P$

**ตัวอย่าง** 1.7.7 ให้ $f(x, y) = e^x y^3$ จงหาค่าสูงสุดของอนุพันธ์ระบุทิศทางที่ $(0, -2)$ และหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางที่ค่ามากที่สุด

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 1.7.6 ทิศทางที่เพิ่มขึ้นสูงสุดคือทิศของ $\nabla f$ นั่นคือ

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = e^x y^3 \mathbf{i} + 3e^x y^2 \mathbf{j}$$

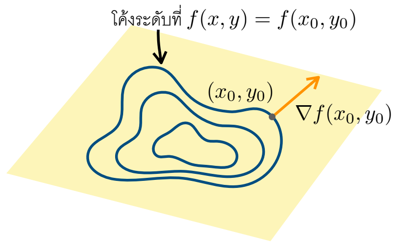
ดังนั้น เวกเตอร์ในทิศทางที่เพิ่มขึ้นสูงที่สุดที่จุด $(0, -2)$ คือ $\nabla f(0, -2) = -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น ขนาดสูงสุดของอนุพันธ์ระบุทิศทางที่จุด $(0, -2)$ หาได้จาก

$$\|\nabla f(0, -2)\| = \sqrt{(-8)^2 + (12)^2} = 4\sqrt{13}$$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้นคือ

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(0, -2)}{\|\nabla f(0, -2)\|} = \frac{1}{4\sqrt{13}}(-8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$

จะเห็นว่า เมื่อพิจารณาพื้นผิว $z = f(x, y)$ แล้วทำการพิจารณาโค้งระดับ เมื่อให้ $z$ เป็นค่าคงที่ กล่าวคือ สมมติว่าโค้งระดับกำหนดได้โดยสมการอิงตัวแปรเสริม $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ ดังนั้น โค้งระดับจะเขียนได้ในรูป $f(g(t), h(t)) = c$ จะเห็นว่า เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจะมีทิศทางที่ตั้งฉากกับโค้งระดับตามภาพ 1.41 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้




**ภาพที่** 1.41. เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ซึ่งตั้งฉากกับโค้งระดับ $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ที่จุด $(x_0, y_0)$

**ทฤษฎีบท** 1.7.8 ให้ $f = f(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ทุก $(x_0, y_0)$ ในโดเมน $D$ ของ $f$ จะได้ว่า เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ จะตั้งฉากกับโค้งระดับของ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$

**พิสูจน์** สมมติว่า โค้งระดับเขียนได้ในสมการอิงตัวแปรเสริม $f(g(t), h(t)) = c$ ของตัวแปร $t$

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ $t$ ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} &= 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right) &= 0 \end{aligned}$$

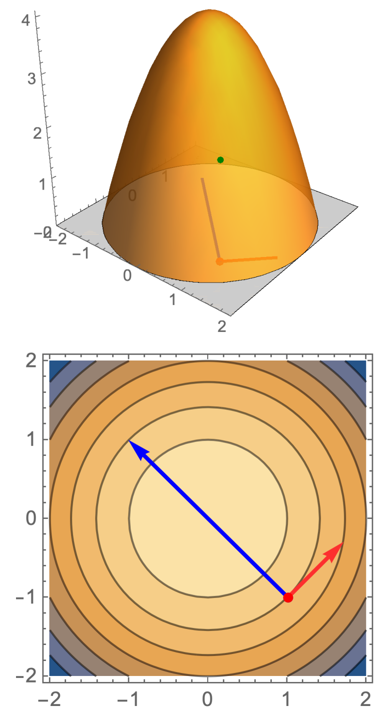
ซึ่งจะเห็นว่า $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$ และ $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}$

นั่นคือ $\nabla f$ จะตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของ $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ซึ่งมีความหมายว่า $\nabla f$ ตั้งฉากกับโค้งระดับของ $f$ ที่ $(x_0, y_0)$ □

จะเห็นว่า ถ้า $(x_0, y_0)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งระดับ $f(x, y) = c$ แล้ว ความชันของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ที่จุดนั้น ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ จะหาได้โดย $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$

**ตัวอย่าง** 1.7.9 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิของแผ่นโลหะแผ่นหนึ่งที่จุด $(x, y)$ กำหนดโดย $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4$

1. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ที่จุด $(1, -1)$ เมื่อ $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/3$ กับแกน $X$
2. จงหาขนาดและทิศทางของอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดของอุณหภูมิที่จุด $(1, -1)$



**ภาพที่** 1.42. (บน) พื้นผิวของ $f$ ในตัวอย่าง 1.7.9 (ล่าง) เส้นโค้งระดับของ $f$ และเกรเดียนต์ของ $f$ ที่จุด $(1, -1)$

**วิธีทำ** 1. จากปัญหาดังกล่าว เราต้องการหาอนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}} f(1, -1)$ เมื่อ $\mathbf{u}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ทำมุม $\pi/3$ กับแกน $X$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ และ

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$$

นั่นคือ $\nabla f(1, -1) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(1,-1) &= \nabla f(1,-1)\cdot\mathbf{u}\\
&= (-2)(\frac{1}{2}) + (2)(\frac{\sqrt{3}}{2})\\
&= -1+\sqrt{3}\approx 0.732
\end{aligned}
$$

นั่นคือ ที่จุด $(1,-1)$ อุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว $0.732$ หน่วยต่อหนึ่งหน่วยการเปลี่ยนแปลงของระยะที่วัดได้ตาม $\mathbf{u}$

2. เนื่องจาก ทิศทาง ที่ อัตรา การ เปลี่ยนแปลง สูงสุด เป็น ไป ตาม ทิศ ของ $\nabla f(1,-1)$ นั่นคือ $\nabla f(1,-1)$ ทำมุม $\theta = 3\pi/4$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของอุณหภูมิที่ $(1,-1)$ คือ

$$
\|\nabla f(1,-1)\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}
$$

และจะมีค่ามากที่สุดเมื่อทำมุม $3\pi/4$ กับแกน $X$

จะเห็นว่า เราสามารถพิจารณาพื้นผิวของ $f$ ได้ดังภาพ 1.42 (ด้านบน) และพิจารณาโค้งระดับดังภาพ 1.42 (ด้านล่าง) ซึ่งลูกศรสีน้ำเงินแสดงให้เห็นถึงเกรเดียนต์ซึ่งตั้งฉากกับโค้งระดับที่จุด $(1,-1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของพื้นผิว (ลูกศรสีแดง)

**ตัวอย่าง** 1.7.10 ให้ $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f$ ที่จุด $(1,1,0)$ ตามตามทิศทาง $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
2. จง หา ทิศทาง ที่ $f$ เปลี่ยนแปลง มาก ที่สุด ที่ จุด $(1,1,0)$ และ หา อัตรา การเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

**วิธีทำ** 1. ก่อนอื่น จากทิศทาง $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ จะต้องทำเวกเตอร์ดังกล่าวให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยก่อน กล่าวคือ ขนาดของ $\mathbf{v} = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$ ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{u}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ คือ

$$
\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}
$$

และเกรเดียนต์ที่จุด $(1,1,0)$ คือ $\nabla f(1,1,0) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(1,1,0)$ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ คือ

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(1,1,0) &= \nabla f(1,1,0)\cdot\mathbf{u}\\
&= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7}\\
&= \frac{4}{7}
\end{aligned}
$$

2. ทิศทางที่อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดเป็นไปตามทิศของ $\nabla f(1,1,0)$ คือเปลี่ยนแปลงไปตามเวกเตอร์ $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของ $f$ ที่ $(1,1,0)$ คือ

$$
\|\nabla f(1,1,0)\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(-1)^2} = 3
$$

# แบบฝึกหัดที่ 1.7

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f$ ณ จุดและทิศทางที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

   (a) $f(x,y) = 1 + x^2y + xy^2$ ณ จุด $(1,-1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ ณ จุด $(1,4)$ เมื่อทิศทางเป็นไปตามเวกเตอร์ที่ทำมุม $\theta = \pi/3$ กับแกน $X$

   (c) $f(x,y,z) = x^3z - yx^2 + z^2$ ณ จุด $(2,-1,1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

2. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f$ ณ จุดและทิศทางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (a) $f(x,y) = e^x \cos y$ ณ จุด $(0,\pi/2)$ โดยทิศทาง $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

   (b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 4z^2)$ ณ จุด $(-1,2,4)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$

   (c) $f(x,y,z) = e^{x+y+3z}$ ณ จุด $(-2,2,-1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = 20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y) = e^{-x}\sec y$ ที่จุด $P(0,\pi/4)$ ในทิศทางที่เข้าสู่จุดกำเนิด

4. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y) = \sqrt{xy}e^y$ ที่จุด $P(1,1)$ ในทิศทางลบของแกน $Y$

5. กำหนดให้ $f(x,y,z) = \dfrac{y}{x+z}$ จงหา

   (a) อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f$ ที่จุด $P(2,1,-1)$ ในทิศทางจากจุด $P$ สู่ $Q(-1,2,0)$

   (b) จงหาทิศทางที่ $f$ เปลี่ยนแปลงมากที่สุดที่จุด $(2,1,-1)$ และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

6. อุณหภูมิ (หน่วยเซลเซียส) ในแท่งโลหะอันหนึ่ง ณ จุด $(x,y,z)$ กำหนดโดยฟังก์ชัน

$$T(x,y,z) = \frac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2}$$

   (a) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเมื่อเทียบกับระยะทางที่จุด $(1,1,1)$ ในทิศทางสู่จุดกำเนิด

   (b) จงหาทิศทางที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นมากที่สุดที่จุด $(1,1,1)$ (ตอบในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย)

   (c) จงหาอัตราซึ่งอุณหภูมิ**ลดลง**ต่ำที่สุดที่จุด $(1,1,1)$

7. ภูเขาแห่งหนึ่ง ที่ตำแหน่ง $(x,y)$ ความสูงจากระดับน้ำทะเล $z$ วัดได้จากความสัมพันธ์

$$z = 2000 - 0.02x^2 - 0.04y^2$$

   เมื่อ $x,y,z$ มีหน่วยเป็นเมตร กำหนดให้ทิศทางตามแกน $X$ ด้านบวกเป็นทิศตะวันออก และทิศทางตามแกน $Y$ ด้านบวกเป็นทิศเหนือ สมมติว่านักปีนเขาคนหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P(-20,5,1991)$

(a) ถ้านักปีนเขาใช้เข็มทิศและเดินทางไปตามทิศตะวันออก ณ ตำแหน่ง $P$ นักปีนเขาจะต้องเดินขึ้นหรือเดินลงจากจุดที่ยืนอยู่

(b) ถ้านักปีนเขาใช้เข็มทิศและเดินทางไปตามทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ณ ตำแหน่ง $P$ นักปีนเขาจะต้องเดินขึ้นหรือเดินลงจากจุดที่ยืนอยู่ และความสูงมีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

(c) ณ จุดที่นักปีนเขายืนอยู่ ทิศทางใดในเข็มทิศที่ภูเขามีการเปลี่ยนแปลงความสูงเพิ่มขึ้นสูงที่สุด และลดลงต่ำที่สุด

8. ให้ $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ จงแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง อนุพันธ์ย่อย $f_x, f_y$ หาค่าได้ที่จุด $(0,0)$ แต่อนุพันธ์ระบุทิศทางในทิศทางอื่น ๆ หาค่าไม่ได้

9. สมมติให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่โดเมนคือระนาบ $XY$ ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

(a) ถ้า $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ แล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f$ ในทิศทางของ $\mathbf{v}$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ มีค่าเป็นสองเท่าของอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f$ ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0, y_0)$

(b) ถ้า $y = x^2$ เป็นเส้นโค้งระดับของ $f$ แล้ว $f_x(0,0) = 0$

(c) ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่เป็นเวกเตอร์คงที่ และ $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = 0$ สำหรับทุกจุด $(x,y)$ แล้ว $f$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่

(d) ถ้าเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(x_0, y_0)$ ไปยังจุด $(x_1, y_1)$ มีค่าเป็นพหุคูณ (ที่เป็นบวก) ของ $\nabla f(x_0, y_0)$ แล้ว $f(x_0, y_0) \leq (x_1, y_1)$

## 1.8 จาโคเบียนของการแปลง

### 1.8.1 การแปลงในระนาบ

ในหัวข้อ 1.1 เราเคยกล่าวถึงการแปลงซึ่งเป็นฟังก์ชัน $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการแปลงให้ละเอียดขึ้น เพื่อนำสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการแปลงมาใช้ประโยชน์ในการศึกษาประเด็นที่สูงขึ้น

จะเห็นว่า เราได้เคยกล่าวถึงตัวอย่างของสมการอิงตัวแปรเสริม ซึ่งเป็นการส่งจาก $\mathbb{R}$ ไปเป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ หรือการส่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปเป็นพื้นผิวใน $\mathbb{R}^3$ ในส่วนนี้เราจะพิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริมในรูป

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v) \tag{1.8.1}$$

ดังนั้น สมการอิงตัวแปรเสริมนี้ จะก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างจุดในระนาบ $UV$ และระนาบ $XY$ ซึ่งเราเขียนสมการที่แสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในรูปเวกเตอร์ กล่าวคือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ในเทอมของตัวแปร $x, y$ และ $\mathbf{r}(u,v)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์อยู่ในรูปของตัวแปร $u, v$

จากสถานการณ์ดังกล่าว หากเราพิจารณาให้คู่ของ $(u,v)$ เป็นตัวแปรต้น ซึ่งก่อให้เกิดคู่ของตัวแปร $(x,y)$ ที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียว โดยทำการนิยามให้อยู่ในรูป

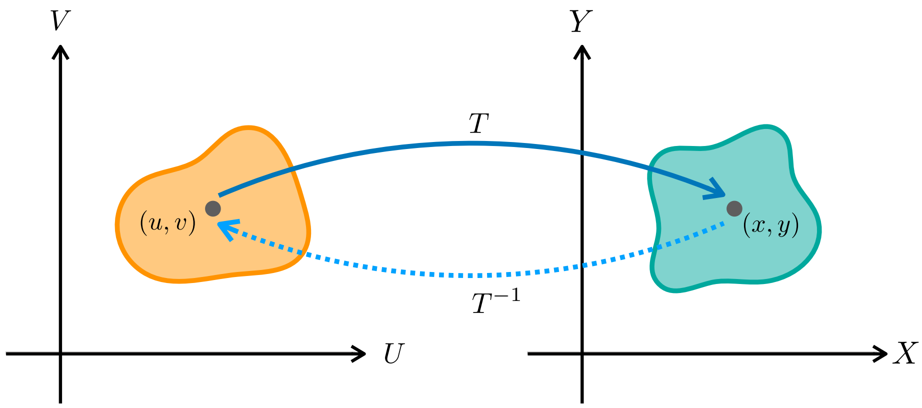
$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

เราจะเรียก $T$ ว่าเป็น**การแปลง** (transformation) จากระนาบ $UV$ ไปยังระนาบ $XY$ และเรียก $(x, y)$ ว่า **ภาพ** (image) ของ $(u, v)$ นั่นคือ $T$ **ส่ง** (map) $(u, v)$ ไปยัง $(x, y)$ เซต $R$ ของภาพทั้งหมดในระนาบ $XY$ ของเซต $S$ ในระนาบ $UV$ จะเรียกว่า ภาพของ $S$ ภายใต้ $T$ ถ้าแต่ละภาพในระนาบ $UV$ ส่งไปยัง $XY$ แล้วได้ภาพที่แตกต่างกัน จะเรียก $T$ ว่าเป็น**การส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one mapping)

ในทำนองกลับกัน หากเราพิจารณาสมการ (1.8.1) ทำการนิยาม $u, v$ ให้เป็นฟังก์ชันของ $x, y$ กล่าวคือ

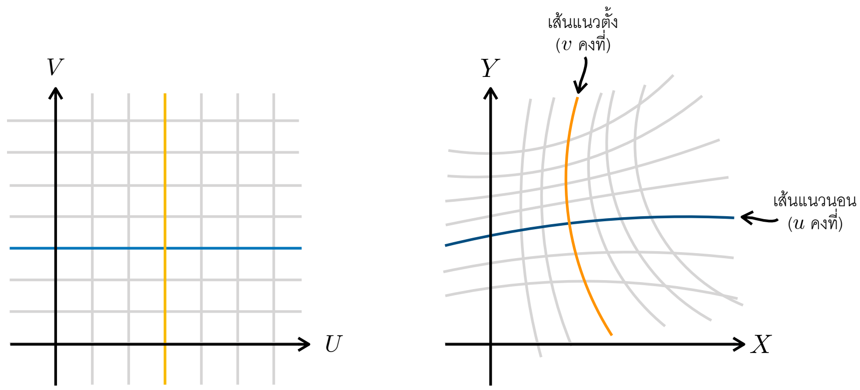
$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y) \tag{1.8.2}$$

จะได้ว่า เราสามารถสร้างการส่งที่ส่งจากระนาบ $XY$ ไปยังระนาบ $UV$ ซึ่งทำการส่งภาพของ $(u, v)$ ภายใต้การส่ง $T$ กลับมายัง $(u, v)$ การส่งนี้จะเขียนเป็น $T^{-1}$ และจะเรียกว่า **การส่งผกผัน** (invese map) ของ $T$ ซึ่งความสัมพันธ์ของการส่งแสดงได้ดังภาพ 1.43

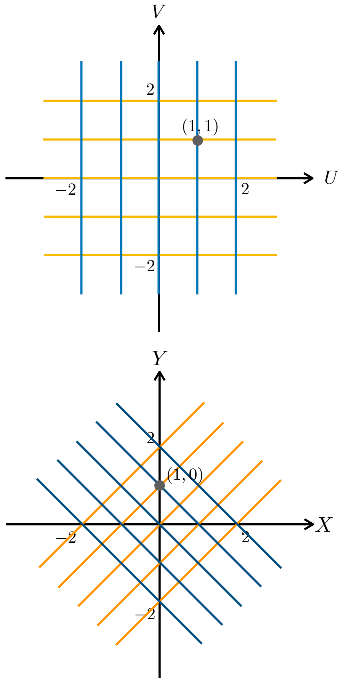



**ภาพที่** 1.43. การส่งระหว่างระนาบ $UV$ และ $XY$

เราสามารถพิจารณาการเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิตของการส่งที่เกิดภาพ $(x, y)$ จากจุด $(u, v)$ ได้ โดยสมมติว่าในระนาบ $UV$ มีเส้นแนวนอน ($v$ คงที่) ซึ่งส่งไปยังระนาบ $XY$ ก่อให้เกิดเส้นโค้งคงที่ของ $v$ บนระนาบ $XY$ และทำนองเดียวกัน มีเส้นแนวตั้ง ($u$ คงที่) ในระนาบ $UV$ ที่ส่งไปยังระนาบ $XY$ และก่อให้เกิดเส้นโค้งคงที่ของ $u$ ดังภาพ 1.44




**ภาพที่** 1.44. เส้นแนวนอนและแนวตั้งในระนาบ $UV$ ส่งไปยังเส้นโค้งคงที่ในระนาบ $XY$




**ภาพที่** 1.45. (บน) เส้นแนวตั้งและแนวนอนในระนาบ $UV$
(ล่าง) เส้นโค้งคงที่ในระนาบ $XY$

**ตัวอย่าง 1.8.1** ให้ $T$ เป็นการแปลงจากระนาบ $UV$ ไปยังระนาบ $XY$ กำหนดโดย

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

1. จงหา $T(1,1)$
2. ให้ $S$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ปิดล้อมด้วย $u = -2, u = 2, v = -2$ และ $v = 2$ ในระนาบ $UV$ จงวาดภาพจากในระนาบ $XY$ ซึ่งเกิดจากการส่ง $S$ ในระนาบ $UV$ ไปยังระนาบ $XY$

**วิธีทำ** 1. จะเห็นว่า เมื่อ $(u,v) = (1,1)$ จะได้ว่า $T(1,1) = (1,0)$

2. จากการกำหนด เราจะพิจารณาว่า ในระนาบ $XY$ จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับระนาบ $UV$ ซึ่งจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$x + y = u \qquad \text{และ} \qquad x - y = v$$

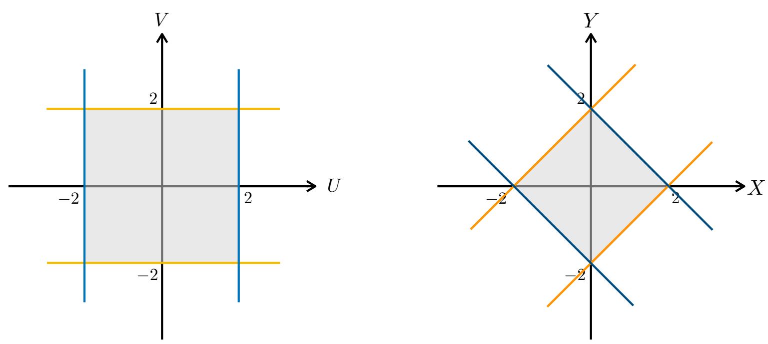
ดังนั้น สำหรับแต่ละเส้นแนวนอนเมื่อ $u = -2, -1, 0, 1, 2$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$x+y=-2, \quad x+y=-1, \quad x+y=0, \quad x+y=1, \quad x+y=2$$

และสำหรับแต่ละเส้นแนวตั้งเมื่อ $v = -2, -1, 0, 1, 2$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$x-y=-2, \quad x-y=-1, \quad x-y=0, \quad x-y=1, \quad x-y=2$$

โดยเส้นแนวนอนและเส้นแนวตั้งในระนาบ $UV$ สามารถแสดงเป็นเส้นในระนาบ $XY$ ได้ดังภาพ 1.45 ซึ่งจะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีถูกปิดล้อมด้วย $u = -2, u = 2, v = -2$ และ $v = 2$ ในระนาบ $UV$ สามารถพิจารณาได้โดยเส้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x+y=-2, x+y=2, x-y=-2$ และ $x-y=2$ ดังภาพ 1.46




**ภาพที่** 1.46. สี่เหลี่ยมจัตุรัสในระนาบ $UV$ และสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่หมุนในระนาบ $XY$

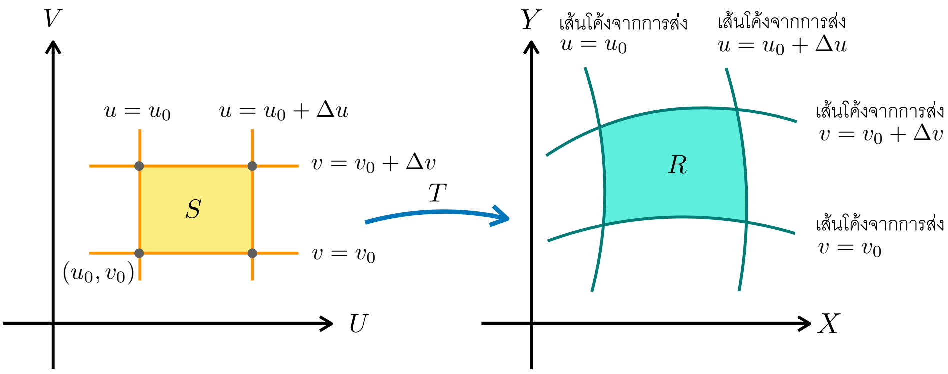
ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.8.1 เราสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ $UV$ และระนาบ $XY$ ได้จากการพิจารณาพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ในระนาบ $UV$ กับพื้นที่ที่ถูกแปลงไปในระนาบ $XY$ ภายใต้การแปลง $T$ ก่อนอื่นสมมติให้

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v)$$

สมมติว่า $\Delta u$ และ $\Delta v$ เป็นจำนวนจริงบวก พิจารณาบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $S$ ในระนาบ $UV$ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง

$$u = u_0, \quad u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0, \quad v = v_0 + \Delta v$$

ถ้า $f(u,v)$ และ $g(u,v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $\Delta u, \Delta v$ ไม่ใหญ่มากแล้ว ภาพ $S$ ที่ถูกส่งไปในระนาบ $XY$ จะเป็นบริเวณใน $R$ ซึ่งคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกบิด ดังภาพ 1.47 โดยที่บริเวณใน $R$ ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งคงที่ $u$ และ $v$ ที่สัมพันธ์กับด้านของ $S$




**ภาพที่** 1.47. การส่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากระนาบ $UV$ ไปยังสี่เหลี่ยมด้านขนานบิดในระนาบ $XY$

ถ้าเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของ $(u,v)$ ในระนาบ $UV$ แล้ว จะได้ว่าเส้นโค้งคงที่ $u$ และ $v$ ในระนาบ $XY$ เมื่อ $u = u_0$ และ $v = v_0$ จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v_0) &= f(u, v_0)\mathbf{i} + g(u, v_0)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(u_0, v) &= f(u_0, v)\mathbf{i} + g(u_0, v)\mathbf{j} \end{aligned}$$

ถ้าสมมติว่า $\Delta u$ และ $\Delta v$ เล็ก ๆ จะเห็นว่า บริเวณ $R$ สามารถประมาณได้ด้วยสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ ดังภาพ 1.48 (บน)

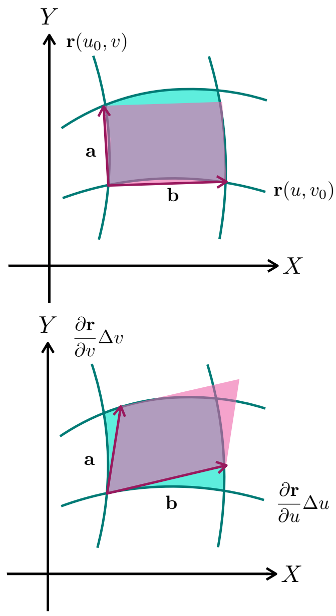
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\mathbf{a}$ สามารถประมาณได้ด้วยเวกเตอร์ที่สัมผัสเส้นโค้ง คือเวกเตอร์ $\mathbf{r}'$ ดังภาพ 1.48 (ล่าง) กล่าวคือ เวกเตอร์ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ประมาณได้โดย

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}\Delta u \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j}\right)\Delta u \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}\Delta v \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j}\right)\Delta v \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในบริเวณ $R$ ในระนาบ $XY$ สามารถประมาณได้โดย

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$




**ภาพที่** 1.48. (บน) เวกเตอร์ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ สำหรับการหาพื้นที่ในระนาบ $XY$ (ล่าง) การประมาณเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ ในระนาบ $XY$

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$

เราจึงนิยามดีเทอร์มิแนนต์หน้าส่วนประกอบ $\mathbf{k}$ ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 1.8.1 ให้ $x = f(u, v)$ และ $y = g(u, v)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในบริเวณหนึ่ง **จาโคเบียน** (Jacobian) $J$ ของการแปลง $f, g$ ในสองมิติ เทียบกับ $u, v$ นิยามโดย

$$J(u, v) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวทำให้เราได้ว่า เมื่อ $\Delta u$ และ $\Delta v$ เล็กเพียงพอ กล่าวคือ เมื่อให้ $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$ พื้นที่ของบริเวณ $R$ ในระนาบ $XY$ มีขนาดเป็น $|J(u, v)|$ เท่าของพื้นที่ $S$ ในระนาบ $UV$ นั่นคือ

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v) \to (0,0)} \frac{A_{xy}}{A_{uv}} = |J(u, v)|$$

เมื่อ $A_{xy}$ และ $A_{uv}$ คือพื้นที่ในระนาบ $XY$ และ $UV$ ตามลำดับ ดังนั้น จากที่แสดงข้างต้น เราจึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ $UV$ และระนาบ $XY$ ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.8.2 ให้ $x, y, u, v$ สัมพันธ์โดย

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \qquad & y &= g(u, v) \\ u &= F(x, y) \qquad & v &= G(x, y) \end{aligned}$$

โดยที่ $f, g, F, G$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องแล้ว

$$A_{xy} = |J(u, v)| A_{uv} \qquad \text{และ} \qquad A_{uv} = |J(x, y)| A_{xy}$$

เมื่อ $A_{xy}$ และ $A_{uv}$ คือพื้นที่ในระนาบ $XY$ และ $UV$ ตามลำดับ และ $J(u, v) = \dfrac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}, J(x, y) = \dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$

**ตัวอย่าง** 1.8.3 ให้ $R_{uv}$ เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย

$$R_{uv} : 0 \le u \le 1, \qquad 0 \le v \le 1, \qquad u + v = 1$$

กำหนดการ แปลง ซึ่ง แปลง บริเวณ ใน ระนาบ $UV$ ไป ยัง ระนาบ $XY$ ด้วย ความสัมพันธ์

$$x = 3u + 4v \qquad y = 4u$$

1. จงพิจารณาบริเวณ $R_{xy}$ ในระนาบ $XY$
2. จงคำนวณ $|J(u, v)|$

3. จงหาพื้นที่ $A_{xy}$ ของบริเวณ $R_{xy}$ ในระนาบ $XY$

4. จงคำนวณ $|J(x,y)|$

**วิธีทำ** 1. บริเวณในระนาบ $UV$ เป็นบริเวณรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จากความสัมพันธ์ที่กำหนด เราจึงพิจารณาขอบเขตของบริเวณแต่ละเส้นที่ส่งมา ซึ่งบริเวณที่ปิดล้อมสามารถแสดงได้ดังภาพ 1.49

- สำหรับเส้นตรงที่ $u = 0$ จะได้เส้นตรง $y = 0$
- สำหรับเส้นตรงที่ $v = 0$ ทำให้ได้ว่า $x = 3u$ และจาก $y = 4u$ จะได้เส้นตรง $4x = 3y$
- สำหรับเส้นตรง $u + v = 1$ ทำให้ได้เส้นตรง $x + y = 3u + 4$ และจาก $y = 4u$ จึงได้เส้นตรง $4x + y = 16$

2. จะเห็นว่า

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

ดังนั้น $|J(u,v)| = 16$

3. จากความสัมพันธ์ ทำให้ได้ว่า $A_{xy} = |J(u,v)|A_{uv}$ และเนื่องจากเราทราบว่า $A_{uv} = 1/2$ ดังนั้น $A_{xy} = (16)(\frac{1}{2}) = 8$ ตารางหน่วย

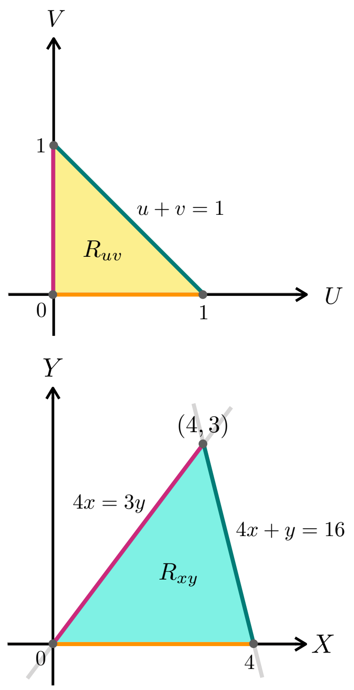
4. จากการแปลงที่กำหนดให้ จะสร้างสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ $u, v$ ในเทอมของ $x, y$ ทำให้เราได้ว่า

$$u = \frac{1}{4}y \qquad v = \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}y$$

ดังนั้น

$$J(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}$$

นั่นคือ $|J(x,y)| = \dfrac{1}{16}$ ตามต้องการ




**ภาพที่ 1.49.** (บน) บริเวณในระนาบ $UV$ (ล่าง) บริเวณในระนาบ $XY$ หลังการส่ง

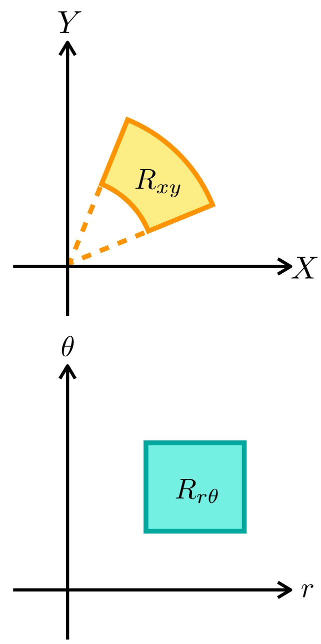
**ตัวอย่าง 1.8.4** พิจารณาระบบพิกัดฉากในระนาบ $XY$ และระบบพิกัดเชิงขั้ว $r\theta$ กำหนดการแปลงบริเวณระหว่างระนาบ $XY$ และยังระนาบ $r\theta$ ด้วยความสัมพันธ์

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ $XY$ และระนาบ $r\theta$

**วิธีทำ** จากความสัมพันธ์ของการแปลง จะเห็นว่า $r = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ หากพิจารณาบริเวณสี่เหลี่ยมในระนาบ $XY$ จะพบว่า มีความสัมพันธ์กับบริเวณในระนาบ $r\theta$ ดังภาพ 1.50 เราจึงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ กล่าวคือ

$$A_{xy} = |J(r,\theta)|A_{r\theta}$$




**ภาพที่ 1.50.** (บน) บริเวณในระนาบ $XY$ (ล่าง) บริเวณในระนาบ $r\theta$

ดังนั้น จึงพิจารณา

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

จึงได้ว่า $|J(r,\theta)| = r$ นั่นคือ

$$A_{xy} = rA_{r\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร เราสามารถนิยามจาโคเบียนได้ ดังนี้

**บทนิยาม** 1.8.2 ถ้า $x = f(u,v,w), y = g(u,v,w), z = h(u,v,w)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ณ บริเวณหนึ่งแล้ว จาโคเบียนการแปลง $J$ ของการแปลง $f, g, h$ ในสามมิติ เทียบกับ $u, v, w$ นิยามโดย

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix}$$

หากพิจารณาการแปลงจากปริภูมิสามมิติหนึ่งไปยังอีกปริภูมิสามมิติหนึ่ง เราจะได้ความสัมพันธ์ในแง่ของปริมาตรระหว่างสองปริภูมิ ซึ่งพิจารณาได้ในทำนองคล้ายกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.8.5 ให้ $x, y, z, u, v, w$ สัมพันธ์โดย

$$\begin{aligned} x &= f(u,v,w) & y &= g(u,v,w) & z &= h(u,v,w) \\ u &= F(x,y,z) & v &= G(x,y,z) & z &= H(x,y,z) \end{aligned}$$

โดยที่ $f, g, h, F, G, H$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องแล้ว

$$V_{xyz} = |J(u,v,w)|V_{uvw} \quad \text{และ} \quad V_{uvw} = |J(x,y,z)|V_{xyz}$$

เมื่อ $V_{xyz}$ และ $V_{uvw}$ คือปริมาตรในระนาบ $XYZ$ และ $UVW$ ตามลำดับ และ $J(u,v,w) = \dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}, J(x,y,z) = \dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ทำได้ในทำนองคล้ายกัน โดยในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (spanned parallelepiped) หากมีเวกเตอร์ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน สามารถหาได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามมิติ (scalar triple product) นั่นคือ $V = \|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\|$

**ตัวอย่าง** 1.8.6 กำหนดฟังก์ชันแฝง

$$\begin{aligned} f(x,y,z,u,v,w) &= x - u\sin v\cos w \\ g(x,y,z,u,v,w) &= y - u\sin v\sin w \\ h(x,y,z,u,v,w) &= z - u\cos v \end{aligned}$$

จงคำนวณจาโคเบียน $\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}$ และ $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}$

**วิธีทำ** จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\sin v\cos w & -u\cos v\cos w & u\sin v\sin w \\ -\sin v\sin w & -u\cos v\sin w & -u\sin v\cos w \\ -\cos v & u\sin v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -u^2\sin v \end{aligned}$$

และเราได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)} &= \begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -u\cos v\cos w \\ 0 & -u\cos v\sin w \end{vmatrix} \\ &= -u\cos v\sin w \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง** 1.8.7 พิจารณา ระบบ พิกัด ฉาก ใน ปริภูมิ $XYZ$ และ ระบบ พิกัด ทรงกระบอก $r\theta Z$ กำหนดการแปลงบริเวณระหว่างปริภูมิ $XYZ$ กับปริภูมิ $r\theta Z$ ด้วยความสัมพันธ์

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรในปริภูมิ $XYZ$ และปริภูมิ $r\theta Z$

**วิธีทำ** เราจึงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร กล่าวคือ

$$V_{xyz} = |J(r,\theta,z)|V_{r\theta z}$$

ดังนั้น จึงพิจารณา

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

นั่นคือ

$$V_{xyz} = rV_{r\theta z}$$

### 1.8.2 ฟังก์ชันแฝง และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง

ความสัมพันธ์หลาย ๆ ความสัมพันธ์ปรากฏอยู่ในรูปของฟังก์ชันแฝง ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ การเลือกว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรต้น อีกตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตามอาจกำหนดได้ยาก เช่น ในบางย่านจุดเปิด เราอาจสร้างความสัมพันธ์ให้ตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตาม และตัวแปรอื่น ๆ เป็นตัวแปรต้นได้ แต่เมื่อเปลี่ยนย่านจุดเปิด ความสัมพันธ์ที่กำหนดไว้แต่ต้นก็ไม่เป็นเช่นนั้น

คำถามที่เราให้ความสนใจคือ เราจะสามารถหาสูตรของอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงนั้นได้หรือไม่ และฟังก์ชันแฝงเหล่านั้นจะสามารถหาอนุพันธ์ได้หรือไม่ เราจะมาเริ่มต้นพิจารณาสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1.8.8** ให้ $u$ และ $v$ เป็นฟังก์ชันแฝงในพจน์ของ $x, y$ กำหนดโดย $F(x,y,u,v) = 0$ และ $G(x,y,u,v) = 0$ แล้ว จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

**พิสูจน์** ให้ $F(x,y,u,v) = 0, G(x,y,u,v) = 0, u = u(x,y)$ และ $v = v(x,y)$ พิจารณารูปผลต่างเชิงอนุพันธ์ของ $F$ และ $G$ ดังนี้

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0 \qquad (1.8.3)$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0 \qquad (1.8.4)$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

แทน $du$ และ $dv$ ในสมการ (1.8.3) และ (1.8.4) และรวมพจน์ $dx, dy$ จะได้ว่า

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = 0$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = 0$$

เพื่อความสะดวกในการเขียน ต่อจากนี้ไปจะขอใช้สัญลักษณ์ตัวพิมพ์ห้อยสำหรับอนุพันธ์ย่อย

เนื่องจาก $dx$ และ $dy$ เป็นอิสระเชิงเส้น กล่าวคือ สำหรับ $A, B$ ถ้า $Adx + Bdy = 0$ แล้ว $A = 0$ และ $B = 0$ จึงได้ว่า

$$F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \qquad F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0$$

$$G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0, \qquad G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0$$

ดังนั้น เราจึงได้ระบบสมการในพจน์ของ $u_x, v_x$ และ $u_y, v_y$ สองระบบสมการ คือ

$$\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -G_x \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_y \\ -G_y \end{bmatrix}$$

โดยกฎของคราเมอร์ ทำให้ได้ว่า

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

ตามต้องการ □

สำหรับฟังก์ชันแฝง มีทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญที่ช่วยรับประกันการมีอนุพันธ์ ทฤษฎีบทนี้มีชื่อว่า ทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง (implicit function theorem) ซึ่งครอบคลุมผลของทฤษฎีบทที่ได้กล่าวมาข้างต้น เราจะยกทฤษฎีบทนี้มาโดยละการพิสูจน์ไว้ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.8.9 (ทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง) ให้ $f(x,y,u,v)$ และ $g(x,y,u,v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (เมื่อเทียบกับแต่ละตัวในสี่ตัวแปร) ต่อเนื่องในย่านจุดเปิดของจุด $\hat{P}_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ โดยที่ $f(x,y,u,v) = 0$ และ $g(x,y,u,v) = 0$ แล้ว

1. ถ้า $\left.\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{\hat{P}_0} \neq 0$ แล้ว สำหรับฟังก์ชันแฝง $f(x,y,u,v) = 0$ และ $g(x,y,u,v) = 0$ จะสามารถนิยามฟังก์ชันต่อเนื่อง $u = u(x,y)$ และ $v = v(x,y)$ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยแต่ละตัวต่อเนื่องในย่านจุดเปิดของจุด $P_0(x_0,y_0)$ โดยที่ฟังก์ชันเหล่านี้มีสมบัติว่า

$$u_0 = u(x_0,y_0) \text{ และ } v_0 = v(x_0,y_0)$$

2. อนุพันธ์ย่อยของ $u$ และ $v$ ที่ $P_0$ จะหาได้จากอัตราส่วนของจาโคเบียน

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

**ตัวอย่าง 1.8.10** กำหนด

$$u^2 - v = 3x + y, \qquad u - 2v^2 = x - 2y$$

จงหา $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

**วิธีทำ** เราสมมติให้ $F(x,y,u,v) = u^2 - v - 3x - y = 0$ และ $G(x,y,u,v) = u - 2v^2 - x + 2y = 0$ โดยทฤษฎีบท 1.8.8 จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1-12v}{1-8uv}$$

และทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{-4u-1}{1-8uv}$$

เมื่อ $1 - 8uv \neq 0$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายผลของจาโคเบียนไประบบสมการซึ่งมีสมการสามสมการ และมีตัวแปรต้นอย่างน้อยสองตัวแปรได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับการพิสูจน์ทำได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 1.8.8

**ทฤษฎีบท 1.8.11** ให้ $u$, $v$ และ $w$ เป็นฟังก์ชันแฝงในพจน์ของ $x, y$ กำหนดโดย $F(x,y,u,v,w) = 0$, $G(x,y,u,v,w) = 0$ และ $H(x,y,u,v,w) = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

**ตัวอย่าง 1.8.12** ให้ $u, v, w$ เป็นฟังก์ชันแฝงของตัวแปร $x, y$ จงหา $u_x$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันดังระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} xy^2 + u^2v + w &= 5 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 &= 0 \\ xu + yv + xyw &= 0 \end{aligned}$$

จงหา $u_x$ ที่ $x = 1, y = 0, u = 0, v = 1, w = 0$

**วิธีทำ** เราสมมติให้

$$\begin{aligned} F(u, v, w, x, y) &= xy^2 + u^2v + w - 5 \\ G(u, v, w, x, y) &= x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 \\ H(u, v, w, x, y) &= xu + yv + xyw \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v & F_w \\ G_x & G_v & G_w \\ H_x & H_v & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} y^2 & u^2 & 1 \\ 2x & 2v & 2w \\ u+yw & y & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2uv & u^2 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ x & y & xy \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{uv - u^3w + vwy - u^2w^2y - xy + u^2x^2y + wy^3 - vxy^3}{vx - u^2wx - uy + 2uvwy + u^3xy - 2uv^2xy}$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 1, y = 0, u = 0, v = 1, w = 0$ จะได้ว่า $u_x = 0$ ตามต้องการ

### 1.8.3 สมบัติของจาโคเบียน

เราพิจารณาสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับจาโคเบียน ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1.8.13** (กฎลูกโซ่สำหรับจาโคเบียน)
ให้ $x = f(u, v), y = g(u, v)$ เป็นการแปลง โดยที่ $u, v$ มีความสัมพันธ์กับตัวแปร $s, t$ ดังการแปลง $u = \phi(s, t), v = \psi(s, t)$ และ $f, g, \phi, \psi$ หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

**พิสูจน์** เราสามารถเขียน $x, y$ ในรูปการประกอบการแปลงได้ คือ

$$x = f(u, v) = f(\phi(s, t), \psi(s, t)) \qquad y = g(u, v) = g(\phi(s, t), \psi(s, t))$$

จากนิยามของจาโคเบียน จะได้ว่า

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} & \dfrac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} & \dfrac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} \end{vmatrix}$$

ซึ่งสำหรับแต่ละพจน์ โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} &= f_u\phi_s + f_v\psi_s = x_u u_s + x_v v_s \\ \frac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} &= f_u\phi_t + f_v\psi_t = x_u u_t + x_v v_t \\ \frac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} &= g_u\phi_s + g_v\psi_s = y_u u_s + y_v v_s \\ \frac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} &= g_u\phi_t + g_v\psi_t = y_u u_t + y_v v_t \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} &= \begin{vmatrix} x_u u_s + x_v v_s & x_u u_t + x_v v_t \\ y_u u_s + y_v v_s & y_u u_t + y_v v_t \end{vmatrix} \\ &= (x_u u_s + x_v v_s)(y_u u_t + y_v v_t) - (y_u u_s + y_v v_s)(x_u u_t + x_v v_t) \\ &= x_u u_s y_u u_t + x_u u_s y_v v_t + x_v v_s y_u u_t + x_v v_s y_v v_t \\ &\qquad - y_u u_s x_u u_t - y_u u_s x_v v_t - y_v v_s x_u u_t - y_v v_s x_v v_t \\ &= x_u u_s y_v v_t + x_v v_s y_u u_t - y_u u_s x_v v_t - y_v v_s x_u u_t \\ &= u_s v_t (x_u y_v - x_v y_u) - u_t v_s (x_u y_v - x_v y_u) \\ &= (x_u y_v - x_v y_u)(u_s v_t - u_t v_s) \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 1.8.13 เราจะสามารถขยายกฎลูกโซ่ไปสู่กรณีฟังก์ชันหลายตัวแปรได้เช่นกัน และสำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกันของจาโคเบียนของการแปลงที่เป็นการแปลงผกผันซึ่งกันและกัน เมื่อจาโคเบียนไม่เป็นศูนย์

**ทฤษฎีบท** 1.8.14 (ตัวผกผันของจาโคเบียน)
ให้ $x = f(u,v), y = g(u,v)$ เป็นการแปลงโดยที่มีความสัมพันธ์ผกผันกับตัวแปร $u, v$ ดังการแปลง $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ ซึ่ง $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ และ $J(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ แล้ว $J(u,v) = \dfrac{1}{J(x,y)}$

**พิสูจน์** เนื่องจาก $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ เป็นการแปลงผกผันของ $x = f(u,v), y = g(u,v)$ จึงได้ว่า $s = x$ และ $t = y$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.8.13 จะได้

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1$ และ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0, \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ จึงได้ว่า

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

นั่นคือ $J(u,v) = \dfrac{1}{J(x,y)}$ ตามต้องการ $\square$

สมบัติดังกล่าวนี้ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญอีกทฤษฎีบทหนึ่ง คือ ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน (inverse function theorem) ซึ่งมีประโยชน์ในการศึกษาประเด็นต่าง ๆ เช่น ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางประเภท ในบางครั้ง สมการเดิมอาจแก้ได้ไม่ง่ายนัก แต่หากมีการแปลงสมการดังกล่าวไปยังสมการอื่นที่แก้ได้ง่ายขึ้น ซึ่งทฤษฎีบทดังกล่าวจะช่วยให้เรายืนยันว่า เราสามารถทำการแปลงระหว่างระบบพิกัดสองระบบพิกัดได้ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.8.15 (ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน)
ให้ $x, y$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์ต่อเนื่องในเทอมของ $u, v$ ในบางย่านจุดเปิด $P_0(u_0, v_0)$ ในระนาบ $UV$ นิยามโดย

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v)$$

แล้ว ถ้า ณ จุด $P_0$ จาโคเบียน $J(x,y) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} \neq 0$ แล้ว การแปลง $x = f(u,v), y = g(u,v)$ สามารถหาตัวผกผัน $u(x,y), v(x,y)$ ได้ในบางย่านจุดเปิด $P_0(u_0, v_0)$ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ $x, y$ ต่อเนื่องในบางย่านจุดเปิดของจุด $(x_0, y_0) = (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0))$ ในระนาบ $XY$

**พิสูจน์** นิยามฟังก์ชัน $F$ และ $G$ โดย

$$F(x,y,u,v) = f(u,v) - x, \qquad G(x,y,u,v) = g(u,v) - y$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $F, G$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องเทียบกับตัวแปรทั้งสี่ และ $F, G$ มีค่าเป็นศูนย์ที่จุด $\hat{P}_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง ถ้า

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{\hat{P}_0} = \left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{\hat{P}_0} = J(x,y)$$

มีค่าไม่เป็นศูนย์แล้ว สำหรับ $F = G = 0$ จะสามารถหาฟังก์ชัน $u, v$ ในเทอมของ $x, y$ ได้ ซึ่งจะได้การแปลง $x = f(u,v), y = g(u,v)$ ตามต้องการ $\square$

# แบบฝึกหัดที่ 1.8

1. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาจาโคเบียน $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

   (a) $x = u + 4v, y = 3u - 5v$

   (b) $x = \sin u + \cos v, y = -\cos u + \sin v$

   (c) $u = 2x - 5y, v = x + 2y$

   (d) $u = x^2 + y^2, y = x^2 + y^2 (x > 0, y > 0)$

2. กำหนดการแปลง $x = 2u, y = 3v$ โดยที่บริเวณ $S$ ในระนาบ $UV$ คือวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$

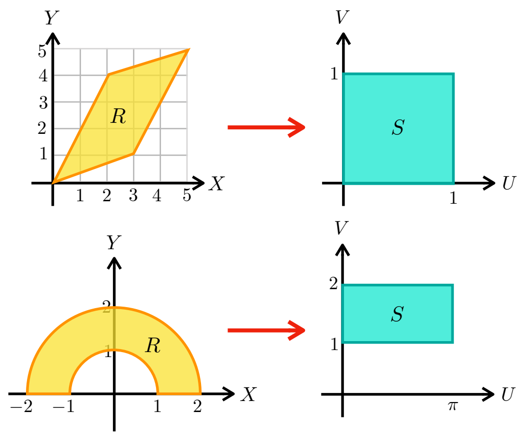
   (a) จงวาดบริเวณในระนาบ $XY$

   (b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ $UV$ และระนาบ $XY$

3. กำหนดบริเวณ $R$ ในระนาบ $XY$ สมมติว่าบริเวณ $R$ ถูกส่งไปเป็นบริเวณ $S$ ในระนาบ $UV$

   (a) จงหาการแปลงที่สอดคล้องกับภาพที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง

   (b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ $XY$ และระนาบ $UV$




4. กำหนดฟังก์ชัน

$$
\begin{aligned}
f(x,y,u,v,w) &= x^2y + u\sin v + wy^3 \\
g(x,y,u,v,w) &= e^{xy} + w\ln(1 + v + y^2) + xu^2 \\
h(x,y,u,v,w) &= \sin(x + y + u + v)
\end{aligned}
$$

   จงคำนวณจาโคเบียนต่อไปนี้

   (a) $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$

   (b) $\dfrac{\partial(f,h)}{\partial(v,w)}$

   (c) $\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}$

   (d) $\dfrac{\partial(f,h,g)}{\partial(u,x,v)}$

5. กำหนดฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= xu + yu - uv \\ G(x,y,u,v) &= u\sin(xy) \\ H(x,y,u,v) &= x^2 - y^2 + u^2 + v^2 \end{aligned}$$

จงคำนวณจาโคเบียนต่อไปนี้ ที่จุด $(x,y,u,v) = (0,1,1,2)$

(a) $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ (c) $\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,u)}$

(b) $\dfrac{\partial(G,F)}{\partial(u,x)}$ (d) $\dfrac{\partial(G,F,H)}{\partial(u,v,y)}$

6. กำหนดการแปลงเชิงเส้นที่นิยามโดย $x = u + v + w$, $y = u - v + w$, $z = u + v - w$

(a) จงพิจารณาบริเวณ $R_{uvw}$ ในปริภูมิ $UVW$ เมื่อบริเวณ $R_{xyz}$ ในปริภูมิ $XYZ$ คือลูกบาศก์ ซึ่ง $0 \le x, y, z \le 1$

(b) จงใช้การหาปริมาตรโดยตรงเพื่อแสดงว่า

$$|J(x,y,z)| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{V_{xyz}}{V_{uvw}}$$

เมื่อ $V_{xyz}$ คือปริมาตรของลูกบาศก์ $R_{xyz}$ ในปริภูมิ $XYZ$ และ $V_{uvw}$ คือปริมาตรของบริเวณ $R_{uvw}$

7. พิจารณาระบบพิกัดทรงกลม ซึ่งมีการแปลงคือ $x = u\sin v\cos w$, $y = u\sin v\sin w$ และ $z = u\cos v$

(a) จงพิจารณาบริเวณ $R_{xyz}$ ในปริภูมิ $XYZ$ เมื่อบริเวณ $R_{uvw}$ ในปริภูมิ $UVW$ คือลูกบาศก์ ซึ่งปิดล้อมด้วย $u_0 \le u \le u_0 + \Delta u$, $v_0 \le v \le v_0 + \Delta v$, $w_0 \le w \le w_0 + \Delta w$ โดยที่ $u_0 \ne 0, v_0 \ne n\pi$ และ $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ เป็นจำนวนจริงบวกที่เล็กๆ

(b) จงใช้การหาปริมาตรโดยตรงเพื่อแสดงว่า

$$\lim_{(\Delta u,\Delta v,\Delta w)\to(0,0,0)} \left(\frac{\text{ปริมาตรของ } R_{xyz}}{\text{ปริมาตรของลูกบาศก์ } R_{uvw}}\right) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$$

8. ถ้า $u = \dfrac{x+y}{1-xy}$ และ $v = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y$ แล้ว

(a) จงหา $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

(b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $u$ และ $v$ เมื่อ $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$

9. ถ้า $x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v)$ และ $F(x,y,z) = 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz = 0$$

10. ถ้า $x, y, z$ เป็นฟังก์ชันของ $u, v, w$ และ $u, v, w$ เป็นฟังก์ชันของ $r, s, t$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}$$

11. สมมติให้ $F(u,v,w,x,y) = 0$, $G(u,v,w,x,y) = 0$, $H(u,v,w,x,y) = 0$ จากสมการดังกล่าว เราสามารถพิจารณาให้ตัวแปรสามตัวแปรในห้าตัวแปร เป็นตัวแปรตาม โดยมีอีกสองตัวแปรที่เหลือเป็นตัวแปรต้น เช่น หากพิจารณา $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ เราจะเห็นว่า $v$ เป็นตัวแปรตาม โดยที่ $y$ เป็นตัวแปรต้น แต่เรายังไม่ทราบว่าตัวแปรอิสระที่เหลือเป็นตัวแปรอะไร เราจึงกำหนดสัญลักษณ์ $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ หมายถึง การหา $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ โดยที่ $x$ เป็นค่าคงที่ และเป็นตัวแปรต้นอีกตัวหนึ่ง

    จงหา $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x, \left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_w, \left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_y$

12. ในทางเทอร์โมไดนามิกส์ ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน $P$ ปริมาตร $V$ และอุณหภูมิ $T$ กำหนดโดย $F(P,V,T) = 0$ สำหรับฟังก์ชัน $F$ ใด ๆ ในเทอมของ $P, V, T$

    (a) จงหา $\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\dfrac{\partial T}{\partial V}\right|_P$

    (b) จงแสดงว่า $\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\dfrac{\partial T}{\partial V}\right|_P \left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -1$

## 1.9 การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์หลายชั้น

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยทำการเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f(g(u))g'(u)du \tag{1.9.1}$$

เมื่อ $g$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งไม่ว่า $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด เราสามารถเขียนสมการ (1.9.1) ให้อยู่ในรูป

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(g(u))|g'(u)|du \tag{1.9.2}$$

เมื่อ $\alpha, \beta$ เป็นขอบเขตของปริพันธ์ โดยที่ $\alpha < \beta$

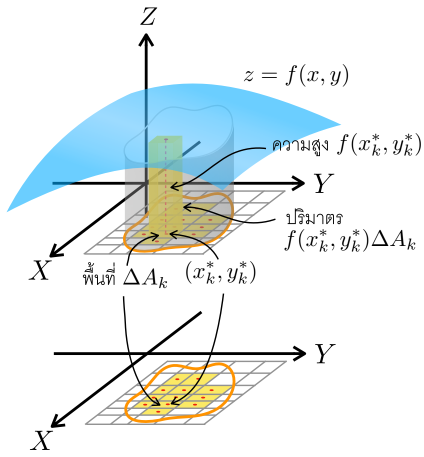
จะเห็นว่า การเปลี่ยนตัวแปรดังกล่าวมีพจน์ $|g'(u)|$ ซึ่งทำให้เกิดการเปลี่ยนตัวแปรได้ ดังนั้น สำหรับกรณีปริพันธ์หลายชั้น การเปลี่ยนระบบพิกัดก็ควรดำเนินการสอดคล้องกัน ซึ่งเราได้พัฒนาแนวคิดของจาโคเบียนการแปลงแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา

จากสมบัติที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่และปริมาตรระหว่างสองระบบพิกัดดังปรากฏในทฤษฎีบท 1.8.2 และ 1.8.5 ทำให้เราสามารถเปลี่ยนระบบพิกัดการอินทิเกรตของปริพันธ์หลายชั้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.9.1 (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สองชั้น)
ถ้าการแปลง $x = x(u,v), y = y(u,v)$ ส่งบริเวณ $S$ ในระนาบ $UV$ ไปยังบริเวณ $R$ ในระนาบ $XY$ และจาโคเบียน $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ไม่เป็นศูนย์ และไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน $S$ แล้ว จะได้ว่า

$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$$

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราทราบว่าปริพันธ์สองชั้น $\iint_R f(x,y)dA_{xy}$ เปรียบเสมือนกับการหาปริมาตรที่มีพื้นที่ฐานคือ $R$ และปิดล้อมด้านบน ซึ่งเป็นความสูงด้วย $f(x,y)$ โดยขั้นตอนโดยคร่าว ๆ ในการหาปริพันธ์สองชั้นตามปกติ ดังภาพ 1.51 คือ




**ภาพที่** 1.51. นิยามของปริพันธ์สองชั้นและบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก

1. แบ่งบริเวณ $R$ ออกเป็นตารางช่องเล็ก ๆ $n$ ช่อง สมมติให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ช่องที่ $k$ คือ $\Delta A_k$

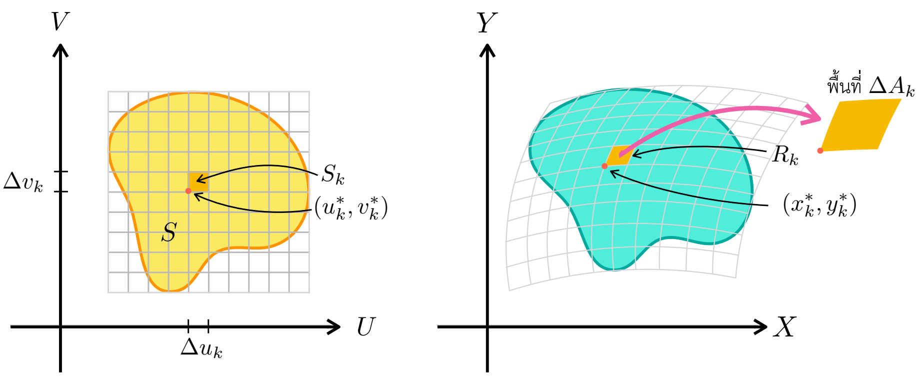
2. ในพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าช่องที่ $k$ เลือกจุด $(x_k^*, y_k^*)$ ซึ่งจะได้ความสูงของแท่งปริซึมฐานสี่เหลี่ยมนี้ ณ จุด $(x_k^*, y_k^*)$ คือ $f(x_k^*, y_k^*)$ ทำให้ได้ปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมคือ $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ และผลรวมของปริมาตรของปริซึม $n$ แท่งคือ

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

3. เมื่อเพิ่มจำนวนแท่งปริซึมให้ $n \to \infty$ จะทำให้ได้ปริมาตรที่ใกล้เคียงตามที่ต้องการ นั่นคือ

$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

ในกรณีที่มีการเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์สองชั้น เราสามารถพิจารณาปัญหาดังกล่าวได้ในทำนองคล้ายกัน ดังภาพ 1.52 กล่าวคือ




**ภาพที่** 1.52. การส่งสี่เหลี่ยมบริเวณจากระนาบ $UV$ ไปยังบริเวณในระนาบ $XY$

1. จากตารางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระนาบ $UV$ สมมติให้ช่องที่ $k$ คือ $S_k$ มีความกว้าง $\Delta u_k$ และความสูง $\Delta v_k$ ในที่นี้ เราจะเลือกจุด $(u_k^*, v_k^*)$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราจะเลือกจุด $(u_k^*, v_k^*)$ เป็นจุดมุมซ้ายล่างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

2. การแปลง $T$ ในสมมติฐานของทฤษฎีบท 1.9.1 ซึ่งแปลง $x = x(u, v), y = y(u, v)$ จะส่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $S_k$ ไปยังรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเชิงโค้ง $R_k$ ในระนาบ $XY$ และจุด $(u_k^*, v_k^*)$ จะถูกส่งไปยังจุด $(x_k^*, y_k^*) = (x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*))$ ในบริเวณ $R_k$ สมมติว่าพื้นที่ $R_k$ แทนด้วย $\Delta A_k$

3. จากความสัมพันธ์ของการแปลงของพื้นที่ ทำให้เราสามารถพิจารณาได้ว่า

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA_{xy} &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u_k \Delta v_k\end{aligned}$$

   โดยที่จาโคเบียนคำนวณที่จุด $(u_k^*, v_k^*)$

4. เมื่อให้ $n \to \infty$ ทำให้เราได้ว่า

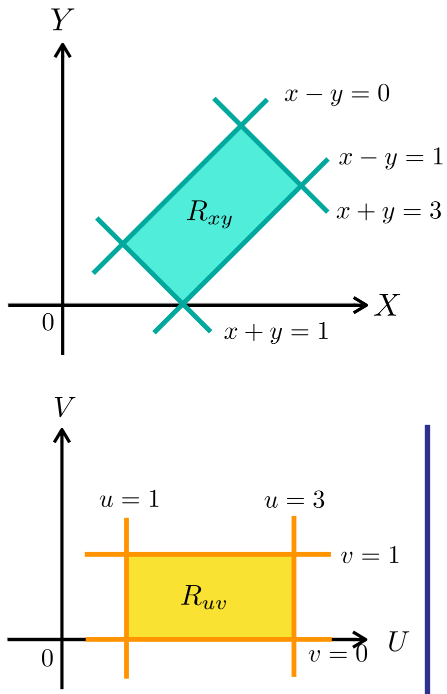
$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$$

   ตามต้องการ

**ตัวอย่าง 1.9.2** จงคำนวณ

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

เมื่อ $R$ เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x - y = 0, x - y = 1, x + y = 1, x + y = 3$




**ภาพที่** 1.53. (บน) บริเวณในระนาบ $XY$ (ล่าง) บริเวณในระนาบ $UV$

**วิธีทำ** จะเห็นว่า การหาปริพันธ์โดยวิธีปกติทำได้ไม่ง่ายนัก เนื่องจากบริเวณที่หาปริพันธ์ไม่สามารถระบุขอบเขตได้ง่าย อย่างไรก็ตาม หากสังเกตจากตัวถูกปริพันธ์และขอบเขตของบริเวณที่หาปริพันธ์ จะเห็นว่า เราสมมติให้

$$u = x + y, \qquad v = x - y$$

ทำให้ขอบเขตของบริเวณในระนาบ $XY$ เปลี่ยนแปลงเป็น $u = 1, u = 3, v = 0, v = 1$ ดังภาพ 1.53
เพื่อจะใช้ทฤษฎีบท 1.9.1 เราจะหาจาโคเบียนการแปลง $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ ดังนั้น เราจึงสร้างความสัมพันธ์ $x, y$ ในพจน์ของ $u, v$ นั่นคือ เราได้ว่า

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

ซึ่งเราได้ว่า

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

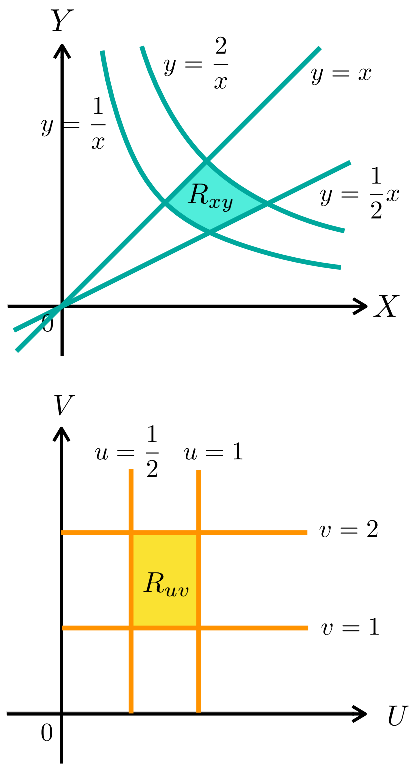
ดังนั้น เราจึงได้ปริพันธ์สองชั้น คือ

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA &= \iint_S \frac{v}{u}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv} \\ &= \iint_S \frac{v}{u}\left|-\frac{1}{2}\right| dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_1^3 \frac{v}{u}\, du\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v\ln|u|\Big|_{u=1}^{3} dv \\ &= \frac{1}{2}\ln 3\int_0^1 v\, dv = \frac{1}{4}\ln 3\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 1.9.3** จงคำนวณ

$$\iint_R e^{xy}\, dA$$

เมื่อ $R$ เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=\frac{1}{2}x,\ y=x,\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{2}{x}$




**ภาพที่ 1.54.** (บน) บริเวณในระนาบ $XY$ (ล่าง) บริเวณในระนาบ $UV$

**วิธีทำ** เราจะเห็นว่า ตัวถูกปริพันธ์เป็นพจน์ของ $e^{xy}$ ซึ่งการหาปริพันธ์บนบริเวณที่ปิดล้อมสามารถพิจารณาโดยวิธีปกติได้ยาก แต่หากเราทำการแปลง โดยพิจารณาขอบที่ปิดล้อม เขียนได้ในรูป

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2},\qquad \frac{y}{x}=1,\qquad xy=1,\qquad xy=2$$

ดังนั้น เราสามารถแปลงขอบเขต โดยให้

$$u=\frac{y}{x},\qquad v=xy$$

ดังนั้น ขอบเขตในระนาบ $UV$ จะเปลี่ยนแปลงเป็น $u=1/2, u=1, v=1, v=2$ ดังภาพ 1.54 ซึ่งเราสามารถหาความสัมพันธ์ $x,y$ ในพจน์ของ $u,v$ ได้โดย

$$x=\sqrt{v/u},\qquad y=\sqrt{uv}$$

ซึ่งเราสามารถหาจาโคเบียนได้โดย

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2u}$$

ดังนั้น เราจึงได้ปริพันธ์สองชั้น คือ

$$\begin{aligned}\iint_R e^{xy}\, dA &= \iint_S e^v\left|-\frac{1}{2u}\right| dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\iint_S \frac{1}{u}e^v\, dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2\int_{1/2}^1 \frac{1}{u}e^v\, du\, dv\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 e^v \ln|u|\Big|_{u=1/2}^{1} dv$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 e^v\,dv = \frac{1}{2}(e^2 - e)\ln 2$$

**หมายเหตุ** สังเกตว่า เราอาจใช้ทฤษฎีบท 1.8.14 ช่วยในการคำนวณจาโคเบียนได้ หากทราบว่าจาโคเบียนไม่เป็นศูนย์ เพื่อที่จะได้ไม่ต้องจัดรูป $u, v$ ในเทอมของ $x, y$

ในทำนองเดียวกันกับปริพันธ์สองชั้น ทำให้เราสามารถได้ผลสำหรับปริพันธ์สามชั้นได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.9.4 (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สามชั้น)
ถ้าการแปลง $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ ส่งบริเวณ $S$ ในปริภูมิ $UVW$ ไปยังบริเวณ $R$ ในปริภูมิ $XYZ$ และจาโคเบียน $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ ไม่เป็นศูนย์ และไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน $S$ แล้ว จะได้ว่า

$$\iiint_R f(x, y, z)dR_{xyz}$$
$$= \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dR_{uvw}$$

ดังนั้น จะเห็นว่า ในการศึกษาแคลคูลัสพื้นฐานที่มีการเปลี่ยนระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉาก เป็นระบบพิกัดอื่น ๆ เช่น ระบบพิกัดเชิงขั้ว ระบบพิกัดทรงกระบอก หรือระบบพิกัดทรงกลม การเปลี่ยนระบบพิกัดนั้นต้องใช้จาโคเบียนการแปลงทั้งสิ้น ซึ่งผู้อ่านได้เห็นความสัมพันธ์ดังกล่าวแล้วในตัวอย่าง 1.8.4, 1.8.7 และ 1.8.6

# แบบฝึกหัดที่ 1.9

1. จงใช้การแปลง $u = x - 2y, v = 2x + y$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R \frac{x - 2y}{2x + y}\,dA$$

   เมื่อ $R$ เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x - 2y = 1, x - 2y = 4, 2x + y = 1, 2x + y = 3$

2. จงใช้การแปลง $u = x + y, v = x - y$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R (x - y)e^{x^2 - y^2}\,dA$$

   เมื่อ $R$ เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x + y = 0, x + y = 1, x - y = 1, x - y = 4$

3. จงใช้การแปลง $u = x^2 - y^2, v = x^2 + y^2$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R xy\, dA$$

เมื่อ $R$ เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16$

4. จงใช้การแปลง $u = x, v = z - y, w = xy$ สำหรับคำนวณ

$$\iiint_G (z - y)^2 xy\, dV$$

เมื่อ $G$ เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = 1, x = 3, z = y, z = y + 1, xy = 2, xy = 4$

5. จากกฎลูกโซ่ของจาโคเบียน กล่าวคือ

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1$$

จงหาปริมาตร $V$ ของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งปิดล้อมด้วยระนาบ $x + y + 2z = \pm 3, x - 2y + z = \pm 2, 4x + y + z = \pm 6$

6. จงเลือกการแปลงที่เหมาะสมสำหรับการเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์สองชั้น เมื่อกำหนดบริเวณให้ดังนี้

   (a) $\displaystyle\iint_R \frac{y - 4x}{y + 4x}\, dA$ เมื่อ $R$ ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 4x, y = 4x + 2, y = 2 - 4x, y = 5 - 4x$

   (b) $\displaystyle\iint_R \frac{\sin(x - y)}{\cos(x + y)}\, dA$ เมื่อ $R$ ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 0, y = x, x + y = \pi/4$

   (c) $\displaystyle\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\, dA$ เมื่อ $R$ เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีจุดยอดคือ $(0, 1), (1, 0), (0, 4), (4, 0)$

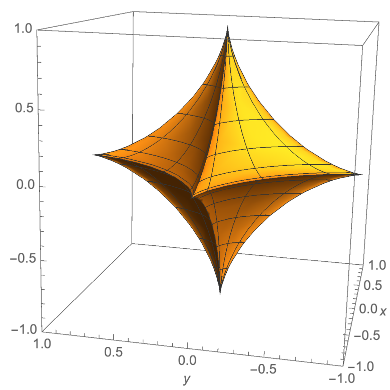
7. “ทรงกลมดาวเคราะห์น้อย” (asteroidal sphere) ดังภาพ 1.55 กำหนดดังสมการ

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$$

จงหาปริมาตรของทรงกลมดาวเคราะห์น้อยโดยใช้ปริพันธ์สามชั้น เมื่อกำหนด

$$x = \rho(\sin\phi\cos\theta)^3, \quad y = \rho(\sin\phi\sin\theta)^3, \quad z = \rho(\cos\phi)^3$$

โดยที่ $0 \le \rho \le a, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$




**ภาพที่** 1.55. ทรงกลมดาวเคราะห์น้อย

## 1.10 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

จากนิยามของอนุพันธ์ย่อย หาก $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ $x, y$ อนุพันธ์ย่อยเทียบกับแต่ละตัวแปรก็เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรเช่นเดียวกัน หากอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ หาค่าได้แล้ว เราจะเรียกอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของอนุพันธ์ย่อยได้เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว โดยใช้นิยาม

**บทนิยาม** 1.10.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $f_x$ และ $f_y$ หาค่าได้แล้ว อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ $f$ สามารถหาได้โดย

1. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $f$ เทียบกับ $x$ เขียนแทนด้วย $f_{xx}$, $\partial^2 f/\partial x^2$, $D_{xx}f(x, y)$ หรือ $f_{xx}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$

2. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $f$ เทียบกับ $y$ เขียนแทนด้วย $f_{yy}$, $\partial^2 f/\partial y^2$, $D_{yy}f(x, y)$ หรือ $f_{yy}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x, y + \Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y}$$

3. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $f$ เทียบกับ $x$ ก่อน แล้วจึงเทียบกับ $y$ เขียนแทนด้วย $f_{xy}$, $\partial^2 f/\partial y \partial x$, $D_{xy}f(x, y)$ หรือ $f_{xy}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$

4. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $f$ เทียบกับ $y$ ก่อน แล้วจึงเทียบกับ $x$ เขียนแทนด้วย $f_{yx}$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$, $D_{yx}f(x, y)$ หรือ $f_{yx}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตดังกล่าวหาค่าได้

สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสองในแบบที่ 3 และ 4 ตามนิยาม 1.10.1 จะเรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยผสม** (mixed second-order partial derivatives) ทั้งนี้ อนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ อาจเรียกว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง

เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าสองได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะเห็นว่า สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสาม จะมีอนุพันธ์ย่อยอันดับสามทั้งหมดแปดแบบ ($2^3$ รูปแบบที่เป็นไปได้นั่นเอง)

**ตัวอย่าง** 1.10.1 กำหนดให้ $f(x, y) = e^x \cos y + 2xy + y^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองทั้งหมดที่เป็นไปได้

**วิธีทำ** จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \cos y + 2y & \qquad f_y &= -e^x \sin y + 2x + 2y \\ f_{xx} &= e^x \cos y & f_{yy} &= -e^x \cos y + 2 \\ f_{xy} &= -e^x \sin y + 2 & f_{yx} &= -e^x \sin y + 2 \end{aligned}$$

### 1.10.1 เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการเท่ากันของอนุพันธ์อันดับสูง

จากตัวอย่าง 1.10.1 จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อยผสม $f_{xy} = f_{yx}$ คำถามที่น่าสนใจ คือ อนุพันธ์ย่อยผสม $f_{xy}$ และ $f_{yx}$ เท่ากันเสมอในทุกกรณีหรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า **ไม่**เสมอไปที่อนุพันธ์ย่อยผสมจะเท่ากัน

**ตัวอย่างค้าน** 1.10.2 (ฟังก์ชันเดียวกันกับตัวอย่าง 1.4.4) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $f_{xy}$ และ $f_{yx}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**วิธีทำ** จากตัวอย่าง 1.4.4 เราได้แสดงแล้วว่า

$$f_x(0,y) = \begin{cases} -y & ,y \neq 0 \\ 0 & ,y = 0 \end{cases}$$

และ

$$f_y(x,0) = \begin{cases} x & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $f_{xy}$ และ $f_{yx}$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,0+\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1 \end{aligned}$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(0+\Delta x, 0y) - f_y(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$

ก่อนอื่น จะขอนิยามชั้น (class) ของฟังก์ชัน ดังนี้

**บทนิยาม** 1.10.2 ให้ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $f : V \to \mathbb{R}$ และ $p \in \mathbb{N}$ แล้ว

1. $f$ จะเป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^p$ บนเซต $V$ ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ย่อยอันดับ $k \leq p$ ของ $f$ แต่ละตัว หาค่าได้และต่อเนื่องบนเซต $V$
2. $f$ จะเป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^\infty$ ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^p$ บนเซต $V$ สำหรับทุก $p \in \mathbb{N}$

**ตัวอย่าง** 1.10.3 ฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{xy}$ เป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^\infty$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า อนุพันธ์ย่อยแบบผสมของฟังก์ชันมีค่าเท่ากัน หาก อนุพันธ์ย่อยแบบผสมมีความต่อเนื่องบนเซตเปิด

**ทฤษฎีบท** 1.10.4 (ทฤษฎีบทของยัง : Young's Theorem)
ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนย่านใกล้เคียงจุด $N((x_0, y_0); r)$ และ อนุพันธ์ย่อย $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ หาค่าได้ใน $N((x_0, y_0); r)$

ถ้า $f_{xy}$ และ $f_{yx}$ มีความต่อเนื่องใน $N((x_0, y_0); r)$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

**พิสูจน์** ให้ $(x_0, y_0)$ เป็นจุดในย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ พิจารณา

$$D = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) \quad (1.10.1)$$

เราจะนิยามฟังก์ชัน

$$\phi(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y) \quad (1.10.2)$$

$$\psi(x, y) = f(x, y + k) - f(x, y) \quad (1.10.3)$$

ดังนั้น จะเห็นว่า $D$ สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชัน $\phi, \psi$ ได้โดย

$$D = \phi(x_0, y_0 + k) - \phi(x_0, y_0)$$

$$D = \psi(x_0 + h, y_0) - \psi(x_0, y_0)$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า มี $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$ ที่ทำให้

$$D = k\phi_y(x_0, y_0 + \theta_1 k) = k[f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)]$$

$$D = h\psi_x(x_0 + \theta_2 h, y_0) = h[f_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_2 h, y_0)]$$

จากนั้น ใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมฟังก์ชันตัวแปรเดียวอีกครั้ง จะได้ว่า มี $0 < \theta_3 < 1$ และ $0 < \theta_4 < 1$ ที่ทำให้

$$D = hk[f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k)] \quad (1.10.4)$$

$$D = hk[f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)] \quad (1.10.5)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k) = f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)]$$

เนื่องจากข้อสมมติฐานที่ว่า $f_{xy}$ และ $f_{yx}$ มีความต่อเนื่องใน $N((x_0, y_0); r)$ จะได้ ว่าเมื่อให้ $h \to 0$ และ $k \to 0$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

ตามต้องการ $\square$

เราอาจลดเงื่อนไขการต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อยอันดับสองตัวใดตัวหนึ่งได้โดยที่อนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งมีค่า ก็จะสามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกันโดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

**ทฤษฎีบท** 1.10.5 (ทฤษฎีบทของชวาซ : Schwarz's Theorem)
ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ ในโดเมนของ $f$ ถ้าอนุพันธ์ย่อย $f_y$ หาค่าได้ใน $N((x_0, y_0); r)$ และ $f_{yx}$ ต่อเนื่องที่ $(x_0, y_0)$ แล้ว $f_{xy}(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และเท่ากับ $f_{yx}(x_0, y_0)$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิจารณาการสลับลำดับของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงได้ หากอนุพันธ์ย่อยสอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบท 1.10.4 เช่น หากจะพิจารณาว่า

$$f_{xxy}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y)$$

ถ้าพิจารณาได้ว่า อนุพันธ์ย่อย $f$ ต่อเนื่องในย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ สำหรับบาง $r$ เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 1.10.4 แสดงได้ว่า $f_{xxy} = f_{yxx}$ นั่นคือ

$$f_{yxx} = f_x(f_{yx}) = f_x(f_{xy}) = f_x(f_y(f_x)) = f_y(f_x(f_x)) = f_y(f_{xx}) = f_{xxy}$$

### 1.10.2 ปัญหาการเปลี่ยนตัวแปร

ในเรื่องจาโคเบียนของการแปลง เราสามารถใช้จาโคเบียนในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงได้ดังทฤษฎีบท 1.8.8 กล่าวคือ ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร $x, y$ ทำการเปลี่ยนตัวแปร $x, y$ ในเทอมของตัวแปร $u, v$ โดยความสัมพันธ์ $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$ หากต้องการหาอนุพันธ์ของ $z$ เทียบกับ $u, v$ ผ่านตัวแปร $x, y$ หรือหาอนุพันธ์ของ $z$ เทียบกับ $x, y$ ในเทอมของ $u, v$ ได้

เราทราบเคยทราบว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned}$$

ดังนั้น โดยการแก้ระบบสมการ ทำให้ได้พจน์ $\partial z/\partial x$ และ $\partial z/\partial y$ กล่าวคือ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} \tag{1.10.6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial u} + D\frac{\partial z}{\partial v} \tag{1.10.7}$$

เมื่อ $A = \dfrac{\partial y}{\partial v}\Big/ J$, $B = -\dfrac{\partial y}{\partial u}\Big/ J$, $C = -\dfrac{\partial x}{\partial v}\Big/ J$, $D = \dfrac{\partial x}{\partial u}\Big/ J$ โดยที่ $J$ คือจาโคเบียน $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

จะเห็นว่า สมการ (1.10.6) และ (1.10.7) เป็นสมการในพจน์ของ $A, B, C, D$ และ $\partial z/\partial u, \partial z/\partial v$ ซึ่งไม่ปรากฏตัวแปร $x, y$

สร้างตัวดำเนินการจาก (1.10.6) และ (1.10.7) กำหนดโดย

$$\frac{\partial}{\partial x} = A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = C\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial v}$$

เมื่อแทน $z$ ในสมการ (1.10.6) ด้วย $\partial z/\partial x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \left(A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= A^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2AB\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \\
&\quad \left(A\frac{\partial A}{\partial u} + B\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + A\left(B\frac{\partial B}{\partial u} + B\frac{\partial B}{\partial v}\right)
\end{aligned}$$

และเมื่อแทน $z$ ในสมการ (1.10.7) ด้วย $\partial z/\partial y$ ก็จะได้ผลสำหรับ $\partial^2 z/\partial y^2$ เช่นกัน

เมื่อมีการเปลี่ยนตัวแปร เราสนใจว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันที่ถูกเปลี่ยนตัวแปรไป จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตัวแปรเดิม ปัญหาเหล่านี้มีความสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) เพื่อแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น

**ตัวอย่าง** 1.10.6 ให้ $V$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x, y$ และ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

**พิสูจน์** พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial V}{\partial y} \\
\frac{\partial V}{\partial\theta} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial V}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial V}{\partial y}
\end{aligned}$$

จากนั้น ทำการแก้ระบบสมการเพื่อหา $\partial V/\partial x$ และ $\partial V/\partial y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

นิยามตัวดำเนินการ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} \\
&\qquad + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}
\end{aligned}
$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} \\
&\qquad - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}
$$

$\square$

**หมายเหตุ** .

1. สำหรับฟังก์ชัน $V$ ในพจน์ของ $x, y$ **ลาปลาเซียน** (Laplacian) ของ $V$ เขียนแทนด้วย $\nabla^2 V$ นิยามโดย

$$
\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}
$$

   สมการ $\nabla^2 V = 0$ เรียกว่า สมการลาปลาเซียน (Laplacian equation) และฟังก์ชัน $V$ ที่สอดคล้องกับ $\nabla^2 V = 0$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันฮาร์โมนิค (harmonic function)

2. ถ้าฟังก์ชัน $V$ สอดคล้องกับ $\nabla^4 V = 0$ แล้ว จะเรียก $f$ ว่า ฟังก์ชันไบฮาร์โมนิค (biharmonic function) โดยที่กำหนดตัวดำเนินการ

$$
\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2), \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}, \nabla^2 = \nabla(\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
$$

3. สมการ (1.10.6) ด้านขวา ซึ่งเกิดจากการแปลงพิกัดฉากเป็นพิกัดเชิงขั้ว จะเรียกว่า รูปเชิงขั้วของสมการลาปลาซ (the polar form of Laplacian equation)

# แบบฝึกหัดที่ 1.10

1. กำหนดให้ $\phi(x,y) = x^4y + e^{x^2y}$
   (a) จงหา $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yx}, \phi_{yy}$
   (b) $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ให้ $z = f(u)$ และ $u = g(x,y)$ จงแสดงว่า
   (a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{d^2 z}{du^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$
   (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{d^2 z}{du^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$
   (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \dfrac{d^2 z}{du^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$
3. กำหนดให้ $z = x^2\arctan(y/x)$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ที่ $(1,1)$
4. กำหนดให้ $w = \ln(e^r + e^s + e^t + e^u)$ จงแสดงว่า $w_{rstu} = -6e^{r+s+t+u-4w}$
   (คำใบ้: ใช้ความสัมพันธ์ $e^w = e^r + e^s + e^t + e^u$)
5. กำหนดให้ $U = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ จงแสดงว่า $U$ ไม่เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิค
6. กำหนดให้ $z = \arctan\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)$
   (a) จงแสดงว่า $z$ เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิค
   (b) จงใช้การแปลง $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ เพื่อแสดงว่า การแปลงดังกล่าวสอดคล้องกับรูปเชิงขั้วของสมการลาปลาซ
7. กำหนดฟังก์ชัน $u(x,y), v(x,y)$ **สมการโคชี-รีมันน์** (Cauchy-Riemann equations) คือสมการที่สอดคล้องกับ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   (a) จงแสดงว่า $u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$ สอดคล้องกับสมการโคชี่-รีมันน์
   (b) กำหนดการแปลง $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ จงหา**รูปเชิงขั้วของสมการโคชี-รีมันน์** (the polar form of the Cauchy-Riemann equations)
8. กำหนดให้ $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

9. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) จงแสดงว่า $f$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบท 1.10.4 (คำใบ้: แสดงว่า $f_{yx}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

(b) จงแสดงว่า $f$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบท 1.10.5 (คำใบ้: แสดงว่า $f_x$ หรือ $f_y$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0,0)$

(c) จงแสดงว่า $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$

10. ถ้า $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 แล้ว จงแสดงว่า

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2F$$

11. กำหนดการแปลง $u = x - ct, v = x + ct$ สำหรับค่าคงที่ $c$ จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ สามารถลดรูปได้เป็นสมการ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$

12. กำหนดให้ $V$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x, y$ และ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

(a) จงหา $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}$ ในเทอมของ $\partial V/\partial r$ และ $\partial V/\partial\theta$

(b) จงแสดงว่า $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x\partial y} = -\dfrac{\cos 2\theta}{r^2} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y\partial x}$

(c) จงแสดงว่า $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\partial x} = -\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}$

## 1.11 อนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียว สมมติให้ $f$ หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่จุด $x_0$ แล้ว **อนุกรมเทเลอร์** (Taylor series) ของ $f$ กระจายรอบจุด $x = x_0$ สามารถเขียนได้เป็น

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

ทั้งนี้ เมื่อกระจายพหุนามเทเลอร์รอบจุด $x = x_0$ ถึงพจน์ที่ $n$ จะได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}$$

โดยที่ $R_{n+1}$ คือพจน์เศษเหลือ นั่นคือ $R_{n+1} = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$ สำหรับบาง $0 < \theta < 1$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายแนวคิดของอนุกรมเทเลอร์จากฟังก์ชันตัวแปรเดียว ไปสู่อนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 1.11.1 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ $n+1$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$ โดยที่จุด $(x_0+h,y_0+k)$ อยู่ในโดเมนแล้ว มีจำนวนจริงบวก $0<\theta<1$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + ... \\ &+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

เมื่อ $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) f = hf_x + kf_y$, $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$ โดยที่ $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ อยู่ในรูปการกระจายทวินาม และ**พจน์เศษเหลือ** (remainder term)

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

**พิสูจน์** ให้ $x=x_0+th, y=y_0+tk$ สำหรับตัวแปรเสริม $t$ ซึ่ง $0\le t\le 1$ นิยามฟังก์ชัน

$$f(x,y) = f(x_0+th, y_0+tk) = \phi(t)$$

เนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ $n$ ของ $f$ ต่อเนื่องในโดเมน ดังนั้น $\phi^{(n)}(t)$ ต่อเนื่องบน $[0,1]$ และได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) f \\ \phi''(t) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \\ &\vdots \\ \phi^{(n)}(t) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อพิจารณาอนุกรมเทเลอร์ของ $\phi(t)$ รอบ $t=0$ จะได้ว่า

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2!}\phi''(0) + ... + \frac{t^n}{n!}\phi^{(0)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta t)$$

สำหรับบาง $0<\theta<1$ ถ้าให้ $t=1$ จะได้ว่า

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + ... + \frac{1}{n!}\phi^{(0)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta)$$

แต่เนื่องจาก $\phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$ และ $\phi(0) = f(x_0, y_0)$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\phi'(0) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\
\phi''(0) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) \\
&\vdots \\
\phi^{(n+1)}(\theta) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)
\end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) &+ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \dots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1}
\end{aligned}$$

และมีพจน์พจน์เศษเหลือคือ

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

ซึ่ง $0 < \theta < 1$ □

**ตัวอย่าง 1.11.2** จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \arctan(y/x)$ รอบจุด $(1, 1)$ จนถึงพจน์ที่มีระดับขั้น 2

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \arctan\frac{y}{x} & f(1, 1) &= \frac{\pi}{4} \\
f_x(x, y) &= -\frac{y}{x^2 + y^2} & f_x(1, 1) &= -\frac{1}{2} \\
f_y(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} & f_y(1, 1) &= \frac{1}{2} \\
f_{xx}(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & f_{xx}(1, 1) &= \frac{1}{2} \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & f_{xy}(1, 1) &= 0 \\
f_{yy}(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & f_{yy}(1, 1) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

สมมติให้ $x = 1 + h, y = 1 + k$ โดยทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}(y - 1)^2)\right] + \dots$$

ทั้งนี้ หากกระจายถึงพจน์ที่มีระดับขั้น 2 จะสามารถหาพจน์เศษเหลือได้คือ

$$R_3 = \frac{1}{3!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1))$$

โดยที่ $0 < \theta < 1$

เราอาจแทนตัวดำเนินการ $D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ ดังนั้น อนุกรมเทเลอร์ในทฤษฎีบท 1.11.1 สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ Df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}D^2 f(x_0,y_0) \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}D^n f(x_0,y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

โดยที่ $\frac{1}{(n+1)!}D^{(n+1)}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$

ทั้งนี้ เราสามารถขยายแนวคิดของอนุกรมเทเลอร์ดังกล่าวในกรณีที่มีฟังก์ชันมากกว่าสองตัวแปรได้ โดยใช้การเขียนสัญลักษณ์แบบการกระจายทวินามเช่นกัน

นอกจากรูปแบบที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว เราอาจเขียนอนุกรมเทเลอร์ได้อีกรูปแบบ กล่าวคือ เมื่อให้ $x = x_0 + h, y = y_0 + k$ จะได้ว่า อนุกรมเทเลอร์ของ $f$ รอบจุด $(x_0, y_0)$ เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0,y_0) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

โดยที่

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0+(x-x_0)\theta, y_0+(y-y_0)\theta)$$

ซึ่ง $0 < \theta < 1$

**ตัวอย่าง** 1.11.3 จงเขียนพหุนาม $x^2y + 3y - 2$ ในพจน์ของ $x-1$ และ $y+2$ โดยกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $(x_0, y_0) = (1, -2)$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + 3y - 2 & f(1,-2) &= -10 \\ f_x(x,y) &= 2xy & f_x(1,-2) &= -4 \\ f_y(x,y) &= x^2 + 3 & f_y(1,-2) &= 4 \\ f_{xx}(x,y) &= 2y & f_{xx}(1,-2) &= -4 \\ f_{xy}(x,y) &= 2x & f_{xy}(1,-2) &= 2 \\ f_{yy}(x,y) &= 0 & f_{yy}(1,-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$f_{xxx}(x,y) = 0 = f_{yyy}(x,y)$$
$$f_{yxx}(1,-2) = 2 = f_{xxy}(1,-2)$$

ซึ่งจะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่เป็นต้นไปทั้งหมด มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
x^2y + 3y - 2 &= -10 - (x-1) + 4(y+2) + \frac{1}{2}[-4(x-1)^2 + 4(x-1)(y+2)] \\
&\quad + \frac{1}{3!}3(x-1)^2(y+2)(2) + 0 \\
&= -10 - (x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) \\
&\quad + (x-1)^2(y+2)
\end{aligned}$$

ในกรณีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถทำการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามเทเลอร์ได้ ซึ่งมีความหมายคือ การหาเส้นโค้งพหุนามที่จุด $x = x_0$ ซึ่งถ้าเราเลือกจุดที่อยู่ใกล้ ๆ $x_0$ ก็จะได้เส้นกราฟของ $p_n(x)$ ที่ใกล้เคียง $f(x)$ ในย่านใกล้ ๆ $x_0$ ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร เราสามารถหาพื้นผิวที่ใช้ในการประมาณค่าของพื้นผิวเดิมได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** 1.11.4 จงประมาณพื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $P_0(0,1,e)$

**วิธีทำ** พื้นผิวของ $f$ แสดงดังภาพ 1.56 (บน) จะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องสำหรับทุกอันดับ ดังนั้น เราจึงสามารถประมาณค่าของ $f$ รอบจุด $(x,y) = (0,1)$ ได้โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ กล่าวคือ ถ้าทำการประมาณค่าด้วยพหุนามเทเลอร์ระดับขั้น 1 จะได้ว่า

$$z = f(x,y) \approx f(0,1) + xf_x(0,1) + (y-1)f_y(0,1)$$

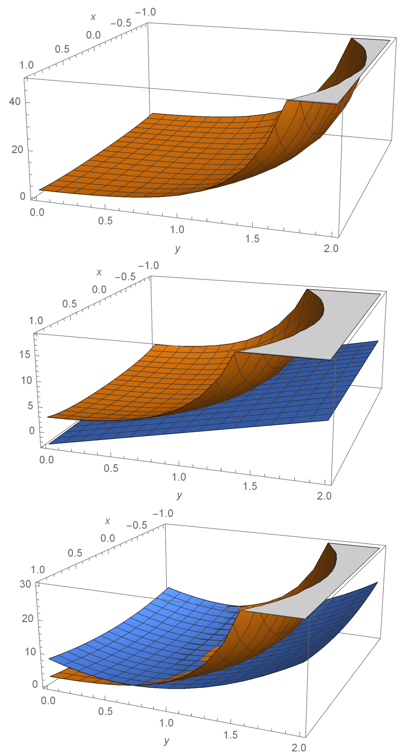
นั่นคือ พื้นผิวของ $f$ ใกล้ ๆ จุด $P$ สามารถประมาณได้โดยระนาบ

$$z = e + 2e(y-1)$$

ดังภาพ 1.56 (กลาง) และทำนองเดียวกัน ถ้าทำการประมาณ $f(x,y)$ ด้วยพหุนามเทเลอร์ระดับขั้น 2 จะทำให้ได้พื้นผิวประมาณ

$$\frac{z}{e} = \frac{2}{3} + x^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2$$

ดังภาพ 1.56 (ล่าง)

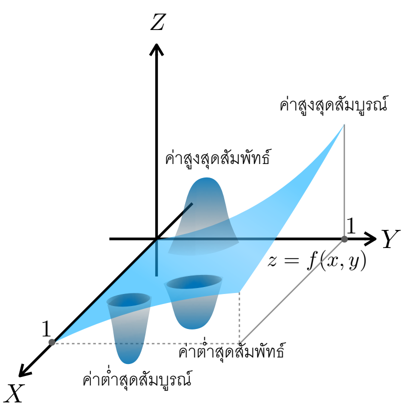


**ภาพที่** 1.56. (บน) กราฟของ $f$,(กลาง) กราฟของ $f$ และการประมาณด้วยระนาบ, (ล่าง) กราฟของ $f$ และการประมาณด้วยพาราโบลอยด์

# แบบฝึกหัดที่ 1.11

1. จงกระจายพจน์ $x^4 + x^2y^2 - y^4$ รอบจุด $(1,1)$ จนถึงระดับขั้น 2 พร้อมทั้งหา $R_3$
2. จงกระจายพจน์ $\sqrt{1-x^2-y^2}$ รอบจุด $(0,0)$ จนถึงระดับขั้น 2 พร้อมทั้งหา $R_3$
3. จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin x \sin y$ รอบจุด $(0,0)$ จนถึงระดับขั้น 4 และเปรียบเทียบผลกับการหาผลคูณระหว่างอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin x$ และ $\sin y$
4. จงแสดงว่า การกระจาย $\sin xy$ ในรูปของกำลังของ $x-1$ และ $y-\frac{\pi}{2}$ จนถึงระดับขั้น 2 อยู่ในรูป
$$1 - \frac{1}{8}\pi^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}\pi(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2$$
5. จงกระจาย $e^x \arctan y$ รอบจุด $(1,1)$ จนถึงระดับขั้น 2 ในรูปของกำลังของ $(x-1)$ และ $(y-1)$
6. จงแสดงว่า สำหรับ $0 < \theta < 1$ แล้ว
$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6}[(x^3+3xy^2)\cos\theta x \sin\theta y + (y^3+3x^2y)\sin\theta x\cos\theta y]$$
7. จงแสดงว่า
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}$$
เมื่อ $0 < \theta < 1, x > 0, y > 0$ (คำใบ้ : กระจายอนุกรมเทเลอร์ โดยให้พจน์เศษเหลือเป็นพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง)

## 1.12 ค่าสูงสุดและต่ำสุด




**ภาพ ที่ 1.57.** ค่า สุดขีด สัมพัทธ์ และสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

หนึ่งในการประยุกต์ที่สำคัญในทางคณิตศาสตร์ คือการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาวิธีการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ทั้งฟังก์ชันตัวแปรเดียวและฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในหัวข้อนี้เราจะเริ่มต้นจากการทบทวนนิยามพื้นฐาน จากนั้นจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เคยศึกษาในแคลคูลัสพื้นฐาน และศึกษาการหาค่าเหมาะที่สุดโดยวิธีพื้นฐาน โดยในที่นี้เราจะศึกษาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปรและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

**บทนิยาม 1.12.1** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ $x, y$

1. จะกล่าวว่า $f$ มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่จุด $(x_0, y_0)$ ถ้ามีย่านจุดเปิด $N((x_0, y); r)$ ซึ่ง $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y); r)$
2. จะกล่าวว่า $f$ มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่จุด $(x_0, y_0)$ ถ้า $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y)$ ในโดเมนของ $f$
3. จะกล่าวว่า $f$ มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ที่จุด $(x_0, y_0)$ ถ้ามีย่านจุดเปิด $N((x_0, y_0); r)$ ซึ่ง $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in$

$N((x_0, y_0); r)$

4. จะกล่าวว่า $f$ มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum) ที่จุด $(x_0, y_0)$ ถ้า $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y)$ ในโดเมนของ $f$

ถ้า $f$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเรียกว่า $f$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) และถ้า $f$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์ จะเรียกว่า $f$ มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extremum) ภาพ 1.57 แสดงให้เห็นถึงค่าสุดขีดต่าง ๆ ในบริเวณที่กำหนด

การพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์จำเป็นที่จะต้องพิจารณาค่าของฟังก์ชันบริเวณขอบของบริเวณที่สนใจด้วย เราจะยกทฤษฎีดังกล่าวโดยไม่พิสูจน์

**ทฤษฎีบท** 1.12.1 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : Extremum-value Theorem)
ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ $R$ ซึ่งเป็นบริเวณปิดและมีขอบเขตแล้ว $f$ มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $R$

เราจะเริ่มต้นหาค่าสุดขีดจากการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ซึ่งก่อนอื่นเราจะพิจารณาสมบัติที่เกี่ยวข้อง เมื่อฟังก์ชันมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.12.2 ถ้า $f$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด $(x_0, y_0)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ $f$ หาค่าได้ที่จุดดังกล่าวแล้ว จะได้ว่า

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{และ} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

**พิสูจน์** เราจะพิสูจน์กรณี $f$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ สำหรับกรณีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติว่า $f$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(x_0, y_0)$ ดังนั้น จะมีย่านจุดเปิด $N((x_0, y); r)$ ที่ทำให้ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y); r)$ จะแสดงว่า $f_x(x_0, y_0) = 0$

ดังนั้น สำหรับจุด $(x_0 + \Delta x, y_0) \in N((x_0, y_0); r)$ จะได้ว่า $f(x_0 + \Delta x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ นั่นคือ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0 \tag{1.12.1}$$

ต่อมา หารอสมการ (1.12.1) ด้วย $\Delta x$ ทั้งอสมการ ทำให้ต้องแบ่งกรณีดังนี้
ถ้า $\Delta x > 0$ จะได้อสมการ

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\Delta x \to 0^+$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

ถ้า $\Delta x < 0$ จะได้อสมการ

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\Delta x \to 0^-$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

แต่เนื่องจาก $f_x(x_0, y_0)$ หาค่าได้ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

จากอสมการทั้งสอง จึงได้ว่า

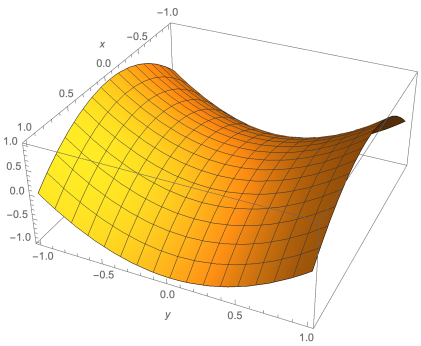
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = 0$$

นั่นคือ $f_x(x_0, y_0) = 0$ ตามต้องการ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า $f_y(x_0, y_0) = 0$ รวมถึงกรณีที่ $f$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันว่า $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ $\square$

เราทราบว่าสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จุดวิกฤต $x = x_0$ ของฟังก์ชัน $f$ คือจุด $x_0$ ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = x_0$ ดังนั้นเราจึงสามารถขยายไปสู่กรณีฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

**บทนิยาม** 1.12.2 จุด $(x_0, y_0)$ ในโดเมนของฟังก์ชัน $f(x, y)$ จะเรียกว่า **จุดวิกฤต** (critical point) ถ้า $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ หรืออนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งหมดของ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ หาค่าไม่ได้




**ภาพที่** 1.58. กราฟของ $f(x, y) = y^2 - x^2$ ซึ่งเกิดจุดอานม้า

จากทฤษฎีบท 1.12.2 จะเห็นว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่จุดวิกฤต อย่างไรก็ตาม หากเราพิจารณาจุดวิกฤต อาจมีบางจุดวิกฤตที่ไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือบทกลับของทฤษฎีบท 1.12.2 ไม่จริงเสมอไป ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

**ตัวอย่างค้าน** 1.12.3 พิจารณาไฮเพอร์โบลิคพาราโบลอยด์ ดังภาพ 1.58 กำหนดดังสมการ

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y) = -2x$ และ $f_y(x, y) = 2y$ ซึ่งจะพบว่า $f_x(0, 0) = 0$ และ $f_y(0, 0) = 0$ แต่ $f$ ไม่เกิดทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(0, 0)$

จุดที่เกิดเหตุการณ์ดังกล่าวตามตัวอย่างค้าน 1.12.3 จะนิยามดังนี้

**บทนิยาม** 1.12.3 สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ แล้ว จุด $(x_0, y_0)$ เป็น**จุดอานม้า** (saddle point) ของฟังก์ชัน $f$ ถ้ามีระนาบแนวตั้งสองระนาบที่ต่างกันที่ผ่านจุด $(x_0, y_0)$ ซึ่งรอยตัดระหว่างพื้นผิว $z$ กับระนาบหนึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(x_0, y_0)$ และอีกระนาบหนึ่งมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(x_0, y_0)$

ดังนั้น จุด $(0, 0)$ ในตัวอย่าง 1.12.3 เป็นจุดวิกฤตที่เป็นจุดอานม้า

คำถามที่น่าสนใจคำถามหนึ่งคือ เราจะสามารถจำแนกลักษณะของค่าของฟังก์ชันที่

เกิดจากจุดวิกฤตได้หรือไม่ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะตอบคำถามดังกล่าว

**ทฤษฎีบท** 1.12.4 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรโดยที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและสองต่อเนื่องในย่านจุดเปิด $N((x_0,y_0);r)$ และสมมติว่า $f_x(x_0,y_0)=0=f_y(x_0,y_0)$ แล้ว

1. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)>0$ และ $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f$
2. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)>0$ และ $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f$
3. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)<0$ แล้ว จุด $(x_0,y_0)$ เป็นจุดอานม้าของ $f$
4. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)=0$ แล้ว ไม่สามารถสรุปได้

**แนวคิด** ในส่วนนี้เราจะแสดงว่า $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือสูงสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น เราจึงหยิบจุด $(x_0+h,y_0+k)$ ใด ๆ ในย่านจุดเปิด $N((x_0,y_0);r)$ เพื่อจะแสดงว่า ถ้า $f(x_0,y_0)\geq f(x_0+h,y_0+k)$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และทำนองเดียวกันก็จะแสดงว่า ถ้า $f(x_0,y_0)\leq f(x_0+h,y_0+k)$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

**พิสูจน์** สมมติให้จุด $(x_0+h,y_0+k)$ เป็นจุดในย่านจุดเปิด $N((x_0,y_0);r)$ จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์จนถึงพจน์ที่มีระดับขั้น 1 พร้อมพจน์เศษเหลือ จะได้ว่า สำหรับ $0<\theta<1$

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=\ & f(x_0,y_0)+[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)]\\ &+\frac{1}{2!}\,[h^2f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\\ &+2hkf_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+k^2f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)]\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f_x(x_0,y_0)=0=f_y(x_0,y_0)$ และเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับสองมีความต่อเนื่องที่ $(x_0,y_0)$ จึงได้ว่า มี $\rho_1,\rho_2,\rho_3$ ที่เป็นฟังก์ชันของ $h,k$ ซึ่ง $\rho_1,\rho_2,\rho_3\to 0$ เมื่อ $(h,k)\to(0,0)$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-f_{xx}(x_0,y_0)&=\rho_1\\ f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-f_{xy}(x_0,y_0)&=\rho_2\\ f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-f_{yy}(x_0,y_0)&=\rho_3\end{aligned}$$

ดังนั้น เราเขียน $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ ได้ในรูป

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f_{xy}(x_0,y_0)hk+f_{yy}(x_0,y_0)k^2+\rho] \tag{1.12.2}$$

เมื่อ $\rho=\rho_1+\rho_2+\rho_3\to 0$ เมื่อ $(h,k)\to(0,0)$ และไม่ทราบเครื่องหมายของ $\rho$ ดังนั้น เราจึงจะพิจารณาเครื่องหมายตามแต่ละกรณีของ $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของพจน์ $f_{xx}(x_0,y_0)h^2+$

$2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2 + \rho$ ดังนี้

สมมติให้ $G = f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2$ ดังนั้น สมการ (1.12.2) จะพิจารณาได้เป็น

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}[G+\rho] \tag{1.12.3}$$

สมมติให้ $f_{xx}(x_0,y_0) \neq 0$ จะเห็นว่า $G$ เขียนได้อยู่ในรูป

$$G = \frac{(f_{xx}(x_0,y_0)h + f_{xy}(x_0,y_0)k)^2 + k^2(f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0))}{f_{xx}(x_0,y_0)} \tag{1.12.4}$$

สำหรับพจน์ทางขวามือ เราสามารถพิจารณาเป็นกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. **กรณี $G$ ไม่เป็นศูนย์และไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย** เนื่องจาก $\rho \to 0$ เมื่อ $(h,k) \to (0,0)$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ $G+\rho$ คือเครื่องหมายเดียวกันกับ $G$ ดังนั้น เครื่องหมายของ $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ ก็จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ $G$

2. **กรณี $G$ สามารถเปลี่ยนเครื่องหมายได้** เนื่องจาก $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ และ $G$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน เมื่อ $\rho$ เล็ก ๆ ดังนั้น $f(x_0,y_0)$ ไม่เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

3. **กรณี $G$ เป็นศูนย์** จะเห็นว่าเครื่องหมายของ $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ ขึ้นอยู่กับ $\rho$ เราจึงไม่สามารถสรุปได้

จาก สมการ (1.12.3) จะ พบ ว่า เครื่องหมาย ของ $G$ ขึ้น อยู่ กับ เครื่องหมาย ของ $(f_{xx}(x_0,y_0)h+f_{xy}(x_0,y_0)k)^2+k^2(f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0))$ เราจึงแยกกรณีย่อยได้ต่อไปนี้

- ถ้า $\underline{f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0}$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ $G$ ขึ้นอยู่กับ $f_{xx}$ เราจึงได้ว่า
  - ถ้า $f_{xx} > 0$ แล้ว $G > 0$ จะได้ว่า $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) \geq 0$ นั่นคือ $f(x_0,y_0)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
  - ถ้า $f_{xx} < 0$ แล้ว $G < 0$ จะได้ว่า $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) \leq 0$ นั่นคือ $f(x_0,y_0)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $\underline{f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) < 0}$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ $G$ อาจจะเป็นบวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับ $(f_{xx}(x_0,y_0)h + f_{xy}(x_0,y_0)k)^2 > k^2(f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0)) < 0$ หรือ $(f_{xx}(x_0,y_0)h + f_{xy}(x_0,y_0)k)^2 < k^2(f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0)) < 0$ ขึ้นอยู่กับค่าของ $(h,k)$ ดังนั้น $G$ จะไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์
- ถ้า $\underline{f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = 0}$ จะได้ว่า ตัวเศษของ $G$ เป็น พจน์ กำลัง สอง สมบูรณ์ แต่ อาจ มี ค่า เป็น ศูนย์ ขึ้น อยู่ กับ $(h,k)$ ที่ซึ่ง $f_{xx}(x_0,y_0)h + f_{xy}(x_0,y_0)k = 0$ ซึ่งทำให้ไม่สามารถสรุปได้

จากกรณีต่าง ๆ ทำให้สามารถสรุปทฤษฎีได้ตามต้องการ □

**ตัวอย่าง 1.12.5** จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

**วิธีทำ** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3, \qquad f_y(x,y) = 3y^2 - 12$$

ทำการหาจุดวิกฤต โดยให้ $f_x(x,y) = 0$ และ $f_y(x,y) = 0$ จะได้ว่า

$$x = 1, -1 \text{ และ } y = 2, -2$$

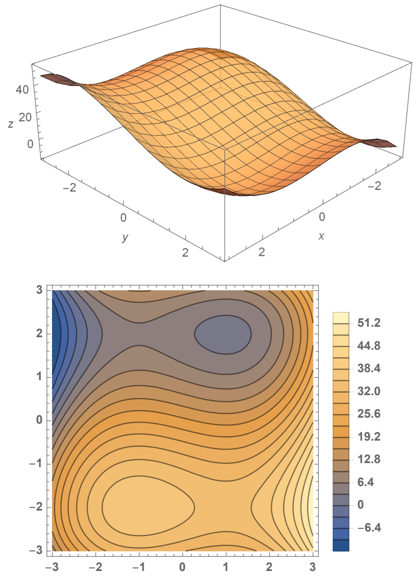
ดังนั้น จุดวิกฤตจะมี 4 จุด ประกอบด้วย $(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2)$ ต่อไปจะนำจุดวิกฤตทั้งสี่ไปตรวจสอบ พิจารณา

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 6y$$

โดยใช้ทฤษฎีบท 1.12.4 จะสรุปผลการตรวจสอบ ดังนี้

| **จุด** $(x_0,y_0)$ | $f_{xx}$ | $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ | **สรุปผล** |
|---|---|---|---|
| $(1,2)$ | $6>0$ | $72>0$ | ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์, $f(1,2) = 2$ |
| $(-1,2)$ | $-6<0$ | $-72<0$ | เป็นจุดอานม้า |
| $(1,-2)$ | $6>0$ | $-72<0$ | เป็นจุดอานม้า |
| $(-1,-2)$ | $-6<0$ | $72>0$ | ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์, $f(-1,-2) = 37$ |

นั่นคือ $f$ เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1,2)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1,2) = 2$
และ $f$ เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-1,-2)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1,-2) = 37$

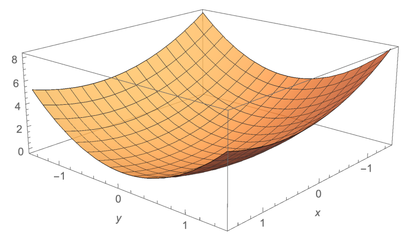


**ภาพที่ 1.59.** (บน) กราฟของ $f$ ในตัวอย่าง 1.12.5 (ล่าง) เส้นชั้นความสูงของ $f$

## 1.12.1 ค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด

ดังนิยามของค่าสุดขีดสัมบูรณ์ดังนิยาม 1.12.1 สำหรับการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด เราจำเป็นต้องหาค่าสุดขีดของทุก ๆ จุด ซึ่งนอกเหนือจากจุดที่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์แล้ว จุดที่อยู่บริเวณขอบของบริเวณที่สนใจจะต้องถูกนำมาพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบค่า และก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมบูรณ์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.12.6** จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ บนบริเวณปิด $x^2 + y^2 \leq 1$


**ภาพที่ 1.60.** กราฟของ $f$ ในตัวอย่าง 1.12.6

**วิธีทำ** ก่อนอื่น เราจะพิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f$ ดังขั้นตอนต่อไปนี้

$$f_x(x,y) = 2x - 1, \qquad f_y(x,y) = 4y$$

ทำการหาจุดวิกฤต โดยให้ $f_x(x,y) = 0$ และ $f_y(x,y) = 0$ จะได้ว่า

$$x = \frac{1}{2} \text{ และ } y = 0$$

ดังนั้น จุดวิกฤตจึงมีหนึ่งจุด คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ต่อไป นำจุดวิกฤตไปตรวจสอบ จะเห็นว่า

$$f_{xx}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = 0, \qquad f_{yy}(x,y) = 4$$

และเนื่องจาก $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0$ โดยที่ $f_{xx} = 2 > 0$ จึงได้ว่า $f$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

ต่อไปเราจะพิจารณาจุดที่อยู่บนขอบของบริเวณวงกลม $x^2 + y^2 \leq 1$ พิจารณาความสัมพันธ์

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

ดังนั้น เมื่อแทน $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ใน $f$ นั่นคือ

$$f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x^2 + 2(1-x^2) - x = 2 - x - x^2$$

สมมติให้ $g(x) = 2 - x - x^2$ พบว่า จะหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f$ ภายใต้เงื่อนไขของค่า $x$ คือ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น เราจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวก่อน นั่นคือ ทำการหาจุดวิกฤตของ $g$ โดยให้ $g'(x) = 0$ นั่นคือ

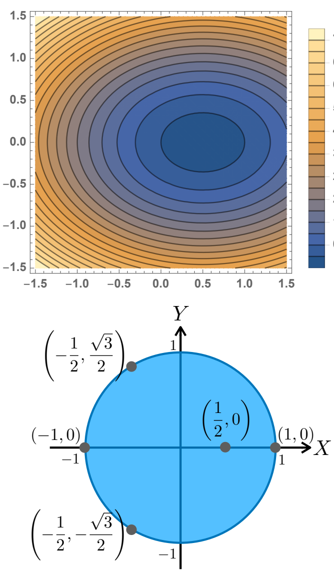
$$g'(x) = -1 - 2x = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$ โดยการตรวจสอบด้วยวิธีอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $g''(x) = -2 < 0$ แสดงว่า $x = -\frac{1}{2}$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $g$

- เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ จะได้ว่า $y = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}^2\right)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ คู่อันดับซึ่งสอดคล้องกับ $x = -\frac{1}{2}$ และ $f$ คือ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- พิจารณาจุดขอบของ $g$ จะเห็นว่า เมื่อ $x = 1, -1$ จะได้ว่า $y = 0$ ดังนั้น คู่อันดับทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของจุดขอบคือ $(1,0), (-1,0)$

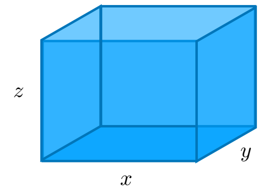
นำจุดทั้งหมดมาพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน สรุปได้ดังตาราง

| **จุด** $(x_0, y_0)$ | **ค่าของ** $f(x_0, y_0)$ | **สรุปผล** |
|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ | $\frac{-1}{4}$ | ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ |
| $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\frac{9}{4}$ | ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ |
| $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\frac{9}{4}$ | ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ |
| $(-1, 0)$ | $0$ | |
| $(1, 0)$ | $2 < 0$ | |




**ภาพที่** 1.61. (บน) เส้นชั้นความสูงของ $f$ (ล่าง) จุดในบริเวณปิดทั้งหมดของโดเมนที่นำมาพิจารณา

**ตัวอย่าง** 1.12.7 จงหาความกว้าง ยาว และสูงของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฝาเปิด ซึ่งมีปริมาตร $V$ โดยต้องการให้ใช้วัสดุในการทำกล่องที่น้อยที่สุด




**ภาพที่** 1.62. กล่องที่ต้องการหาพื้นที่ผิว

**วิธีทำ** ก่อนอื่น สมมติให้ $V$ เป็นปริมาตรของกล่อง $x$ แทนความกว้างของกล่อง $y$ แทนความยาวของกล่อง และ $z$ แทนความสูงของกล่อง โดยที่ $S$ คือพื้นที่ผิวของกล่อง เราต้องการทำให้พื้นที่ผิวของกล่องมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ ต้องการหาค่าต่ำสุดของ

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$V = xyz$$

จากปัญหาดังกล่าว จะเห็นว่าฟังก์ชัน $S$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เมื่อ $x, y, z > 0$ อย่างไรก็ตาม เราสามารถลดตัวแปรลงได้หนึ่งตัวแปรจากเงื่อนไข $z = V/xy$ ดังนั้น $S$ จะเขียนได้เป็น

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \tag{1.12.5}$$

ดังนั้น $S$ จึงเป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ $y$ ต่อไปจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ โดยการหาจุดวิกฤตของ $S$ นั่นคือ

$$S_x = -\frac{2V}{x^2} + y, \qquad S_y = -\frac{2V}{y^2} + x$$

หาจุดวิกฤต โดยให้ $S_x = 0 = S_y$ จึงได้ว่า

$$y = \frac{2V}{x^2} \text{ และ } x = \frac{2V}{y^2}$$

แก้ระบบสมการทั้งสอง โดยการแทนค่า $y = \dfrac{2V}{x^2}$ ลงใน $x = \dfrac{2V}{y^2}$ จะได้ว่า

$$0 = x - \frac{2V}{4V^2}x^4 = x\left(1 - \frac{x^3}{2V}\right)$$

เนื่องจาก $x \neq 0$ ดังนั้น $x = \sqrt[3]{2V}$ จะได้ว่า $y = \sqrt[3]{2V}$ จะได้จุดวิกฤตคือ $(x = \sqrt[3]{2V}, x = \sqrt[3]{2V})$

ทำการทดสอบจุดวิกฤต โดยพบว่า

$$S_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy}(x,y) = \frac{4V}{y^3}$$

พบว่า ที่จุด $(x = \sqrt[3]{2V}, x = \sqrt[3]{2V})$ ได้ว่า

$$S_{xx} = 2, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy} = 2$$

เนื่องจาก $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$ โดยที่ $f_{xx} = 2 > 0$ จึงได้ว่า $f$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ โดยมีค่า $z = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ และมีพื้นที่ผิวคือ $S(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}) = 3\sqrt[3]{4V^2}$

ต่อไป จะพิจารณาว่าที่จุด $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วยหรือไม่ นั่นคือ ถ้า $(x, y) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์จริง จะได้ว่า $3\sqrt[3]{4V^2} < S(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y)$ ในจตุภาคที่หนึ่ง

จากสมการ (1.12.5) ถ้า $3\sqrt[3]{4V^2} < S$ แล้ว จะเห็นว่า เงื่อนไขดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับอสมการ

$$xy > 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{y} > 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{x} > 3\sqrt[3]{4V^2}$$

อย่างน้อยหนึ่งอสมการ

ดังนั้น เพื่อที่จะแสดงว่า $3\sqrt[3]{4V^2} \leq S$ บรรดาเซตของจุด $(x, y)$ จึงสามารถลดมาพิจารณาบรรดาจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับระบบอสมการ

$$xy \leq 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{y} \leq 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad \frac{2V}{x} \leq 3\sqrt[3]{4V^2}$$

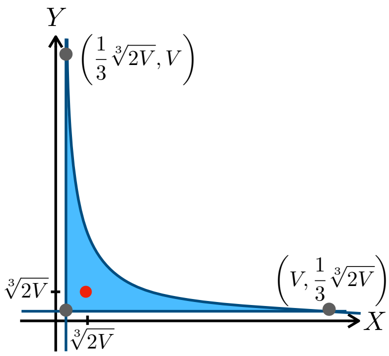
นั่นคือ อสมการดังกล่าวสามารถพิจารณาได้เป็น

$$xy \leq 3\sqrt[3]{4V^2}, \quad y \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{2V}, \quad x \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{2V}$$

ซึ่งนิยามบริเวณปิด $R$ ได้ดังภาพ 1.63

เนื่องจาก $S$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณปิด $R$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.12.1 จะได้ว่า $S$ มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ณ จุดในบริเวณ $R$ เนื่องจากจุด $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ อยู่ในบริเวณ $R$ และ $3\sqrt[3]{4V^2} < S$ บนขอบของ $R$ จึงได้ว่า ค่าต่ำสุดของ $S$ จึงต้องเกิดบริเวณจุดภายในของ $S$

ดังนั้น พื้นที่ผิวสูงสุดของกล่องมีค่าเท่ากับ $3\sqrt[3]{4V^2}$ ตารางหน่วย เมื่อมีความกว้าง ยาว และสูงของกล่องเป็น $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ หน่วย ตามลำดับ



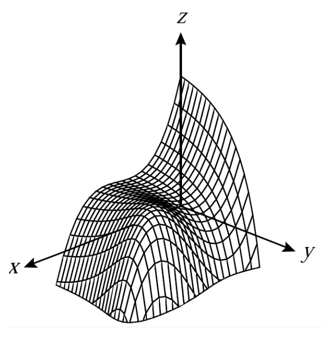

**ภาพที่** 1.63. บริเวณ $R$ ในการพิจารณาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

มีข้อสังเกตที่พึงระวังว่า ทฤษฎีบทบางทฤษฎีในฟังก์ชันตัวแปรเดียว อาจไม่เป็นจริงในฟังก์ชันหลายตัวแปร เช่น ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทในฟังก์ชันตัวแปรเดียว

**ทฤษฎีบท** 1.12.8 ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่มีความต่อเนื่อง และมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ค่าเดียวบนช่วงที่จุด $x_0$ แล้ว จะได้ว่า ถ้า $f$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ [สูงสุดสัมพัทธ์] ที่จุด $x_0$ แล้ว $f(x_0)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ [สูงสุดสัมบูรณ์] บนช่วงนั้น

อย่างไรก็ตาม ผลในทฤษฎีบทดังกล่าว**อาจไม่จริง**สำหรับกรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้ ซึ่งจะให้ผู้อ่านแสดงเป็นแบบฝึกหัด

**ตัวอย่างค้าน** 1.12.9 ฟังก์ชัน $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ มีจุดวิกฤตเพียงจุดเดียว และมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤตนั้น แต่ $f$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์




**ภาพที่** 1.64. ฟังก์ชัน $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างค้าน 1.12.9 แสดงดังภาพที่ 1.64 โดยทฤษฎีบทดังกล่าวจึงเป็นเหตุผลที่เราจะต้องแสดงว่า สำหรับตัวอย่าง 1.12.7 คำตอบที่ได้ซึ่งเกิดขึ้นในบริเวณที่พิจารณานั้น ค่าที่ได้เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์อย่างแท้จริง

ทั้งนี้ ในแบบฝึกหัดที่ 1.12 ข้อที่ 6 มีสถานการณ์ในทำนองคล้ายกันเช่นกัน

# แบบฝึกหัดที่ 1.12

1. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า (ถ้ามี)

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy + 4y + 2x + 3$

   (b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{32}{xy}$

   (d) $f(x,y) = xe^{y+1}$

   (e) $f(x,y) = e^x \cos y$

   (f) $f(x,y) = e^{-x^2+y^2+4x}$

2. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ บนบริเวณปิดและมีขอบเขต $R$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (a) $f(x,y) = xy - x - 3y$ บนบริเวณ $R$ รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดคือ $(0,0)$, $(0,4)$, $(5,0)$

   (b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ บนบริเวณ $R$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดยอดคือ $(0,0),(0,2),(2,2),(2,0)$

   (c) $f(x,y) = xy^2$ บนบริเวณ $R$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$

3. จงหาจำนวนจริงบวกสามจำนวนซึ่งผลบวกสามจำนวนมีค่าเท่ากับ 36 โดยที่ผลคูณของสามจำนวนมีค่ามากที่สุด

4. จงหาจุดบนพื้นผิว $x^2 - yz = 9$ ซึ่งอยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด

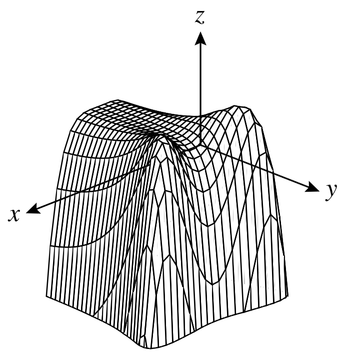
5. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีหน้าสามหน้าของกล่องเป็นส่วนหนึ่งของระนาบ $XY, YX, ZX$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ในอัฐภาคที่ 1 บนระนาบ $x + y + z = 1$

6. ผลลัพธ์ต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

   > **ทฤษฎีบท** 1.12.10 ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่มีความต่อเนื่อง โดยที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์สองค่าในช่วงที่พิจารณาแล้ว จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หนึ่งค่าที่อยู่ระหว่างค่าสูงสุดสัมพัทธ์ทั้งสองนั้น

   โจทย์ต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวไม่สามารถขยายไปสู่กรณีฟังก์ชันสองตัวแปรได้

   จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์สองค่า แต่ไม่มีจุดวิกฤตอื่น ๆ เลย



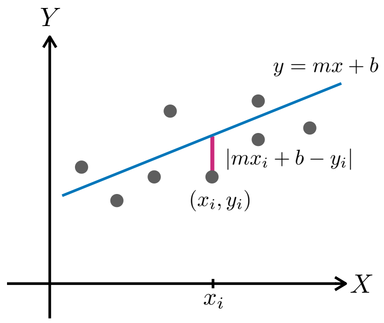

**ภาพ ที่** 1.65. ฟังก์ชัน $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

7. ในทางสถิติ **ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด** (method of least squares) เป็นวิธีที่หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาเส้นโค้งที่ดีที่สุดที่ใกล้เคียงกับชุดข้อมูล

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$$

สมมติว่าข้อมูลชุดหนึ่งมีความสัมพันธ์คล้ายกับเส้นตรง เราต้องการทำการประมาณชุดข้อมูลนี้ด้วยสมการเส้นตรง $y = mx + b$ โดยปกติแล้ว ข้อมูลที่เก็บมาได้มักเกิดความคลาดเคลื่อน และไม่อยู่บนเส้นตรงนั้น ดังนั้น เราจึงต้องทำการหาเส้นตรงที่ดีที่สุดที่สามารถประมาณชุดข้อมูลทั้งหมด นั่นคือ เราจะหา $m$ และ $b$ ที่ทำให้ระยะของความคลาดเคลื่อนระหว่างชุดข้อมูลกับค่าที่ได้จากสมการที่สร้างขึ้นมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ เราจะหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$g(m,b) = \sum_{i=1}^{n}(mx_i + b - y_i)^2$$




**ภาพที่** 1.66. ความหมายทางเรขาคณิตของระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด

ความหมายทางเรขาคณิตของปัญหานี้ ปรากฏดังภาพ 1.66

(a) เพื่อหาค่าต่ำสุดของ $g$ เราจะหา $(m, b)$ ที่สอดคล้องกับ $\dfrac{\partial g}{\partial m} = 0$ และ $\dfrac{\partial g}{\partial b} = 0$ จงแสดงว่า สมการของจุดวิกฤตจะสอดคล้อง ถ้า $m$ และ $b$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) m + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(b) กำหนดให้ $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ จงใช้ความจริงที่ว่า

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \geq 0$$

แสดงว่า

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 0$$

(c) สมมติว่า $x_i$ แต่ละตัวแตกต่างกัน (แต่อาจซ้ำได้บางตัว) จงแสดงว่า สมการในข้อ (a) มีผลเฉลยเพียงอย่างเดียว นั่นคือ

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

(d) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $g_{mm}(m, b), g_{bb}(m, b), g_{mb}(m, b)$ และใช้ทฤษฎีบท 1.12.4 ในการตรวจสอบว่า $g$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤตในข้อ (a)

## 1.13 ตัวคูณลากรานจ์

ปัญหาในตัวอย่าง 1.12.7 คือปัญหาที่เราหาค่าต่ำสุดของ

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$V = xyz$$

ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาในกรณีเฉพาะของปัญหาการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสามตัวแปรภายใต้เงื่อนไข (constraint) หนึ่งเงื่อนไข กล่าวคือ

*หาค่าสูงสุด (maximize) หรือ หาค่าต่ำสุด (minimize) ของฟังก์ชัน* $f(x, y, z)$ *ภายใต้เงื่อนไข (subject to)* $g(x, y, z) = 0$

ทั้งนี้ ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

*หาค่าสูงสุด (maximize) หรือ หาค่าต่ำสุด (minimize) ของฟังก์ชัน* $f(x, y)$ *ภายใต้เงื่อนไข (subject to)* $g(x, y) = 0$

ฟังก์ชัน $f$ มักจะเรียกว่า **ฟังก์ชันจุดประสงค์** (objective function) และเงื่อนไข $g$ มักเรียกว่า **เงื่อนไข** หรือ **ข้อจำกัด** (constraint)

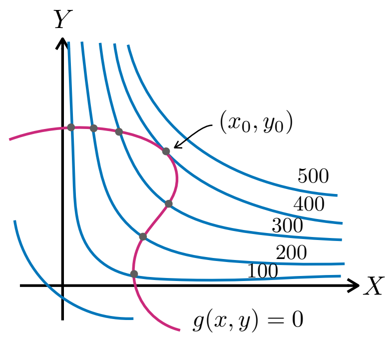
ในหัวข้อที่ผ่านมา เช่น ตัวอย่าง 1.12.7 เราศึกษาปัญหาของการหาค่าเหมาะที่สุดในกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรภายใต้เงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไข จะเห็นว่าในตัวอย่างดังกล่าว เราใช้วิธีการลดตัวแปรของฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective funtion) ด้วยการนำเงื่อนไขไปแทนในฟังก์ชันจุดประสงค์ อย่างไรก็ตาม หากเงื่อนไขที่มีไม่สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันชัดแจ้ง การแทนค่าดังกล่าวก็อาจทำได้ยาก

เพื่อให้การแก้ปัญหาการหาค่าสุดขีดสะดวกมากยิ่งขึ้น จึงมีการเสนอ**ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์** (method of Lagrange multiplier)

### 1.13.1 ระเบียบวิธีของตัวคูณลากรานจ์ที่มีหนึ่งเงื่อนไข

เราจะเริ่มกล่าวถึงกรณีฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขก่อน ดังนี้

สมมติว่าฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ต้องการหาค่าสูงสุดของ $f$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ปัญหานี้สามารถพิจารณาได้ว่า เราจะหาจุด $(x_0, y_0)$ บนเส้นโค้งของ $g$ ที่ทำให้ $f(x, y)$ มีค่ามากที่สุด พิจารณาตัวอย่างดังภาพ 1.67 โดยที่ตัวเลขแทนด้วยค่า $c$ ของ $f(x, y) = c$ จะเห็นว่า เราสามารถหาจุดตัดระหว่างเส้นชั้นความสูง $f(x, y)$ และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ซึ่งจุดตัดเหล่านี้เป็นคำตอบที่อาจเป็นไปได้สำหรับปัญหาการหาค่ามากที่สุดนี้ ซึ่งจากภาพ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชัน $f$ ที่มากที่สุดคือ 400



**ภาพที่** 1.67. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นชั้นความสูงของ $f$ และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่ให้ค่าสูงสุด

จากปัญหาดังกล่าว จะพบว่า $\nabla f(x_0, y_0)$ ตั้งฉากกับเส้นชั้นความสูง $f(x, y) = 400$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ และทำนองเดียวกัน $\nabla g(x_0, y_0)$ ก็ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ ด้วย ดังนั้น เราจึงได้ว่า เวกเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\nabla g(x_0, y_0)$ นั่นคือ มี $\lambda$ ซึ่งทำให้

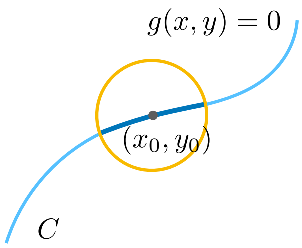
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

เพื่อนิยามปัญหาให้รัดกุมยิ่งขึ้น จึงขอนิยามคำศัพท์พื้นฐานต่าง ๆ ดังนี้

**บทนิยาม** 1.13.1 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y)=0$

1. จะกล่าวว่า $f$ มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ภายใต้ข้อจำกัด [ต่ำสุด]** (constrained absolute maximum) [(minimum)] ที่จุด $(x_0,y_0)$ ถ้า $f(x_0,y_0)$ เป็นค่ามากสุด [น้อยสุด] ของ $f$ บนเส้นโค้ง $g(x,y)=0$

2. จะกล่าวว่า $f$ มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด [ต่ำสุด]** (constrained relative maximum) [(minimum)] ที่จุด $(x_0,y_0)$ ถ้า $f(x_0,y_0)$ เป็นค่ามากสุด [น้อยสุด] ของ $f$ สำหรับบางส่วนของเส้นโค้งย่อยของเส้นโค้ง $g(x,y)=0$ ทั้งสองด้านของจุด $(x_0,y_0)$




**ภาพที่** 1.68. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด เกิดขึ้นที่จุด $(x_0,y_0)$ เนื่องจากมีเส้นโค้งย่อยทั้งสองด้านของจุด $(x_0,y_0)$

ภาพ 1.68 แสดงให้เห็นถึงตัวอย่างของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัดของ $f(x,y)$ บนเส้น $g(x,y)=0$ ที่จุด $(x_0,y_0)$

สมมติว่าค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัดเกิดขึ้น ณ จุด $(x_0,y_0)$ และสมมติให้ $g(x,y)=0$ เขียนได้ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(s) \qquad y = y(s)$$

โดยที่ $s$ คือตัวแปรเสริมของความยาวของส่วนโค้ง โดย $s=0$ ที่จุด $(x_0,y_0)$ ดังนั้น $z=f(x(s),y(s))$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $s=0$ นั่นคือ $dz/ds=0$ ณ จุด $(x_0,y_0)$ โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{ds} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)\cdot\left(\frac{dx}{\partial s}\mathbf{i} + \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) \\ &= \nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{T}(0) \end{aligned}$$

เมื่อ $\mathbf{T}(0)$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x,y)=0$ ที่จุด $(x_0,y_0)$

จากความสัมพันธ์ $\nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{T}(0)=0$ ทำให้ได้ว่า เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0,y_0)$ เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{0}$ หรือตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x,y)=0$ ที่จุดซึ่งเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด แต่เนื่องจาก $g(x,y)=0$ เป็นเส้นโค้งระดับหนึ่งของฟังก์ชัน $g(x,y)$ ดังนั้น ถ้า $\nabla g(x_0,y_0)\neq\mathbf{0}$ แล้ว $\nabla g(x_0,y_0)$ จะตั้งฉากกับเส้นโค้งนี้ที่จุด $(x_0,y_0)$ กล่าวคือ มีสเกลาร์ $\lambda\in\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$\nabla f(x_0,y_0) + \lambda\nabla g(x_0,y_0) = 0 \qquad (1.13.1)$$

สำหรับสเกลาร์ $\lambda$ จะเรียกว่า **ตัวคูณลากรานจ์** (Lagrange multiplier) ดังนั้น ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์จึงเป็นวิธีการที่หาจุดบนเส้นโค้งเงื่อนไข $g(x,y)=0$ ที่สอดคล้องกับสมการ (1.13.1) สำหรับบางสเกลาร์ $\lambda$

เมื่อพิจารณาความหมายของ $\lambda$ เราสามารถพิจารณาได้ว่า

$$\lambda = \frac{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}{\|\nabla g(x_0,y_0)\|}$$

ซึ่งมีความหมายเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของฟังก์ชันจุดประสงค์ต่อขนาดของฟังก์ชันที่เป็นข้อจำกัดนั่นเอง

ดังนั้น ดังที่กล่าวมาข้างต้น จึงสามารถสรุปวิธีการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขโดยระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 1.13.1 ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุเส้นโค้งของเงื่อนไข $g(x,y)=0$ โดยที่ $\nabla g \neq \mathbf{0}$ ที่จุดใด ๆ บน $g$ ถ้า $f$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่มีเงื่อนไขแล้ว ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่จุด $(x_0,y_0)$ บนเส้นโค้งเงื่อนไขซึ่งเวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0,y_0)$ และ $\nabla g(x_0,y_0)$ ขนานกัน กล่าวคือ มี $\lambda$ ที่ทำให้

$$\nabla f(x_0,y_0)+\lambda\nabla g(x_0,y_0)=0 \qquad (1.13.2)$$

จะเห็นว่า หากเราสร้างฟังก์ชัน

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)=\lambda g(x,y)$$

การหาจุดวิกฤต $F_x=F_y=F_\lambda=0$ ของ $F$ จะทำให้ได้เงื่อนไขดังสมการ (1.13.2) ในทฤษฎีบท 1.13.1 นั่นคือ

$$\begin{aligned} F_x &= f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)=0 \\ F_y &= f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)=0 \\ F_\lambda &= g(x,y)=0 \end{aligned}$$

กล่าวโดยสรุปแล้ว เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f$ ที่ต้องการหาค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไข $g(x,y)=0$ เราสามารถพิจารณาระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างฟังก์ชัน $F$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันสามตัวแปรของ $x,y,\lambda$ โดย

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

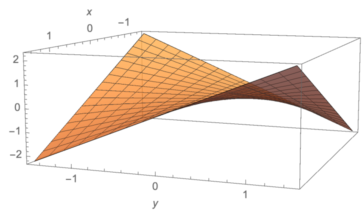
2. หาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $F$ นั่นคือ ทำการหา $(x,y,\lambda)$ ที่ทำให้

$$F_x=F_y=F_\lambda=0$$

3. กำจัด $\lambda$ เพื่อหาจุด $(x,y)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

4. นำจุดวิกฤตของฟังก์ชันดังกล่าวมาพิจารณาว่าเกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ด้วยการตีความหมายทางเรขาคณิตของแต่ละปัญหา

**ตัวอย่าง** 1.13.2 จงหาจุดบนวงกลม $x^2+y^2=1$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x,y)=xy$ เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์




**ภาพที่** 1.69. กราฟของฟังก์ชัน $f(x,y)=xy$

**วิธีทำ** เนื่องจากวงกลม $x^2+y^2=1$ เป็นเซตปิดและมีขอบเขต และ $f(x,y)=xy$ มีความต่อเนื่อง ณ จุดใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$ โดยทฤษฎีบท 1.12.1 จะได้ว่า $f$ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ เราจึงจะพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2+y^2=1$

เราทำการสร้างฟังก์ชันเงื่อนไข

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

ดังนั้น สร้างฟังก์ชัน

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$$

หาจุดวิกฤตของ $F$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_x &= y + \lambda(2x) &= 0 \\ F_y &= x + \lambda(2y) &= 0 \\ F_\lambda &= x^2+y^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = 0$ และถ้า $y = 0$ แล้ว $x = 0$ เช่นกัน แต่เนื่องจาก $(x,y) = (0,0)$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $x^2+y^2 = 1$ จึงจะสมมติว่า $x \neq 0$

จาก $x \neq 0$ จะได้ว่า $y \neq 0$ ดังนั้นจะเขียน $\lambda$ ได้ในรูป

$$\lambda = \frac{y}{2x}, \qquad \lambda = \frac{x}{2y}$$

นั่นคือ

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

ได้ว่า

$$x^2 = y^2$$

เพราะฉะนั้น จากเงื่อนไข $x^2+y^2 = 1$ จะได้เงื่อนไข

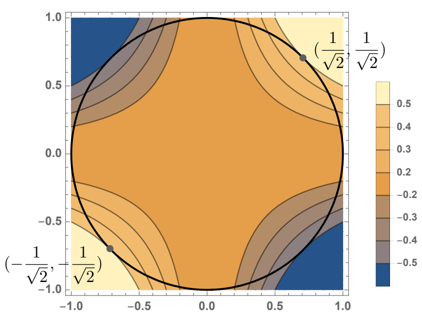
$$2x^2 - 1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ จึงได้ว่า $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น จุดวิกฤตทั้งหมดคือ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

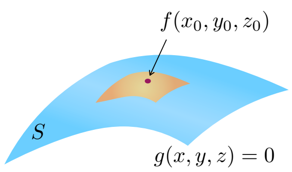
นำจุดวิกฤตทั้งหมดไปแทนใน $f$ เพื่อตรวจสอบ ได้ผลดังตาราง

| $(x,y)$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ |
|---|---|---|---|---|
| $xy$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ เกิดขึ้นที่จุด $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ และ $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ จากตัวอย่างดังกล่าว เราสามารถพิจารณาเส้นชั้นความสูงที่ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ปรากฏอยู่ดังภาพ 1.70




**ภาพที่** 1.70. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นชั้นความสูงของ $f$ และเส้นโค้ง $g(x,y) = 0$ ที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์




**ภาพที่** 1.71. ค่าสูงสุดของ $f(x,y,z)$ บนพื้นผิว $S$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร และ $g$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ $f$ เราก็สามารถพิจารณาปัญหาดังกล่าวได้ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับความหมายในกรณีที่ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร จะเห็นว่า สำหรับ $g(x,y,z) = 0$ คือพื้นผิว $S$ ในสามมิติ ดังนั้น ปัญหานี้จะเป็นการพิจารณาหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ $f(x,y,z)$ เมื่อ $(x,y,z)$ อยู่บนพื้นผิว $S$ ดังภาพ 1.71 ซึ่งแสดงค่าสูงสุดของ $f(x,y,z)$ กล่าวคือ $f(x_0,y_0,z_0) \geq f(x,y,z)$ สำหรับทุก $(x,y,z)$ บน $S$ ใกล้ ๆ $(x_0,y_0,z_0)$

ดังนั้น สำหรับกระบวนการหาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันสามตัวแปร $f(x,y,z)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y,z)=0$ เราสามารถพิจารณาได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างฟังก์ชัน $F$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $x,y,z,\lambda$ โดย

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

2. หาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $F$ นั่นคือ ทำการหา $(x,y,z,\lambda)$ ที่ทำให้

$$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$$

3. กำจัด $\lambda$ เพื่อหาจุด $(x,y,z)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

4. พิจารณาจุดวิกฤตตามปัญหาที่พิจารณา

**ตัวอย่าง** 1.13.3 การแก้ปัญหาในตัวอย่าง 1.12.7 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$S=xy+2xz+2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข $V=xyz$ เมื่อ $V$ เป็นค่าคงที่ โดยใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์

**วิธีทำ** จากเงื่อนไขดังกล่าว จะได้ฟังก์ชันเงื่อนไข

$$g(x,y,z)=xyz-V$$

ทำการสร้างฟังก์ชัน

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=(xy+2xz+2yz)+\lambda(xyz-V)$$

หาจุดวิกฤตของ $F$ จะได้ว่า

$$F_x=y+2z+\lambda yz=0 \tag{1.13.3}$$
$$F_y=x+2z+\lambda xz=0 \tag{1.13.4}$$
$$F_z=2x+2y+\lambda xy=0 \tag{1.13.5}$$
$$F_\lambda=xyz-V=0 \tag{1.13.6}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$y+2z=-\lambda yz,\qquad x+2z=\lambda xz,\qquad 2x+2y=\lambda xy$$

จากเงื่อนไขที่ว่า $x,y,z$ ไม่เป็นศูนย์ จึงได้ว่า

$$\frac{1}{z}+\frac{2}{y}=-\lambda,\qquad \frac{1}{z}+\frac{2}{x}=-\lambda,\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{x}=-\lambda$$

โดยสมการที่หนึ่งและสอง จะได้ว่า

$$y=x \tag{1.13.7}$$

และจากสมการที่หนึ่งและสาม จะได้ว่า

$$z = \frac{1}{2}x \tag{1.13.8}$$

เราจึงแทน (1.13.7) และ (1.13.8) ลงใน $xyz = V$ ได้ว่า

$$\frac{x^3}{2} = V$$

เพราะฉะนั้น $x = \sqrt[3]{2V}$ โดยเงื่อนไขของ (1.13.7) และ (1.13.7) จึงได้ว่า $y = \sqrt[3]{2V}$ และ $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ ซึ่งได้ผลสอดคล้องกับตัวอย่าง 1.12.7 ตามต้องการ

### 1.13.2 ระเบียบวิธีของตัวคูณลากรานจ์ที่มีมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข

สมมติให้ $f$ เป็นฟังก์ชัน $n+m$ ตัวแปร กล่าวคือ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m)$$

โดยที่มีเงื่อนไข $m$ เงื่อนไข กล่าวคือ

$$g_r(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m) = 0, r = 1, ..., m$$

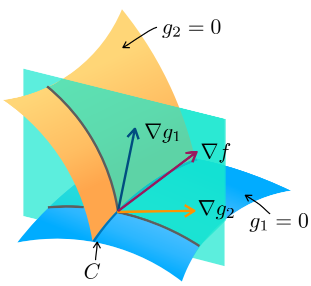
เราทำการสร้างฟังก์ชัน

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$$

จากนั้น หาจุดวิกฤต และทำในทำนองเดียวกันกับกรณีที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไข

สำหรับกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีสองเงื่อนไข เราสามารถพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตได้ กล่าวคือ สมมติ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยที่มีเงื่อนไข

$$g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$$




**ภาพที่** 1.72. เกรเดียนต์ $\nabla g_1, \nabla g_2$ และเวกเตอร์ $\nabla f$ บนระนาบเดียวกัน

โดยที่เกรเดียนต์ $\nabla g_1$ และ $\nabla g_2$ ซึ่งตั้งฉากกับพื้นผิว $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$ ที่จุด $(x, y, z)$ ไม่ขนานกัน สมมติ $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$ ตัดกันที่เส้นโค้งเรียบ $C$ บนเส้น $C$ ดังกล่าว เราสามารถหาจุดบนเส้นโค้ง $C$ ซึ่ง $f$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ ทั้งนี้ เราสามารถหาจุดบนเส้นโค้ง $C$ ซึ่ง $\nabla f$ ตั้งฉากกับ $C$ แต่เนื่องจาก $\nabla g_1, \nabla g_2$ ตั้งฉากกับ $C$ ที่จุดนั้น เนื่องจาก $C$ อยู่บนพื้นผิว $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$

ดังนั้น $\nabla f$ อยู่ในระนาบเดียวกันกับ $\nabla g_1, \nabla g_2$ นั่นคือ มี $\lambda_1, \lambda_2$ ที่ทำให้ $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ ดังภาพ 1.72 จึงได้เงื่อนไขของระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ในกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีสองเงื่อนไขดังกล่าว

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีเงื่อนไขสองเงื่อนไข เราสร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

จากนั้นทำการหาจุดวิกฤต และแก้ระบบสมการเพื่อหาจุด $(x, y, z)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

**ตัวอย่าง 1.13.4** ระนาบ $x + y + z = 1$ ตัดกับทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ได้รอยตัดเป็นวงรี จงหาจุด $(x, y, z)$ บนวงรีดังกล่าวที่ระยะระหว่างจุดนั้นกับจุดกำเนิดมีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุด

**วิธีทำ** สมมติให้ $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ เป็นฟังก์ชันที่วัดระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดบนวงรีซึ่งเป็นรอยตัดของพื้นผิวสองพื้นผิวดังกล่าว ปัญหาในตัวอย่างนี้ เราต้องการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $h$ ซึ่งจะเห็นว่า หาก $h$ ได้ค่าสุดขีดแล้ว $h^2$ ก็จะได้ค่าสุดขีดด้วย ดังนั้น เพื่อความสะดวก เราจะแปลงปัญหาเป็นการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

โดยมีเงื่อนไขสองเงื่อนไข คือ

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g_2(x, y, z) &= x + y + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เราสร้างฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z - 1) \end{aligned}$$

ต่อมา หาจุดวิกฤต โดยให้

$$F_x = 2x + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0 \tag{1.13.9}$$
$$F_y = 2y + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0 \tag{1.13.10}$$
$$F_z = 2z + \lambda_2 = 0 \tag{1.13.11}$$
$$F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1.13.12}$$
$$F_{\lambda_2} = x + y + z - 1 = 0 \tag{1.13.13}$$

จากสมการ (1.13.11) ได้ว่า $\lambda_2 = -2z$ จากสมการ (1.13.9) และ (1.13.10) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} 2x + \lambda_1(2x) - 2z &= 0 \qquad \text{ได้ว่า } (1 + \lambda_1)x = z \\ 2y + \lambda_1(2y) - 2z &= 0 \qquad \text{ได้ว่า } (1 + \lambda_1)y = z \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lambda_1 = -1$ และ $z = 0$ หรือ $\lambda_1 \neq -1$ และ $x = y = \dfrac{z}{1 + \lambda_1}$ จึงแบ่งเป็นสองกรณี ดังนี้

<u>กรณี $\lambda_1 = -1$ และ $z = 0$</u>

ทำการแก้ระบบสมการ (1.13.12), (1.13.13) ทำให้ได้ว่า $x = 0, 1$ นั่นคือ จุด $(0, 1, 0)$ และ $(1, 0, 1)$ ซึ่งต่างก็อยู่บนวงรีดังกล่าว สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

กรณี $\lambda_1 \neq -1$ และ $x = y = \dfrac{z}{1+\lambda_1}$

จากสมการ (1.13.12) และ (1.13.13) จะได้ว่า

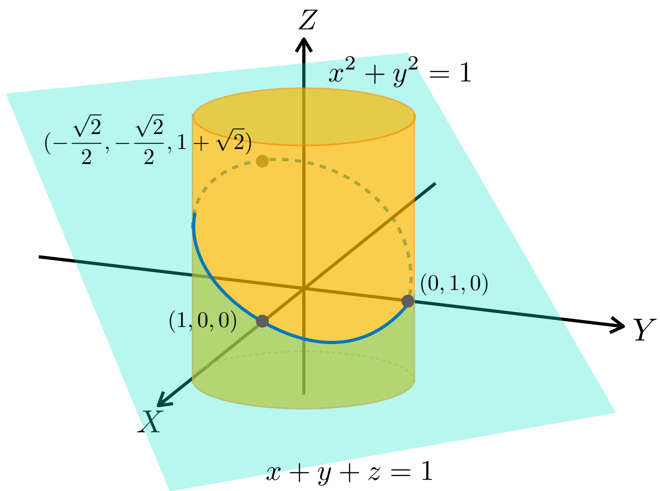
$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 1 & x + x + z &= 1 \\ 2x^2 &= 1 & 2x + z &= 1 \\ x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & z &= 1 \mp \sqrt{2} \end{aligned}$$

จึงได้ว่า มีจุดที่เป็นไปได้คือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$ แต่จุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของวงรีมีเพียงสองจุด คือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$ และ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$

นำจุดวิกฤตทั้งหมดไปแทนใน $f$ เพื่อตรวจสอบ ได้ผลดังตาราง

| $(x,y)$ | $(0,1,0)$ | $(1,0,1)$ | $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$ | $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$ |
|---|---|---|---|---|
| $xy$ | 1 | 1 | $4-2\sqrt{2}$ | $4+2\sqrt{2}$ |

ดังนั้น จุด $(0,1,0), (1,0,0)$ บนวงรี ให้ระยะทางน้อยที่สุดจากจุดกำเนิด และจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$ บนวงรี ให้ระยะทางมากที่สุดจากจุดกำเนิด สอดคล้องกับสถานการณ์ดังภาพ 1.73




**ภาพที่** 1.73. จุดบนวงรีที่อยู่ใกล้ที่สุดและไกลที่สุดจากจุดกำเนิด

# แบบฝึกหัดที่ 1.13

1. จงใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ หาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f$ ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดต่อไปนี้
   (a) $f(x,y) = xy$ ภายใต้ $4x^2 + 8y^2 = 64$
   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ ภายใต้ $x^2 + y^2 = 16$
   (c) $f(x,y,z) = 2x + y - 2$ ภายใต้ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   (d) $f(x,y,z) = xyz$ ภายใต้ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   (e) (ค่าสูงสุด) $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ ภายใต้ $2x - y = 0$ และ $y + z = 0$
   (f) (ค่าต่ำสุด) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ภายใต้ $x + 2y + 3z = 6$ และ $x + 3y + 9z = 9$

2. จงหาจุดบนเส้นตรง $2x - 4y = 4$ ที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด

3. จงหาจุดบนระนาบ $4x + 3y + z = 2$ ที่อยู่ใกล้กับจุด $(1,-1,1)$ มากที่สุด

4. จงหารัศมีและความสูงของทรงกระบอกมุมฉากซึ่งมีฐานเป็นวงกลมที่มีพื้นที่ผิวมากที่สุดที่สามารถแนบในทรงกลมรัศมี $a$ จากนั้นจงหาพื้นที่ผิวที่มากที่สุดนั้น

5. สมมติว่าอุณหภูมิ ณ จุด $(x,y)$ บนแผ่นโลหะ กำหนดดังสมการ

$$T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$

   มดตัวหนึ่งเดินบนแผ่นโลหะดังกล่าว โดยมีเส้นทางเดินเป็นวงกลมที่มีรัศมี 5 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จงหาอุณหภูมิที่สูงที่สุดและต่ำที่สุดบนแผ่นโลหะในแนวเส้นทางเดินที่มดเดินผ่าน

6. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x,y,z) = x^2yz + 1$ บนรอยตัดระหว่างทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ และระนาบ $z = 1$

7. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x,y,z) = xy + z^2$ บนวงกลมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y - x = 0$ และทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

8. จงหาจุดที่อยู่บนรอยตัดระหว่างระนาบ $y + 2z = 12$ และ $x + y = 6$ ที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด

9. **ปัญหาระนาบกำลังสองที่น้อยที่สุด** (a least squares plane) เป็นปัญหาที่คล้ายกับปัญหาเส้นโค้งกำลังสองมากที่สุด สำหรับข้อนี้เราจะหาระนาบ $z = Ax + By + C$ ที่ใช้ประมาณชุดข้อมูล $(x_k, y_k, z_k)$

   สมมติว่าชุดข้อมูลประกอบด้วย $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,1), (1,0,-1)$ จงหาค่า $A, B, C$ ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อน

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

   มีค่าน้อยที่สุด

10. พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

    (a) จงแสดงว่า ค่าสูงสุดของ $a^2b^2c^2$ บนทรงกลมรัศมี $r$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดในระบบพิกัด ABC คือ $(r^2/3)^3$

    (b) จงใช้ผลจากข้อ (a) แสดงอสมการดังกล่าวคืออสมการ AM-GM สำหรับจำนวนจริงสามจำนวน กล่าวคือ สำหรับจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ $a, b, c$

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

11. ในตัวอย่าง 1.6.2 เราได้กล่าวถึงสมการ Cobb-Douglas ซึ่งเป็นสมการที่นิยมในทางเศรษฐศาสตร์เพื่อใช้ในการผลิตสินค้า โดยปริมาณการผลิต $P$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับจำนวนการทำงาน $x$ หน่วย และปัจจัยทุน $y$ หน่วย กำหนดโดย

$$P(x, y) = kx^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

    โดยที่ $k$ และ $\alpha$ เป็นค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับบริษัทหรือระบบเศรษฐกิจนั้น ๆ

    (a) จงแสดงว่า หากเพิ่มแรงงานและต้นทุนเป็นสองเท่า จะได้ว่า ผลผลิต $P$ ก็จะเพิ่มขึ้น 2 เท่าตามไปด้วย

    (b) สำหรับบริษัทแห่งหนึ่ง สมมติว่า $k = 120, \alpha = 3/4$ หากต้นทุนของแรงงานเท่ากับ 250 บาทต่อหน่วย และต้นทุนของปัจจัยทุนต่อหน่วยเท่ากับ 400 บาท โดยที่ค่าใช้จ่ายทั้งหมดไม่เกิน $100,000$ บาท จงหาผลผลิตรวมมากที่สุดของบริษัทนี้

    (c) สำหรับค่าคงที่ $k, \alpha$ ถ้าต้นทุนต่อหน่วยของการทำงานคือ $c_1$ และต้นทุนต่อหน่วยของปัจจัยทุนคือ $c_2$ โดยที่บริษัทสามารถลงทุนได้ไม่เกิน $B$ บาทแล้ว ฟังก์ชันผลผลิตรวมจะมีเงื่อนไขคือ $c_1x + c_2y = B$ จงแสดงว่า ระดับการผลิตสูงสุดซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไข จะเกิดขึ้นที่

$$x = \frac{\alpha B}{c_1}, \quad y = \frac{(1-\alpha)B}{c_2}$$

# ปริพันธ์จำกัดเขต

บทที่

2

## การจัดการเรียนการสอน
## บทที่ 2 ปริพันธ์จำกัดเขต

**กระบวนวิชา** แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus)
**ชื่อผู้สอน** อ.ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
**เวลาที่ใช้** 6 ชั่วโมง

### วัตถุประสงค์

1. นักศึกษาสามารถคำนวณค่าปริพันธ์บางปริพันธ์โดยใช้นิยามปริพันธ์จำกัดเขตได้
2. นักศึกษาสามารถอธิบายทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส และใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้
3. นักศึกษาสามารถใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์สำหรับหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ได้
4. นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ และสลับลำดับการหาปริพันธ์ของปริพันธ์สองชั้น เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเสริม โดยใช้ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ได้
5. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาได้

### กิจกรรมการเรียนการสอน

1. การบรรยายในชั้นเรียน
2. การยกตัวอย่าง การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องในแต่ละหัวข้อ
3. นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัดจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน
4. นักศึกษาทำแบบฝึกหัดทบทวน และทำการบ้านเพื่อพัฒนาทักษะการพิสูจน์

### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนการสอน กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง
2. กระดาน ปากกา กระดาษ เครื่องฉายทึบแสง
3. กระดาษชาร์ตสำหรับเขียนคำตอบหน้าชั้นเรียน

**เอกสารอ้างอิง**


1. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
2. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. อติชาต เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4. Amazigo, J. C., & Rubenfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.
5. Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.
6. Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis. 4th edition, NJ: Wiley.
7. Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.
8. Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley
9. Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
10. Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
11. Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.
12. Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
13. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.

# ปริพันธ์จำกัดเขต

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ทำการศึกษาประเด็นของแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียวในเรื่องอนุพันธ์ และปริพันธ์ รวมถึงกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองแนวคิด สำหรับรายละเอียดที่เกี่ยวข้องในเชิงลึกของปริพันธ์ จะกล่าวถึงในกระบวนวิชา การวิเคราะห์เชิงจริง (real analysis)

สำหรับกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษารายละเอียดที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขตที่ขยายความมากขึ้นจากแคลคูลัสพื้นฐานในบริบทที่มีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันหลายตัวแปร อาทิ การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ เป็นต้น

## 2.1 บทนิยามและสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

ปัญหาดั้งเดิมของปริพันธ์จำกัดเขตคือ การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ ก่อนอื่น เราจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขตดังนี้

พิจารณาปัญหาพื้นที่ จากภาพ 2.1 สำหรับช่วงปิด $I = [a, b]$ ผลแบ่งกั้น (partition) $\mathcal{P}$ ของ $I$ คือเซตจำกัดของจุด $\mathcal{P} := \{x_0, ..., x_n\}$ ใน $I$ ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

ดังนั้น บรรดาจุดใน $\mathcal{P}$ จะแบ่งช่วง $I$ เป็น $n$ ช่วงย่อย

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], ..., \quad I_n := [x_{n-1}, x_n]$$

กำหนดให้ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ต่อไป เรานิยาม**นอร์ม** (norm) ของ $\mathcal{P}$ เขียนแทนด้วย $\|\mathcal{P}\|$ คือ ความกว้างของช่วงย่อยที่มากที่สุด กล่าวคือ

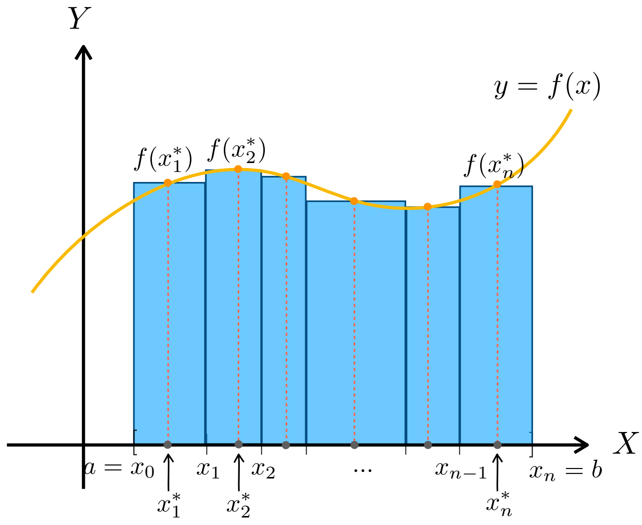
$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$$

เมื่อเลือกจุด $x_k^*$ ใด ๆ ในช่วงย่อย $I_k$ นั่นคือ $x_k^* \in I_k$ จะสร้าง**ผลบวกรีมันน์** (Riemann's sum)

$$S(f; \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{2.1.1}$$

เมื่อแบ่งช่วงย่อย $I_k$ ให้มีจำนวนมากขึ้นจน $n \to \infty$ จะทำให้ได้ว่า $\|\mathcal{P}\| \to 0$ นั่นคือ จะนิยาม**ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) โดย

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{2.1.2}$$




**ภาพที่** 2.1. การแบ่งพื้นที่ใต้ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$

**บทนิยาม 2.1.1** จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์** (Riemann integrable) ถ้าสำหรับผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}$ บน $[a, b]$ ลิมิตของผลบวกรีมันน์มีค่า เมื่อ $\|\mathcal{P}\| \to 0$ โดยจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขต โดย

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S(f; \mathcal{P})$$

โดยที่ $f(x)$ เรียกว่า **ปริพัทธ์** (integrand) หรือตัวถูกอินทิเกรต, $[a, b]$ เรียกว่า **ช่วงการหาปริพันธ์** (range of integration), $a$ เรียกว่า **ขีดจำกัดล่าง** (lower limit) และ $b$ เรียกว่า **ขีดจำกัดบน** ของการหาปริพันธ์

ชั้น (class) ของฟังก์ชัน $f$ ซึ่ง $f$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ จะเขียนแทนด้วย $\mathcal{R}[a, b]$

**หมายเหตุ** นิยามที่เป็นทางการของนิยาม 2.1.1 สามารถกล่าวได้ในรูป $\delta - \epsilon$ ได้ว่า

ฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ ถ้ามีจำนวนจริง $L \in \mathbb{R}$ ซึ่งสำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}$ ใด ๆ ซึ่ง $\|\mathcal{P}\| < \delta$ แล้ว

$$|S(f; P) - L| < \epsilon$$

เมื่อ $f(x) \geq 0$ ความหมายในทางเรขาคณิตของผลบวก (2.1.1) คือ การประมาณพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แท่งสี่เหลี่ยมย่อยแต่ละแท่งมีความกว้าง $\Delta x_k$ และความสูง $f(x_k^*)$ ดังภาพ 2.1 เราจึงกล่าวได้ว่า ผลบวก (2.1.1) คือการประมาณพื้นที่ใต้กราฟของ $f$ บนช่วง $[a, b]$ และปริพันธ์จำกัดเขต $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ แสดงพื้นที่ใต้กราฟของ $f$ บนช่วงปิด $[a, b]$

ทั้งนี้ในช่วงที่ $f(x) < 0$ กล่าวคือ ค่าของ $f$ เป็นลบ จะทำให้ผลบวกในส่วนที่ $f(x) < 0$ มีค่าเป็นลบ ทำให้ (2.1.1) และ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ไม่สามารถแสดงความหมายของพื้นที่ใต้ $f$ อีกต่อไป แต่ปริพันธ์จำกัดเขตจะแสดง**พื้นที่เครื่องหมายสุทธิ** (net-signed area) ของ $f$ บนช่วงปิด $[a, b]$

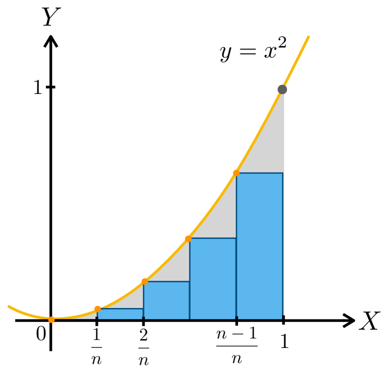
จากนิยาม 2.1.1 เราสามารถเลือกช่วงย่อยให้มีความยาวช่วงย่อยเท่ากัน และเลือกจุดในช่วงย่อยเป็นจุดใด ๆ ได้ เพื่อความสะดวกอาจเลือกเป็นจุดที่ทำให้คำนวณค่าของฟังก์ชันได้ง่าย กล่าวคือ

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการหาคำนวณค่าปริพันธ์จำกัดเขต โดยการสร้างผลบวกรีมันน์

**ตัวอย่าง** 2.1.1 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต $\int_0^1 x^2\,dx$




**ภาพที่** 2.2. พื้นที่ใต้กราฟ $f(x)=x^2$ บน $[0,1]$

**วิธีทำ** พิจารณาปัญหาดังกล่าวดังภาพ 2.2 ก่อนอื่น ทำการแบ่งช่วงปิด $[0,1]$ ออกเป็น $n$ ช่วงย่อย โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่าทำการแบ่งช่วงย่อยออกเป็น $n$ ช่วงเท่า ๆ กัน นั่นคือ เลือกผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}=\{0=x_0, x_0+\frac{1}{n},\ldots,x_0+\frac{n-1}{n},x_n=1\}$ โดยที่ $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$ สำหรับทุก $k=1,\ldots,n$

ขั้นตอนต่อไป ทำการเลือกจุด $x_k^*$ ซึ่งเราสามารถเลือกจุด $x_k^*$ ได้อย่างอิสระ ในที่นี้ สมมติว่าเลือกจุด $x_k^*$ เป็นจุดปลายช่วงย่อยด้านซ้ายมือของช่วงย่อย $I_k := [x_{k-1},x_k]$ จะได้ว่า แต่ละจุดในช่วงย่อย $I_k$ เขียนได้ในรูป $x_k^* := 0+\dfrac{k-1}{n}$ ดังนั้น จะได้ผลบวกรีมันน์

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k &= f(x_1^*)\Delta x_1+\ldots+f(x_1^*)\Delta x_n\\
&= f(0)\frac{1}{n}+f(0+\frac{1}{n})\frac{1}{n}+\ldots+f(0+\frac{n-1}{n})\frac{1}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\\
&= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)+n\right]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อให้ $n\to\infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)+n\right)=\frac{1}{3}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

ในการวิเคราะห์เชิงจริง มีการศึกษาฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ ที่หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ เราจะกล่าวอ้างผลดังกล่าวโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.1.2 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[a,b]$

1. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ (piecewise-defined function) แล้ว $f \in \mathcal{R}[a,b]$
2. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแล้ว $f \in \mathcal{R}[a,b]$
3. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotonic function) แล้ว $f \in \mathcal{R}[a,b]$

**หมายเหตุ**

1. ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ (piecewise-defined function) คือ ฟังก์ชันที่นิยามอย่างแตกต่างกัน บนช่วงที่แตกต่างกัน เช่น ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ สามารถพิจารณาตามเงื่อนไขในแต่ละช่วงได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

2. จะกล่าวว่า $f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotonic function) บน $[a,b]$ ถ้าสำหรับทุก $x_1, x_2 \in [a,b]$ ซึ่ง $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$ หรือ $f(x_1) \geq f(x_2)$ ทั้งนี้ เมื่อ $f(x_1) \leq f(x_2)$ จะกล่าวว่า $f$ เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) และเมื่อ $f(x_1) \geq f(x_2)$ จะกล่าวว่า $f$ เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะกล่าวถึงสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.1.3 ให้ $f, g$ หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ $k$ เป็นค่าคงที่แล้ว

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. ถ้า $c \in [a,b]$ และ $f$ หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,c]$ และ $[c,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

**พิสูจน์** เราจะแสดงให้ดูเฉพาะข้อ 4 สำหรับข้ออื่น ๆ ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

4. ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ ทำการเลือก $\mathcal{P}$ และจุด $x_1^*, ..., x_n^*$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k^*) + g(x_k^*))\Delta x_k \\
&= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \left( \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\Delta x_k \right) \\
&= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k + \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\Delta x_k \\
&= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx
\end{aligned}$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะกล่าวถึงอสมการที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.1.4 ให้ $f, g$ หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว

1. ถ้า $f$ มีขอบเขต กล่าวคือ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

2. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$

3. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

**พิสูจน์** เราจะแสดงข้อ 1, 3 ส่วนข้อ 2 ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

1. ให้ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น $n$ ช่วงย่อยด้วยผลแบ่งกั้นซึ่งกำหนดโดยจุด $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

เนื่องจาก $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า $m \leq f(x_k^*) \leq M$ สำหรับทุก $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ เพราะฉะนั้น

$$m\Delta x_k = m(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k^*)\Delta x_k \leq M(x_k - x_{k-1}) = M\Delta x_k$$

เมื่อรวมผลลัพธ์สำหรับทุกช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า

$$m(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \leq M(b-a)$$

นั่นคือ $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$ ตามต้องการ

3. สำหรับผลแบ่งกัน $\mathcal{P}$ ใด ๆ โดยอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k^*)|\Delta x_k$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| \leq \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k^*)|\Delta x_k$$

เนื่องจาก $g(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}$ จึงได้ว่า

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| = \left|\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| \leq \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k^*)|\Delta x_k$$

นั่นคือ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ ตามต้องการ □

**ตัวอย่าง 2.1.5** จงเขียนผลบวก $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$ ในรูปของปริพันธ์จำกัดเขต

**วิธีทำ** ลิมิตของผลบวกดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูปลิมิตของผลบวกรีมันน์ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(1+\frac{i}{n})} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i/n}\end{aligned}$$

จากนิยามของผลบวกรีมันน์ จะได้ว่า ผลบวกดังกล่าวคือผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ บนช่วงปิด $[0,1]$ เมื่อแบ่ง $[0,1]$ เป็น $n$ ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$

ซึ่ง $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ สามารถคำนวณได้จากวิธีที่จะศึกษาในหัวข้อต่อไป

**ตัวอย่าง 2.1.6** จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx = 0$

**วิธีทำ** โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \leq \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|\,dx$$

เนื่องจาก $|\sin nx| \leq 1$ และ $\dfrac{1}{x^2+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ และจากแคลคูลัสพื้นฐาน จะได้ว่า

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\, dx = \frac{2\pi}{n^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^2} = 0$$

นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx = 0$$

**ตัวอย่าง 2.1.7** หากทราบว่า $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{12}$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\, dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

**วิธีทำ** โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\, dx\right| \leq \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\right| dx$$

เนื่องจาก $|\sin x| \leq 1$ และสำหรับทุก $x \in [1, \sqrt{3}]$ ได้ว่า $-\frac{1}{e^{\sqrt{3}}} \leq e^{-x} \leq \frac{1}{e}$ นั่นคือ $|e^{-x}| \leq \frac{1}{e}$ จะได้ว่า

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\, dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

# แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขต คำนวณค่าปริพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^2 (3x+1)\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_3^6 (x^2-4x)\, dx$

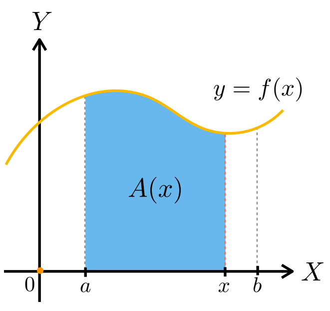
2. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขต พิสูจน์ว่า $\displaystyle\int_a^b e^x\, dx = e^b - e^a$

3. จงเขียนผลบวกต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปปริพันธ์จำกัดเขต
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{t}{n} + \sin\frac{2t}{n} + \ldots + \sin\frac{nt}{n}\right)$
   (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 4x_k^*(1-3x_k^*)\Delta x_k^*$ เมื่อกำหนด $a=-3, b=3$
4. จงแสดงว่า
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) = \ln(1+\sqrt{2})$$
5. จงแสดงว่า
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos^2\frac{\theta}{n} + \cos^2\frac{2\theta}{n} + \ldots + \cos^2\frac{n\theta}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4\theta}$$
6. สำหรับ $m > -1$ จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}\right) = \frac{1}{m+1}$
7. จงแสดงว่า $\left|\int_0^1 \frac{\cos nx}{x+1}\,dx\right| \le \ln 2$ สำหรับทุก $n$
8. จงแสดงว่า $\int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x}\,dx \le \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$

## 2.2 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

จากนิยาม 2.1.1 การหาปริพันธ์จำกัดเขตสามารถทำได้โดยการหาผลบวกรีมันน์ อย่างไรก็ตาม การคำนวณหาผลบวกรีมันน์นั้นมีความซับซ้อน เราจึงเริ่มต้นพิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตจากกระบวนการที่ตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ คือ การปฏิยานุพันธ์นั่นเอง

**บทนิยาม 2.2.1** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า $F$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์** (antidervative) ของ $f$ ถ้า $F'(x) = f(x)$ เขียนแทนด้วย**ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) โดย
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$




**ภาพ ที่** 2.3. ฟังก์ชัน พื้นที่ $A(x)$ เมื่อ $A'(x) = f(x)$

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันว่า เป็นกระบวนการที่ทำย้อนกลับกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งสำหรับปัญหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิด $[a,b]$ เราพิจารณาปัญหาดังนี้

สมมติให้ $A(x)$ คือฟังก์ชันของพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a,x]$ ดังนั้น สำหรับปัญหาการหาพื้นที่ใต้กราฟ $f$ บนช่วง $[a,b]$ เราจะหาฟังก์ชันซึ่งมีสมบัติว่า $A'(x) = f(x), A(0) = 0$ และ $A(b) = A$ เมื่อ $A$ คือพื้นที่ใต้กราฟดังกล่าว ดังภาพ 2.3

จากการกำหนด $A'(x) = f(x)$ คือ $A$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ ทำให้ได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ $F$ อื่นๆ ของ $f$ เขียนได้ในรูป $F(x) = A(x)+C$ ดังนั้น เมื่อพิจารณา $F(b)-F(a)$ จะได้ว่า
$$F(b) - F(a) = [A(b)+C] - [A(a)+C] = A + 0 = A$$

และเนื่องจากเราทราบว่า $\int_a^b f(x)\,dx = A$ ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญ นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

กล่าวคือ ปริพันธ์จำกัดเขตของ $f$ ตามนิยาม 2.1.1 สามารถคำนวณค่าได้จากค่าของปฏิยานุพันธ์ของขอบเขตบน ลบกับค่าของปฏิยานุพันธ์ของขอบเขตล่าง

### 2.2.1 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1

จากข้อเท็จจริงดังกล่าว ทำให้เราได้ทฤษฎีบทที่มีความสำคัญมากในแคลคูลัส คือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งมีอยู่สองส่วน โดยก่อนอื่นเราจะแสดงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus) ส่วนที่หนึ่ง ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.2.1 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1)
ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ บน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

**พิสูจน์** ให้ $\mathcal{P} := \{x_0, ..., x_n\}$ เป็นเซตของจุดใน $[a,b]$ ที่เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

โดยเกิดช่วงย่อย $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ เมื่อ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

จากสมมติฐาน $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม 1.4.2 บนช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า มี $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ ซึ่ง $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}
F(x_1) - F(a) &= F'(x_1^*)(x_1 - x_0) &&= f(x_1^*)\Delta x_1 \\
F(x_2) - F(x_1) &= F'(x_2^*)(x_2 - x_1) &&= f(x_2^*)\Delta x_2 \\
&\ \ \vdots && \ \ \vdots \\
F(b) - F(x_{n-1}) &= F'(x_n^*)(x_n - x_{n-1}) &&= f(x_n^*)\Delta x_n
\end{aligned}$$

รวมสมการทุกสมการ จะได้ว่า

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

เนื่องจาก $f$ มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ จึงได้ว่า เมื่อให้ $n \to \infty$ ทำให้ได้ว่า $\|\mathcal{P}\| \to 0$ จึงได้ว่า

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

ตามต้องการ $\square$

เราอาจเขียนสัญลักษณ์การคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้ กล่าวคือ หากปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ คือ $F(x)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$$

**ตัวอย่าง 2.2.2** จากตัวอย่าง 2.1.1 จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 คำนวณค่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

**วิธีทำ** เราทราบว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ สำหรับค่าคงที่ $C$ ใด ๆ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \left.\frac{x^3}{3} + C\right|_{x=0}^{1} \\ &= \left[\frac{1^3}{3} + C\right] - \left[\frac{0^3}{3} + C\right] = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

### 2.2.2 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราทำการสร้างฟังก์ชันพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บน $[a, x]$ และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในส่วนที่หนึ่งทำให้เราทราบว่า ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขตมีความสัมพันธ์กัน ดังนั้น เราจึงนิยามปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้จากปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

**บทนิยาม 2.2.2** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์บนช่วง $[a, b]$ ฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad t \in [a, b]$$

จะเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของ $f$

เนื่องจากปริพันธ์จำกัดเขต มีค่าขึ้นอยู่กับการหาลิมิตของปริพันธ์ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ตัวแปรอื่น ๆ นอกเหนือจากตัวแปร $x$ ได้ เช่น

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

ตัวแปรเหล่านี้ จะเรียกว่า **ตัวแปรหุ่น** (dummy variable)

เราทราบว่า $F$ ซึ่งเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ มีความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 ดังนั้น หากปฏิยานุพันธ์ของ $f$ นิยามโดยปริพันธ์ไม่จำกัดเขตดังนิยาม 2.2.2 แล้ว คำถามที่น่าสนใจคือ $F'(x)$ จะมีความสัมพันธ์ในลักษณะอย่างไร ก่อนที่จะตอบคำถามเหล่านั้น จะขอยกทฤษฎีบทที่สำคัญที่ใช้ในการพิสูจน์ ดังนี้

ในทฤษฎีบท 1.12.1 เราได้กล่าวในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร สำหรับกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถกล่าวได้เช่นกัน ในที่นี้ขอยกทฤษฎีบทดังกล่าวโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.2.3 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีดสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว)
ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว $f$ มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

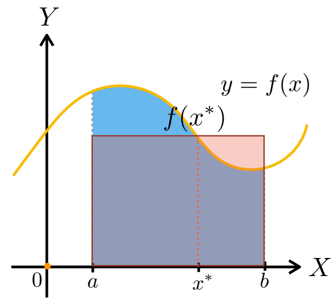
นอกจากนี้หาก $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะทำให้ได้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate-value theorem) ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.2.4 (ทฤษฎีบทระหว่างกลาง)
ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $k$ อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว จะมี $x \in [a, b]$ ที่ทำให้ $f(x) = k$ มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

ในทฤษฎีบท 1.4.2 เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ ในทำนองคล้ายกัน เราสามารถพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (The mean-value theorem for integrals) ได้เช่นกัน สำหรับหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ในรูปอย่างอ่อน (weak form) เท่าที่เพียงพอในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป ทั้งนี้ เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบวางนัยทั่วไปในหัวข้อถัดไป

**ทฤษฎีบท** 2.2.5 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์)
ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว มีจุด $x^* \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$



**ภาพที่** 2.4. ความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์

**พิสูจน์** โดยทฤษฎีบท 1.12.1 สมมติว่า $f$ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a, b]$ เท่ากับ $M$ และ $m$ ตามลำดับ นั่นคือ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $m \leq f(x) \leq M$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.1.4 จะได้ว่า

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

เพราะฉะนั้น

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad (2.2.1)$$

เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่ง $f$ ให้ค่าเป็น $m$ และ $M$ โดยทฤษฎีบทค่าสุดสุดขีด (ทฤษฎีบท 2.2.3) และสอดคล้องกับเงื่อนไข (2.2.1) โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (ทฤษฎีบท 2.2.4) จะได้ว่า มี $x^* \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)$$

หรือได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

ตามต้องการ $\square$

ความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ สามารถพิจารณาได้ดังภาพ 2.4 กล่าวคือ เราสามารถหาจุด $x^*$ ในช่วง $[a,b]$ ที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง $b-a$ ความสูง $f(x^*)$ เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บน $[a,b]$

เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.2.6** (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2)
ถ้า $f$ มีความต่อเนื่องบนช่วง แล้ว $f$ มีปฏิยานุพันธ์บนช่วงนั้น และถ้า $x$ เป็นจุดในช่วงนั้นแล้ว $F$ ซึ่งนิยามโดย

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x$ บนช่วง กล่าวคือ

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

**พิสูจน์** ก่อนอื่นจะแสดงว่า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ ที่ทุก $x$ บนช่วง ๆ หนึ่ง

จะเห็นว่า ถ้า $x > a$ และ $x$ อยู่ในช่วงนั้นแล้ว พื้นที่เครื่องหมายสุทธิที่นิยามโดย $\int_a^x f(x)\,dx$ บนช่วง $[a,x]$ และ จาก $f$ มีความต่อเนื่อง ทำให้ปฏิยานุพันธ์ $F(x)$ มีค่า ในกรณีที่ $x \leq a$ โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 2 ก็จะสามารถแสดงได้ว่า $F(x)$ มีค่าเช่นกัน

ต่อไปจะแสดงว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x$ บนช่วง ถ้า $x$ ไม่เป็นจุดปลายช่วงแล้ว โดยนิยามของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี $x^*$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}[f(x^*)(x+h-x)] = f(x^*)$$

โดยที่ $x \leq x^* \leq x+h$ ดังนั้น เมื่อให้ $h \to 0$ จะได้ว่า $x^* \to x$ และเนื่องจาก $f$ มีความต่อเนื่องบนช่วง ทำให้ได้ว่า

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) = \lim_{h\to 0} f(x^*) = f(x)$$

ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ $x$ เป็นจุดปลายช่วง จะแสดงได้โดยใช้ลิมิตด้านเดียวและทำได้ในทำนองเดียวกัน จึงจบการพิสูจน์ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 2.2.6 แสดงให้เห็นว่า $F(x)$ ที่นิยามหาอนุพันธ์ได้ จึงสรุปได้ว่า $F(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วงเช่นกัน

**ตัวอย่าง 2.2.7** จงหาค่า $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt\right]$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(t) = e^{t^2}\sin t$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt\right] = e^{x^2}\sin x$$

จะเห็นว่า จากทฤษฎีบท 2.2.6 เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F$ เทียบกับ $x$ เมื่อ $x$ เป็นตัวแปรที่อยู่ที่ขอบเขตบนของการหาปริพันธ์ ดังนั้น ในกรณีที่ขอบเขตบนอยู่ในรูปของฟังก์ชันอื่น ๆ รวมถึงขอบเขตล่างไม่ได้เป็นจุด $a$ การหาอนุพันธ์ของปฏิยานุพันธ์ดังกล่าวจึงมีการเปลี่ยนรูป ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.2.8** ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$, $u, v$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้โดยที่เรนจ์ $R_u, R_v \subset [a,b]$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

**พิสูจน์** ให้ $F[a,b] \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ เพราะฉะนั้น

$$(F \circ v)(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\,dt$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า $(F \circ v)'(x) = F'(v(x))v'(x) = f(v(x))v'(x)$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{c} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{v(x)} f(t)\,dt\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(-\int_c^{u(x)} f(t)\,dt + \int_c^{v(x)} f(t)\,dt\right)\\
&= -\frac{d}{dx}\int_c^{u(x)} f(t)\,dt + \frac{d}{dx}\int_c^{v(x)} f(t)\,dt\\
&= -f(u(x))u'(x) + f(v(x))v'(x)\\
&= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

ตามต้องการ $\square$

**ตัวอย่าง 2.2.9** จงหาค่า $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right]$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 2.2.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right] &= \frac{\sin x^2}{x^2}\frac{d(x^2)}{dx} - \frac{\sin x}{x}\frac{dx}{dx}\\ &= \frac{2\sin x^2}{x} - \frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

### 2.2.3 การเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยได้ศึกษาการเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์ (integration by substitution) เมื่อเราไม่สามารถหาปริพันธ์โดยตรงได้โดยตรง ในส่วนนี้เราจะพิสูจน์การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

**หมายเหตุ** จะกล่าวว่า $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$ หรือ $f(x) > f(y)$

**ทฤษฎีบท 2.2.10** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ $\phi$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บน $[\alpha, \beta]$ โดยที่ $\alpha = \phi(a), \beta = \phi(b)$ และ $\phi'$ หาอนุพันธ์ได้แบบรีมันน์บน $[\alpha, \beta]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

**พิสูจน์** สมมติว่า $\phi$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ดังนั้น $\phi$ มีตัวผกผัน กล่าวคือ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า $\alpha = \phi^{-1}(a)$ และ $\beta = \phi^{-1}(b)$

เลือกผลแบ่งกั้น $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ บนช่วง $[a, b]$ และ $\mathcal{Q} = (\alpha = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = \beta)$ บนช่วง $[\alpha, \beta]$ โดยที่ $t_i = \phi^{-1}(x_i)$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $t_k^*$ บนช่วงย่อย $[t_{k-1}, t_k]$

$$\Delta x_k = \phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) = \phi'(t_k^*)\Delta t_k$$

ให้ $x_k^* = \phi(t_k^*)$ โดยที่ $x_k^*$ อยู่ในช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ สร้างผลบวกรีมันน์

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\phi(t_k^*))\phi'(t_k^*)\Delta t_k$$

เนื่องจาก $\phi$ หาอนุพันธ์ได้ จึงได้ว่า $\phi$ มีความต่อเนื่อง จึงได้ว่า เมื่อ $\|\mathcal{P}\| \to 0$ แล้ว $\|\mathcal{Q}\| \to 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

ตามต้องการ $\square$

**ตัวอย่าง 2.2.11** จงหาค่า $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

**วิธีทำ** ให้ $x = \phi(t) = \sqrt{t}$ สำหรับ $t \in [1,4]$ จะเห็นว่า $\phi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ ซึ่งมีความต่อเนื่องบน $[1,4]$ ถ้าให้ $f(x) = 2\sin x$ แล้ว ปริพัทธ์จะอยู่ในรูป $(f\circ\phi)\cdot\phi'$

ดังนั้นสำหรับขอบเขตการหาปริพันธ์จะเปลี่ยนไป จาก $t = 1$ จะได้ $x = \phi(1) = 1$ และถ้า $t = 4$ จะได้ $x = \phi(4) = 2$ นั่นคือ

$$\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^2 2\sin x\,dx = -2\cos x\Big|_1^2 = 2(\cos 1 - \cos 2)$$

# แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4x(1-x^2)\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{-2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/4} |\cos x|\,dx$
   (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-3x^4}}\,dx$
2. กำหนดฟังก์ชัน $F(x)$ โดย $F(x) = \displaystyle\int_1^x (3t^2-3)\,dt$ จงหาอนุพันธ์ $\dfrac{dF(x)}{dx}$ โดย
   (a) ใช้การหาปริพันธ์โดยตรง จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ $x$
   (b) ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2
3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   (a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \sin(t^2)\,dt\right]$
   (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt\right]$
   (c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_x^0 t\sec t\,dt\right]$
   (d) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_1^{\sin x} (1-t^2)\,dt\right]$
   (e) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\,dt\right]$
   (f) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1}\,dt\right]$

4. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $F(x) = \int_x^{5x} \frac{1}{t}\, dt$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง $(0, +\infty)$ พร้อมหาค่าคงที่นั้น (คำใบ้ : พิจารณาจากอนุพันธ์ของ $F$)

5. กำหนดให้ $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}\, dt$ สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$

   (a) จงหาค่า $x$ ที่ทำให้ $F$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

   (b) จงหาช่วงของ $x$ ที่ $F$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด

   (c) จงหาช่วงของ $x$ ที่ $F$ มีความเว้าขึ้น และเว้าลง

6. ให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\, dx$$

7. จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ $a$ ใด ๆ

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\, du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$$

8. จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ $\alpha > 1$

$$\int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

9. จงหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{ex^2/\pi - e\pi/4 + \int_x^{\pi/2} e^{\sin t}\, dt}{1+\cos 2x}$

10. **ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ** (natural logarithm function) $\ln x$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริพันธ์จำกัดเขต

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

   (a) จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่ 2 แสดงว่า $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$

   (b) จงใช้นิยามที่กล่าวมาข้างต้น แสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก $a, c$ จะได้ว่า $\ln(ac) = \ln a + \ln c$ (คำใบ้ : สร้างฟังก์ชัน $f(x) = \ln(ax)$ แล้วพิจารณาเทียบ $\ln(ax)$ กับ $\ln x$)

## 2.3 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ในรูปแบบอ่อน ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมฉบับสมบูรณ์ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการประมาณค่าของปริพันธ์ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.3.1** (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่หนึ่งทั่วไปสำหรับปริพันธ์)
ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยที่ $g(x) \neq 0$ และ $g(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายบน $[a,b]$ แล้ว จะมี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

**พิสูจน์** เราจะแสดงในกรณีที่ $g(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ สำหรับกรณี $g(x) < 0$ จะสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

จาก $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้ว่า $f$ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a,b]$ สมมติว่าค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์นั้นคือ $M$ และ $m$ ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m \leq &\quad f(x) &\leq M \\ mg(x) \leq &\quad f(x)g(x) &\leq Mg(x) \\ m\int_a^b g(x)\,dx \leq &\int_a^b f(x)g(x)\,dx &\leq M\int_a^b g(x)\,dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก $g(x) > 0$ จึงได้ว่า

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $m \leq f(x) \leq M$ โดยทฤษฎีบท 2.2.4 จะได้ว่า มี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$f(\xi) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}$$

นั่นคือ มี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

ตามต้องการ □

**หมายเหตุ** จะเห็นว่า ในทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้าให้ $g(x) = 1$ จะได้ว่า ทฤษฎีบท 2.3.1 ลดรูปเป็นรูปอย่างอ่อนในทฤษฎีบท 2.2.5 กล่าวคือ มี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

**ตัวอย่าง 2.3.2** จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, \frac{1}{2}]$ และ $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0, \frac{1}{2}]$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกตลอดบนช่วงดังกล่าว โดยทฤษฎีบท 2.2.5 จะได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ ที่ทำให้

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \left(\frac{1}{2} - 0\right) f(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\xi^2}\right)$$

เนื่องจาก $1 \le f(\xi) \le \frac{4}{3}$ จึงได้ว่า $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}f(\xi) \le \frac{2}{3}$ นั่นคือ

$$\frac{1}{2} \le \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx \le \frac{2}{3}$$

**ตัวอย่าง 2.3.3** จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \text{สำหรับทุก } k^2 < 2$$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 2.3.1 เลือก $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}, g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ จะเห็นว่า $g(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$ จึงได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} [\sin^{-1} x]_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{6} f(\xi)
\end{aligned}$$

ต่อไปจะพิจารณาขอบเขตของ $f$ ที่เกิดขึ้น จะพบว่า $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$ เมื่อ $k^2 < 2$ นั่นคือ $f(0) = 1, f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$

เนื่องจาก $f(0) \le f(\xi) \le f(\frac{1}{2})$ จึงได้ว่า

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} f(\xi) \le \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\pi}{6} \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$$

ตามต้องการ

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาการหาปริพันธ์ กรณีที่ปริพันธ์อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน คือ การหาปริพันธ์แบบแบ่งส่วน เราจะทำการพิสูจน์ผลของการหาปริพันธ์โดยวิธีการแบ่งส่วน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 2.3.4 (การหาปริพันธ์แบบแบ่งส่วน)
ให้ $F(x), G(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ และให้ $f(x) = F'(x)$ และ $g(x) = G'(x)$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์แล้ว

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

**พิสูจน์** เนื่องจาก $(FG)(x)$ หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ ดังนั้น

$$(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

เนื่องจาก $F, G$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f, g$ หาปริพันธ์ได้ ดังนั้น $fG$ และ $Fg$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 (ทฤษฎีบท 2.2.1) จะได้ว่า

$$F(x)G(x)|_a^b = \int_a^b (FG)'(x) = \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทค่ามัชฌิมที่สองสำหรับปริพันธ์

**ทฤษฎีบท** 2.3.5 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่สองสำหรับปริพันธ์)
ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียว และ $f, f', g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่ามี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

**พิสูจน์** ให้ $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ จะเห็นว่า $G(a) = 0$ และเนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 (ทฤษฎีบท 2.2.6) จะได้ว่า $G'(x) = g(x)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)G'(x)\,dx \\ &= f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก $G$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หาปริพันธ์ได้ และ $f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่ต่อเนื่อง

บนช่วงปิด $[a,b]$ โดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi \in [a,b]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= f(b)G(b) - G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx \\ &= f(b)G(b) - G(\xi)[f(b)-f(a)] \\ &= f(b)[G(b)-G(\xi)] + f(a)G(\xi) \\ &= f(b)\left[\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^\xi g(t)\,dt\right] + f(a)G(\xi) \\ &= f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx + f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx\end{aligned}$$

ตามต้องการ □

**ตัวอย่าง 2.3.6** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,1]$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

**พิสูจน์** จะเห็นว่า เราสามารถเขียนปริพันธ์ในโจทย์ได้ในรูป

$$\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx + \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$$

สำหรับ $\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx &= f(\xi)\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx \\ &= f(\xi)\tan^{-1}\sqrt{n}\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $\xi \to 0$ และ $\tan^{-1}\sqrt{n} \to \frac{\pi}{2}$ นั่นคือ $f(\xi)\tan^{-1}\sqrt{n} \to \frac{\pi}{2}f(0)$

ต่อไปจะพิจารณาพจน์ $\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$ โดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ที่ทำให้

$$\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = f(\xi_1)\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$$

เนื่องจาก $f$ มีความต่อเนื่องบน $[0,1]$ จะได้ว่า $f$ มีขอบเขต กล่าวคือ มีจำนวนจริงบวก $K$ ซึ่ง $|f(x)| \le K$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left|\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx\right| &\le K\left|\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx\right| \\ &= K|\tan^{-1}n - \tan^{-1}\sqrt{n}|\end{aligned}$$

เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $|\tan^{-1} n - \tan^{-1} \sqrt{n}| \to 0$ จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.3.5 จะเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทต่อไปนี้ โดยเราจะยกทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่สองทั่วไปโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 2.3.7 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่สองทั่วไปสำหรับปริพันธ์)
ให้ $f, g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx$$

2. ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx$$

3. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx$$

# แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่าง โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(1+kx)^{3/2}(1+x)^{5/2}}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{\sin^3 x}{(5+x)^{3/2}}\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2 \theta}{\ln(2+\theta^3)}\, d\theta$

2. จงใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่หนึ่ง และแบบที่สอง ในการพิจารณาปริพันธ์

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\, dx$$

   เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ และ $g(x) = x$ บน $[-1, 1]$

3. จงแสดงว่า มี $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ ซึ่ง

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi_1} = \frac{e-1}{e\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

## 2.4 การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์

โดยปกติ การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 2.2.6 หรือทฤษฎีบท 2.2.8 ในการหาอนุพันธ์ได้ อย่างไรก็ตาม บางสถานการณ์ เราต้องการหาอนุพันธ์ของปริพันธ์ที่ต้องการหาเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเสริม $\alpha$ ในรูป

$$\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

และต้องการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริมนั้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 2.4.1** กำหนดให้ $f(x,\alpha) = (3x+\alpha)^2$
จงหา $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]$ และ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx$

**วิธีทำ** สำหรับพจน์ $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]$ ก่อนอื่นจะหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx$ ก่อน โดยมองว่า $\alpha$ เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\left[\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right] &= \frac{d}{d\alpha}\left[\int_\alpha^{3+\alpha} \frac{u^2}{3}\,du\right] \\
&= \frac{d}{d\alpha}\left[\left.\frac{u^3}{9}\right|_\alpha^{3+\alpha} dx\right] \\
&= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{(3+\alpha)^3}{9} - \frac{\alpha^3}{9}\right] \\
&= 3 + 2\alpha
\end{aligned}$$

สำหรับพจน์ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx$ จะทำการหาอนุพันธ์ย่อยก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์เทียบกับ $x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}(3x+\alpha)^2\,dx \\
&= \int_0^1 2(3x+\alpha)\,dx \\
&= \left.\frac{6x^2}{2} + 2\alpha x\right|_0^1 \\
&= 3 + 2\alpha
\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่าในกรณีนี้ $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right] = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx$

คำถามที่น่าสนใจคือ สำหรับฟังก์ชันใด ๆ เราสามารถสลับที่ระหว่างการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริม กับการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปรหลักได้เสมอไปหรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ไม่จริงเสมอไป

**ตัวอย่างค้าน** 2.4.2 (นำมาจากบทความ [17]) สำหรับฟังก์ชัน

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{x\alpha^3}{(x^2+\alpha^2)^2} & , x \neq 0 \text{ หรือ } \alpha \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \text{ และ } \alpha = 0 \end{cases}$$

กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx$

จงพิจารณาว่า $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]_{\alpha=0} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx\Big|_{\alpha=0}$ หรือไม่

**วิธีทำ** จะเห็นว่า ถ้า $\alpha = 0$ จะได้ว่า

$$\phi(0) = \int_0^1 f(x,0)\,dt = \int_0^1 0\,dx = 0$$

เมื่อ $\alpha \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x\alpha^3}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx \\ &= \int_{\alpha^2}^{1+\alpha^2} \frac{\alpha^3}{2u^2}\,du \\ &= \frac{\alpha}{2(1+\alpha^2)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right] = \dfrac{d}{d\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{2(1+\alpha^2)}\right) = \dfrac{1-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)^2}$

และได้ว่า $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]_{\alpha=0} = \dfrac{1}{2}$

ต่อไป จะพิจารณาพจน์ $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx$ จะเห็นว่า เมื่อกำหนด $f(x,\alpha)$ ดังตัวอย่าง จะได้ว่า (ให้ผู้อ่านแสดงเป็นแบบฝึกหัด)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{x\alpha^2(3x^2-\alpha^2)}{(x^2+\alpha^2)^3} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0$ นั่นคือ

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]_{\alpha=0} \neq \int_0^1 \frac{\partial}{d\alpha} f(x,\alpha)\,dx\Big|_{\alpha=0}$$

จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้ค่าสองค่านี้ไม่เท่ากันคือ การที่ $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ ดังนั้น เราจึงจะพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้การสลับที่ระหว่างอนุพันธ์ของปริพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริม กับปริพันธ์ของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรเสริม มีค่าเท่ากัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.4.3** (ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ : Leibniz's Theorem)
ให้ $\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ โดยที่ $u(\alpha), v(\alpha)$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[\alpha_0, \alpha_1]$ ถ้า $f(x,\alpha)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณซึ่ง $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$, $u(\alpha) \le x \le v(\alpha)$ แล้ว

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx - f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha} + f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}$$

**พิสูจน์** ก่อนอื่น สร้างฟังก์ชัน $\Delta\phi(\alpha) := \phi(\alpha+\Delta\alpha) - \phi(\alpha)$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(\alpha) &= \int_{u(\alpha+\Delta\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \\
&= \int_{u(\alpha+\Delta\alpha)}^{u(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \\
&\quad + \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \\
&= \left(\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx\right) \\
&\quad - \int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx
\end{aligned}$$

หารสมการทั้งสมการด้วย $\Delta\alpha$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\phi(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx \\
&\quad - \frac{1}{\Delta\alpha}\int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \\
&\quad + \frac{1}{\Delta\alpha}\int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx
\end{aligned}$$

สำหรับพจน์แรก โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า มี $\theta \in (\alpha, \alpha+\Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha) = \Delta\alpha\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$$

กล่าวคือ

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\alpha}$$

สำหรับพจน์ที่สอง โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี $\xi_1$ ซึ่ง $u(\alpha) < \xi_1 < u(\alpha+\Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx = f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{u(\alpha+\Delta\alpha) - u(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]$$

และสำหรับพจน์ที่สาม ในทำนองคล้ายกัน โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี $\xi_2$ ซึ่ง $v(\alpha) < \xi_2 < v(\alpha+\Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx = f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{v(\alpha+\Delta\alpha)-v(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\phi(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx\\ &\quad -f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{u(\alpha+\Delta\alpha)-u(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]\\ &\quad +f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{v(\alpha+\Delta\alpha)-v(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]\end{aligned}$$

เมื่อให้ $\Delta\alpha \to 0$ จะทำให้ได้ว่า $\theta \to \alpha$ และจากการที่ $u, v$ หาอนุพันธ์ได้ ทำให้ได้ว่า $\xi_1 \to u(\alpha), \xi_2 \to v(\alpha)$ นั่นคือ

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx - f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha} + f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}$$

ตามต้องการ □

**หมายเหตุ** เมื่อขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์เป็นค่าคงที่ กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ $a, b$ นิยาม $\phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ เราจะได้ว่า

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha} + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

**ตัวอย่าง 2.4.4** กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$ โดยที่ $\alpha > 0$ แล้ว จงหา $\phi'(\alpha)$

**วิธีทำ** สมมติให้ $f(x,\alpha) = \frac{\sin\alpha x}{x}$ โดยที่ $\alpha > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) &= \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx - f(\alpha,\alpha)\frac{d\alpha}{d\alpha} + f(\alpha^2,\alpha)\frac{d\alpha^2}{d\alpha}\\ &= \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx - \left(\frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha}\right) + \left(\frac{\sin(\alpha^3)}{\alpha^2}\right)(2\alpha)\\ &= \int_\alpha^{\alpha^2} \cos(\alpha x)\,dx - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha}\\ &= \left.\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right|_\alpha^{\alpha^2} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha}\\ &= \frac{3\sin(\alpha^3) - 2\sin(\alpha^2)}{\alpha}\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 2.4.5** หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ เมื่อ $\alpha>1$ แล้ว จงหา $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(2-\cos x)^2}$

**วิธีทำ** ให้ $\displaystyle\phi(\alpha)=\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$

จะเห็นว่า หากกำหนดให้ $\displaystyle f(x,\alpha)=\frac{1}{\alpha-\cos x}$ โดยที่ $\alpha>1$ จะพบว่า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเมื่อ $0\le x\le\pi$ และ $\alpha\in(0,\infty)$ ดังนั้น

$$\phi'(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-\cos x}\right)dx=-\int_0^\pi \frac{1}{(\alpha-\cos x)^2}\,dx$$

และจะพบว่า

$$\phi'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)=-\frac{\alpha\pi}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$$

นั่นคือ

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\alpha-\cos x)^2}\,dx=\frac{\alpha\pi}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $\alpha=2$ จึงได้ว่า

$$\int_0^\pi \frac{1}{(2-\cos x)^2}\,dx=\frac{2\pi}{(3)^{3/2}}$$

ในทำนองเดียวกัน หากฟังก์ชันของตัวแปรเสริม กำหนดโดย $\displaystyle\phi(\alpha)=\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ เมื่อทำการหาปริพันธ์ของ $\phi(\alpha)$ เทียบกับ $\alpha$ จะพบว่า ปริพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปปริพันธ์ซ้อน เราสามารถสลับลำดับการหาปริพันธ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.4.6** ให้ $\displaystyle\phi(\alpha)=\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ และ $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณซึ่ง $u\le x\le v$ และ $a\le\alpha\le b$ ถ้า $u$ และ $v$ เป็นค่าคงที่แล้ว

$$\int_a^b \phi(\alpha)\,d\alpha=\int_a^b\int_u^v f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha=\int_u^v\int_a^b f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx$$

**พิสูจน์** สมมติว่า $\displaystyle F(\alpha)=\int_u^v\int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx$

เนื่องจาก $f(x,\alpha)$ ต่อเนื่อง และ $\displaystyle\int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha$ ต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบทไลบ์นิตซ์ (ทฤษฎีบท 2.4.3) ทำให้ได้ว่า

$$F'(\alpha)=\int_u^v \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx=\int_u^v f(x,\alpha)\,dx=\phi(\alpha)$$

นั่นคือ $F(\alpha)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\phi(\alpha)$ ได้ว่า สำหรับค่าคงที่ $C$ ใด ๆ ปริพันธ์ไม่

จำกัดเขตเขียนได้ในรูป

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha \phi(\alpha)\, d\alpha + C$$

เนื่องจาก $F(a) = 0$ จึงได้ว่า $C = 0$ เพราะฉะนั้น

$$F(\alpha) = \int_u^v \int_a^\alpha f(x,\alpha)\, d\alpha\, dx = \int_a^\alpha \int_u^v f(x,\alpha)\, dx\, d\alpha$$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $\alpha = b$ จึงได้ว่า

$$\int_a^b \int_u^v f(x,\alpha)\, dx\, d\alpha = \int_u^v \int_a^b f(x,\alpha)\, d\alpha\, dx$$

ตามต้องการ $\square$

**ตัวอย่าง 2.4.7** หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ จงแสดงว่า สำหรับ $a, b > 1$ แล้ว

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx = \pi \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)$$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ หาปริพันธ์เทียบ $\alpha$ บนช่วง $[a, b]$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า

$$\int_a^b \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}\, d\alpha = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, d\alpha$$

สำหรับพจน์ด้านขวา โดยการหาปริพันธ์แบบแทนค่าตรีโกณมิติ จะได้ผลจากการหาปริพันธ์คือ

$$\int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, d\alpha = \left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\right]_a^b$$

ด้วยเหตุผลเดียวกันกับตัวอย่าง 2.4.5 โดยทฤษฎีบท 2.4.6 จะได้ว่า

$$\int_0^\pi \int_a^b \frac{dx}{\alpha - \cos x}\, d\alpha\, dx = \pi \left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\right]_a^b$$

นั่นคือ

$$\int_0^\pi \ln(\alpha - \cos x)\big|_a^b\, dx = \pi \left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\right]_a^b$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx = \pi \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)$$

# แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงหา $\dfrac{d\phi}{d\alpha}$ เมื่อกำหนด $\phi$ ดังต่อไปนี้

   (a) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi} (1 - \alpha\cos x)^2\, dx$

   (b) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha^2} \tan^{-1}\frac{x}{\alpha^2}\, dx$

   (c) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \tan(x - \alpha)\, dx$

   (d) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \alpha x e^{-x^2}\, dx$

   (e) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha^2}^{\alpha^4} \ln(\alpha x)\, dx$

2. จงคำนวณค่า $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^1 \sin(e^x y - y^3 + \pi - e^x)\, dx$ ที่ $y = 1$

3. จงคำนวณค่า $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^3 + y^3 + z^3 - 2}\, dz$ ที่ $(x, y) = (1, 1)$

4. กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha} \frac{\cos(\alpha x^2)}{x}\, dx$ จงหา $\dfrac{d\phi}{d\alpha}$

5. กำหนดให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $\displaystyle\int_0^1 f(\sqrt{x})e^x\, dx = 6$ แล้ว จงหาค่าของ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^1 f(y)e^{xy+y^2}\, dy$ ที่ $x = 0$

6. กำหนดฟังก์ชัน

$$F(a, b) = \int_0^{\pi} [\sin x - (ax^2 + bx)^2]\, dx$$

   (a) จงหาจุดวิกฤตของ $F(a, b)$ (คำใบ้ : หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $a, b$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.4.3)

   (b) จงหาค่า $a, b$ ที่ทำให้ $F$ ให้ค่าต่ำสุด (คำใบ้ : ใช้ผลจากข้อ (a))

7. จงแสดงว่า

$$\int_0^1\int_1^2 (\alpha^2 - x^2)\, dx\, d\alpha = \int_1^2\int_0^1 (\alpha^2 - x^2)\, d\alpha\, dx = \int_1^2 \quad dx$$

8. จงแสดงว่า

$$\int_0^2\int_{-1}^0 (x^3 - 2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^0\int_0^2 (x^3 - 2y)\, dy\, dx$$

9. หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\alpha - \sin x)\, dx = 2\pi\alpha$ จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ $a, b$ ใด ๆ

$$\int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2]\, dx = 2\pi(b^2 - a^2)$$

10. หากทราบว่า $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{5 + 3\sin x}{5 + 4\sin x}\right) dx = 2\pi \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

11. จงคำนวณค่า $\int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x}\, dx$

    (คำใบ้ : นิยาม $\phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\, dx$ จากนั้นใช้ทฤษฎีบท 2.4.3 และทำในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.6)

12. จงแสดงว่า สำหรับ $|\alpha| < 1$ จะได้ว่า

$$\int_0^{\pi} \ln(1 + \alpha \cos x)\, dx = \pi \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}\right)$$

*This page is intentionally left blank. หน้านี้ตั้งใจเว้นว่างไว้*

# ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

บทที่
3

## การจัดการเรียนการสอน
## บทที่ 3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

**กระบวนวิชา** แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus)
**ชื่อผู้สอน** อ.ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
**เวลาที่ใช้** 12 ชั่วโมง

**วัตถุประสงค์**

1. นักศึกษาสามารถจำแนกประเภทของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแบบพื้นฐานได้
2. นักศึกษาสามารถทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ โดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ ได้
3. นักศึกษาสามารถทดสอบการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันใด ๆ โดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ ได้
4. นักศึกษาสามารถอธิบายการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ และสามารถทดสอบการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ได้
5. นักศึกษาสามารถใช้สมบัติของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอในการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบางชนิดได้
6. นักศึกษาสามารถคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรีของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
7. นักศึกษาสามารถคำนวณค่าปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ได้
8. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาได้

**กิจกรรมการเรียนการสอน**

1. การบรรยายในชั้นเรียน
2. การยกตัวอย่าง การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องในแต่ละหัวข้อ
3. นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัดจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน
4. นักศึกษาทำแบบฝึกหัดทบทวน และทำการบ้านเพื่อพัฒนาทักษะการพิสูจน์

**สื่อการเรียนการสอน**

1. เอกสารประกอบการเรียนการสอน กระบวนวิชา แคลคูลัสขั้นสูง
2. กระดาน ปากกา กระดาษ เครื่องฉายทึบแสง
3. กระดาษชาร์ตสำหรับเขียนคำตอบหน้าชั้นเรียน

**เอกสารอ้างอิง**

1. ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ (2556). แคลคูลัส: ผลบวกอนันต์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4. อติชาต เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
5. Amazigo, J. C., & Rubenfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.
6. Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.
7. Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley
8. Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.
9. Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.
10. Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.
11. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.
12. Culham, J. R. Elliptic Integrals, Elliptic Functions and Theta Functions. Retrieved from http://www.mhtlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap3.pdf
13. Conrad, K. (2018). Differentiating under the integral sign. Retrieved from https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf
14. Hall, L. M. (1995). Special Functions: Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Retrieved from http://web.mst.edu/ lmhall/SPFNS/sfch3.pdf
15. Wheeler, J. P. Assigning Value to the Valueless. The Cauchy Principle Method and Related Ideas in Divergent Series. Retrieved from http://www.pitt.edu/ jwheeler/Principal%20Values.pdf

# ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ โดยที่ขีดจำกัดของปริพันธ์เป็นจำนวนจริง และปริพัทธ์เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิดของขอบเขตของปริพันธ์ อย่างไรก็ตาม ในการหาปริพันธ์ดังกล่าว อาจเกิดเหตุการณ์ที่ขอบเขตของปริพันธ์เป็นอนันต์ หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ หรือเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวพร้อมกันในปริพันธ์เดียว ปริพันธ์ดังกล่าวเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** (improper integral)

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบเบื้องต้น โดยเน้นการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบอย่างง่าย ในกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบเพิ่มขึ้น ในแง่ของการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ รวมถึงการศึกษาสมบัติของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เช่น การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ เพื่อนำสมบัติดังกล่าวไปใช้ในการวิเคราะห์ฟังก์ชัน อาทิ การสลับลำดับระหว่างการหาอนุพันธ์กับปริพันธ์ หรือลิมิต เป็นต้น

## 3.1 นิยามและการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ดังที่กล่าวมาข้างต้น เรากล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 3.1.1 จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ถ้า

1. $a$ และ / หรือ $b$ มีขอบเขตเป็นอนันต์ กล่าวคือ $a = -\infty$ และ / หรือ $b = \infty$
2. $f(x)$ ไม่มีขอบเขตอย่างน้อยหนึ่งจุด ณ จุด $x$ ซึ่ง $a \leq x \leq b$ จุดเหล่านั้นเรียกว่า **จุดเอกฐาน** (singularity) ของ $f(x)$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 1 ตามนิยาม 3.1.1 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง** (improper integral of the first kind) ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 2 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง** (improper integral of the second kind) และปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 1 และ 2 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม** (improper integral of the third kind) ทั้งนี้ ปริพันธ์จำกัดเขตที่ไม่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะเรียกว่า **ปริพันธ์แท้** (proper integral)

**ตัวอย่าง 3.1.1** พิจารณาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจากปริพันธ์มีขอบเขตซึ่งเป็นอนันต์

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขต (infinite discontinuity) ที่ $x = 0$

3. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x-3}\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม เนื่องจากปริพันธ์มีขอบเขตที่เป็นอนันต์ และ $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 3$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ เป็นปริพันธ์แท้ เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**หมายเหตุ** ในแคลคูลัสพื้นฐาน การที่ $f$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = c$ เราสามารถพิจารณาได้จากการมี**เส้นกำกับแนวยืน** (vertical asymptote) ที่ $x = c$ กล่าวคือ $x = c$ เป็นเส้นกำกับแนวยืนของ $f$ ถ้า

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty/-\infty \text{ หรือ } \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty/-\infty$$

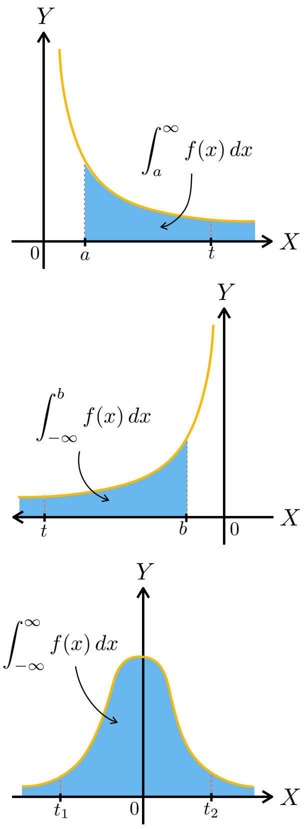
### 3.1.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

เราจะกล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ตามนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** 3.1.2 ให้ $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ ทุก $t > a$ และนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตโดย

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

หากลิมิตมีค่า จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่เข้า** (converge) โดยนิยามเป็นค่าของปริพันธ์ดังกล่าว และกรณีที่ลิมิตไม่มี จะเรียกว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่ออก** (diverge)



**ภาพที่** 3.1. ภาพแสดงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง แบบที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ขอบเขตล่างเป็นอนันต์ และขอบเขตทั้งสองเป็นอนันต์ได้ในทำนองคล้ายกัน กล่าวคือ

สำหรับ $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ จะนิยาม

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

และสำหรับ $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ สำหรับจำนวนจริง $c$ จะนิยาม

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t_1\to-\infty} \int_{t_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t_2\to+\infty} \int_c^{t_2} f(x)\,dx$$

โดยปริพันธ์แบบที่สามนี้จะลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละปริพันธ์ลู่เข้า

เนื่องจากปริพันธ์จำกัดเขต คือพื้นที่เครื่องหมายสุทธิ เราจึงอาจพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ดังภาพ 3.1

**ตัวอย่าง** 3.1.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

**วิธีทำ** 1. ปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ $\dfrac{1}{2}$

2. จะเห็นว่า ปริพันธ์ดังกล่าว เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{t\to-\infty}[\ln|-1|-\ln|t|] = -\infty\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก

3. เนื่องจากปริพันธ์ดังกล่าวมีขอบเขตบนและล่างเป็นอนันต์ทั้งคู่ เราจึงเลือกจุด $x=0$ เป็นจุดแบ่งปริพันธ์ จึงได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

และเขียนในรูปลิมิตได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t_2\to+\infty}\int_{0}^{t_2} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ $\pi$

ในตัวอย่างที่ผ่านมา เราทำการพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ จึงน่าสนใจที่จะพิจารณาว่า เงื่อนไขใดของ $p$ ที่ทำให้ปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือลู่ออก รวมถึงปริพันธ์ประเภทที่คล้ายกันด้วย ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงเงื่อนไขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ และฟังก์ชัน $f(x)=e^{-mx}$ ต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 3.1.3 .

1. **ปริพันธ์ $p$ ชนิดที่หนึ่ง** (The $p$ integral of the first kind) เมื่อ $p$ เป็นค่าคงที่ และ $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \le 1 \end{cases}$$

2. **ปริพันธ์เรขาคณิต** (geometric integral) โดยที่ $m$ เป็นค่าคงที่

$$\int_a^{\infty} e^{-mx}\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{-am}}{m} & \text{เมื่อ } m > 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } m \le 0 \end{cases}$$

**พิสูจน์** เราจะพิสูจน์ข้อ 1 ส่วนข้อ 2 ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

1. เราจะพิจารณาลิมิตของปริพันธ์ $p$ พบว่า ต้องแบ่งเป็นสองกรณีใหญ่คือ ถ้า $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^{t} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right]$$

เนื่องจาก $-\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$ เป็น ค่า คงที่ เรา จึง จะ พิจารณา เงื่อนไข ที่ เกิด ขึ้น จาก พจน์ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p}$ ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ดังนี้

- <u>ถ้า $p > 1$</u> จะได้ว่า $1 - p < 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} = 0$ ทำให้ปริพันธ์ลู่เข้า และลู่เข้าหา $-\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$
- <u>ถ้า $p < 1$</u> จะได้ว่า $1 - p > 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} = +\infty$ นั่นคือ ปริพันธ์ลู่ออก

ต่อไป พิจารณากรณีที่ $p = 1$ จะได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \ln x|_a^t = \lim_{t\to+\infty} [\ln t - \ln a] = +\infty$$

จากทั้งสองกรณี จึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \le 1 \end{cases}$$

ตามต้องการ □

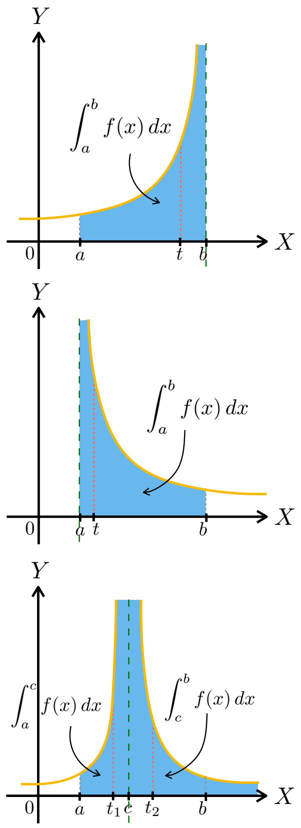
### 3.1.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เราจะกล่าวได้ดังนี้

**บทนิยาม** 3.1.3 ให้ $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ที่จุด $b$ ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ และ $f$ ไม่มีขอบเขตในช่วง $(t,b)$ ทุก $t \in (a,b)$ และนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตโดย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \tag{3.1.1}$$

หากลิมิตมีค่า จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่เข้า** (converge) โดยนิยามเป็นค่าของปริพันธ์ดังกล่าว และกรณีที่ลิมิตไม่มี จะเรียกว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่ออก** (diverge)




***ภาพที่*** 3.2. ภาพแสดงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง แบบที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ซึ่งฟังก์ชัน $f$ ณ ขอบเขตล่างไม่มีขอบเขต และกรณีที่ $f$ ไม่มีขอบเขต ณ จุดภายในช่วง $[a,b]$ ได้ดังนี้

สำหรับ $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f$ ไม่มีขอบเขตในช่วง $(a,t)$ สำหรับทุก $t \in (a,b)$ จะนิยาม

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \tag{3.1.2}$$

และสำหรับ จุด $c$ ที่อยู่ระหว่าง $[a,b]$ โดยที่ $f$ ไม่มีขอบเขตในช่วง $(t_1,t_2)$ สำหรับทุก $t_1,t_2 \in [a,b]$ จะนิยาม

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t_1\to c^-} \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \lim_{t_2\to c^+} \int_{t_2}^b f(x)\,dx \tag{3.1.3}$$

โดยปริพันธ์แบบที่สามนี้จะลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละปริพันธ์ลู่เข้า

เพื่อความสะดวก เราอาจจะเขียนปริพันธ์ในสมการ (3.1.1), (3.1.2) และ (3.1.3) ในรูป

(แบบที่ 1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$

(แบบที่ 2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$

(แบบที่ 3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$

**ตัวอย่าง** 3.1.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$

**วิธีทำ** 1. จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 1$ ที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ (เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx\\ &= \lim_{t\to 1^-}\left[-2\sqrt{1-t}+2\right] = 2\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ 2

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{2-x}\,dx$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 2$ ที่ขอบเขตล่างของปริพันธ์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{2-x}\,dx &= \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 \frac{1}{2-x}\,dx\\ &= \lim_{t\to 2^+}\left[-\ln|-1| + \ln|2-t|\right] = -\infty\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2-x}\,dx$ ลู่ออก

3. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{2/3}}$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ $x = 2$ ซึ่งอยู่ภายในช่วง $[1, 3]$ จึงต้องแบ่งปริพันธ์ออกเป็นสองส่วน กล่าวคือ

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$$

ทั้งนี้ สำหรับตัวอย่างนี้จะขอเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบ $\epsilon$ ได้ว่า

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\epsilon_1} \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$$

พิจารณาแต่ละพจน์ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\epsilon_1} \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx &= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[3(2-\epsilon_1-2)^{1/3} - 3(1-2)^{1/3}\right] = 3\\ \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx &= \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[3(3-2)^{1/3} - 3(2+\epsilon_2-2)^{1/3}\right] = 3\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx = 3 + 3 = 6$ นั่นคือ ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$ ลู่เข้าสู่ 6

สำหรับกรณีฟังก์ชัน $f$ อยู่ในรูป $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ หรือ $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$ โดยที่ $p$ เป็นค่าคงที่ เราอาจพิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกได้จากเงื่อนไขของ $p$ ซึ่งกำหนดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.1.5 ปริพันธ์ $p$ ชนิดที่สอง** (The $p$ integral of the second kind) เมื่อ $p > 0$ เป็นค่าคงที่

1. $$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

2. $$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

**พิสูจน์** เราจะพิสูจน์ข้อ 1 ส่วนข้อ 2 สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกัน

1. จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = a$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ ทั้งนี้ เราจะแบ่งกรณีออกเป็น 2 กรณีใหญ่ คือ เมื่อ $p \neq 1$ และ $p = 1$ ดังนี้

ถ้า $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx &= \lim_{t\to a^+} \int_t^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \\ &= \lim_{t\to a^+} \frac{(b-a)^{1-p} - (t-a)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ว่า

- ถ้า $p < 1$ จะได้ว่า $1 - p > 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to a^+} \frac{(t-a)^{1-p}}{1-p} = 0$ ทำให้ปริพันธ์ลู่เข้าสู่ $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$
- ถ้า $p > 1$ จะได้ว่า $1 - p < 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{(t-a)^{1-p}}{1-p} = -\infty$ นั่นคือ ปริพันธ์ลู่ออกไปสู่ $+\infty$

ถ้า $p = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x-a}\,dx &= \lim_{t\to a^+} \int_t^b \frac{1}{x-a}\,dx \\ &= \lim_{t\to a^+} [\ln(b-a) - \ln(t-a)] = +\infty \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

ตามต้องการ $\square$

จากทฤษฎีบท 3.1.5 จะเห็นว่า ปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์แท้ ถ้า $p \leq 0$

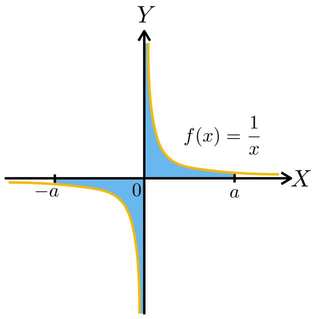
### ค่ามุขสำคัญโคชี

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองของ $f$ ในกรณีที่สาม เมื่อมีจุด $x = c$ อยู่ในช่วง $[a, b]$ และนิยามลิมิตในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

จะเห็นว่า $\epsilon_1$ และ $\epsilon_2$ ต่างเป็นอิสระซึ่งกันและกัน พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.1.6** ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ สำหรับ $a > 0$




**ภาพที่ 3.3.** พื้นที่แสดงปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx$

**วิธีทำ** ปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-a}^{0-\epsilon_1} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^{a} \frac{1}{x}\,dx$$

เราสามารถสรุปได้ว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าวลู่ออก เนื่องจากทราบว่า

$$\lim_{\epsilon_1 \to 0^+} [\ln|-\epsilon_1| - \ln|-a|] = -\infty$$

$$\text{และ} \quad \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} [\ln|a| - \ln|\epsilon_2|] = \infty$$

ในสถานการณ์ดังกล่าว จะพบว่า $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันคี่ (กล่าวคือ $f(x) = f(-x)$) ซึ่งเมื่อพิจารณาภาพที่ 3.3 พบว่า พื้นที่ใต้กราฟจาก $-a$ ถึง $0$ และพื้นที่ใต้กราฟจาก $0$ ถึง $a$ สมมาตรกัน และควรจะหักล้างกัน แต่โดยวิธีที่เราทำดังกล่าวจะพบว่า เราไม่สามารถสรุปค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ได้

แต่ถึงแม้ว่าเราไม่สามารถระบุได้ว่าลิมิตของแต่ละเทอมลู่ออกด้วยอัตราเท่าใด ในบางสถานการณ์ เราต้องการนิยามค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดนี้ในกรณีที่ลิมิตของค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่ออกด้วยอัตราที่เท่ากัน ด้วยการกำหนดให้ $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ (ทั้งนี้ กรณีที่เรานิยามให้อัตราของของการลู่ออกไม่เท่ากัน เราอาจกำหนดค่าให้ $\epsilon_1 = k\epsilon_2$ ได้ตามต้องการ)

หากลิมิตที่เกิดจากการกำหนด $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ มีค่า จะกล่าวว่า ลิมิตดังกล่าวเรียกว่า **ค่ามุขสำคัญโคชี** (Cauchy principal value) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.1.7** จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ในแบบค่ามุขสำคัญของโคชี สำหรับ $a > 0$

**วิธีทำ** จากปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-a}^{0-\epsilon_1} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^{a} \frac{1}{x}\,dx$$

หากสมมติให้ $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-a}^{0-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0+\epsilon}^{a} \frac{1}{x}\,dx\right] &= \lim_{\epsilon \to 0^+} [(\ln|-\epsilon| - \ln|-a|) + (\ln|a| - \ln|\epsilon|)] \\ &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือ ปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าสู่ $0$ ในแบบค่ามุขสำคัญของโคชี

**หมายเหตุ** การใช้ค่ามุขสำคัญแบบโคชี สามารถใช้ได้สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ที่ลู่เข้านั้นไม่ทำให้ค่าของปริพันธ์ดังกล่าวเปลี่ยนแปลงค่า

### 3.1.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

จะเห็นว่า เราสามารถพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามได้จากการแยกปริพันธ์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง เมื่อกำหนดปริพันธ์มาให้เราจึงจะแยกพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบทีละชนิด ทั้งนี้

- ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามจะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองทุกปริพันธ์ที่ประกอบเป็นปริพันธ์ดังกล่าวจะลู่เข้า
- ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามจะลู่ออก ก็ต่อเมื่อ ถ้ามีปริพันธ์อย่างน้อยหนึ่งปริพันธ์ที่ประกอบเป็นปริพันธ์ดังกล่าวนั้นลู่ออก

**ตัวอย่าง 3.1.8** จงพิจารณาว่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ เมื่อ $p > 0$ ลู่เข้าหรือไม่

**วิธีทำ** เนื่องจากปริพันธ์ดังกล่าว เป็นปริพันธ์ที่มีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เราจึงสามารถแบ่งปริพันธ์ออกได้เป็น

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

- <u>กรณี $p \geq 1$</u> จากทฤษฎีบท 3.1.5 ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก จึงทำให้ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก
- <u>กรณี $0 < p < 1$</u> จากทฤษฎีบท 3.1.3 ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก จึงทำให้ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออกเช่นกัน

ทั้งสองกรณี จึงสรุปได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก สำหรับทุก $p > 0$

# แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบหรือไม่ หากเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จงระบุชนิดของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ พร้อมเขียนลิมิตของปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยไม่ต้องคำนวณค่า

   (a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{1-x}$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+5}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x-\cos\frac{\pi}{2}}\,dx$

2. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้า จงหาค่าของปริพันธ์นั้น

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   (d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

3. จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ (หมายเหตุ: ให้ตรวจสอบก่อนว่าปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดใด โดยใช้กฎโลปิตาล)

4. จงหาปริพันธ์โดยแทน $u$ ที่กำหนดให้ แล้วคำนวณปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ โดยแทน $u=\sqrt{x}$ ($u\to\infty$ เมื่อ $x\to\infty$)

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}\,dx$ โดยแทน $u=1-e^{-x}$ ($u\to 1$ เมื่อ $x\to\infty$)

5. กำหนดปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือไม่ (1) ในแบบปกติ (2) ในแบบค่ามุขสำคัญโคชี

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{1}{(x-1)^4}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x-3}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^6 \frac{x+4}{x-4}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{10x+4}{(5x+x^2)^3}\,dx$

> **หมายเหตุ** หากพิจารณาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตโดยใช้ค่ามุขสำคัญโคชี ไม่ควรหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์ไปพร้อมกับเปลี่ยนขอบเขตการหาปริพันธ์ เนื่องจากทำให้เกิดปัญหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงกัน ดูคำอธิบายได้จากบทความ [19]

6. จงแปลงปริพันธ์ $\int_0^1 \ln(\frac{1}{1-x})\,dx$ ให้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยใช้การแปลง $u = \frac{1}{1-x}$

> **หมายเหตุ** โดย ทั่วไป เรา อาจ แปลง ปริ พันธ์ ไม่ ตรง แบบ ชนิด ที่ สอง ของ $\int_a^b f(x)\,dx$ ที่ขอบเขตบน ให้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = \frac{1}{b-x}$ จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่าง $dx$ และ $du$

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ $m$

$$\int_a^\infty e^{-mx}\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{-am}}{m} & \text{เมื่อ } m > 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } m \le 0 \end{cases}$$

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ 2 กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ $p > 0$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \ge 1 \end{cases}$$

## 3.2 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราศึกษานิยามพื้นฐานของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ อย่างไรก็ตาม ในหลาย ๆ สถานการณ์ เราอาจไม่ต้องการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ แต่ต้องการทราบเพียงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือไม่เท่านั้น รวมถึงในบางครั้ง การทราบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า นำมาซึ่งผลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันด้วย

ในหัวข้อนี้และหัวข้อถัดไป เราจะทำการศึกษาวิธีการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ โดยเราจะเริ่มต้นจากการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งก่อน

### 3.2.1 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ไม่เป็นลบ

เราจะทำการทดสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 ในรูปแบบ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

โดยสมมติว่า $f$ มีขอบเขต และหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,t]$ สำหรับทุก $t \ge a$ โดยเราจะสมมติให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกเสมอในช่วง $[a,x]$ ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ฟังก์ชัน $f$ เป็นลบ เราจะกำหนดฟังก์ชัน $-f$

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงวิธีการตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะขอพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานที่รับประกันการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 3.2.1 ให้ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \geq a$ บน $[a,t]$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก $M$ ที่ทำให้ $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$

**พิสูจน์** ก่อนอื่นเรานิยาม $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ สำหรับ $t \in [a,\infty)$ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะใช้ทฤษฎีบทลำดับทางเดียว (monotonic sequence theorem) กล่าวคือ ถ้า $F$ มีขอบเขตบนแล้ว $F(t)$ จะลู่เข้าหาจำนวนจริง เมื่อ $t \to \infty$ ดังนั้น เราจะพิสูจน์ได้ดังนี้

($\Rightarrow$) สมมติให้ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ จึงได้ว่า $F(t)$ เพิ่มขึ้นเมื่อ $t \to \infty$ จากข้อสมมติฐาน สมมติว่า $F(t)$ ลู่เข้าเมื่อ $t \to \infty$ จึงได้ว่า $F(t)$ มีขอบเขต นั่นคือ มี $M$ ที่เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี $M$ ที่ทำให้ $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ จึงได้ว่ $F(t)$ เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบทลำดับทางเดียวจึงได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $t \to \infty$ □

จะกล่าวว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก ถ้าไม่สามารถหาจำนวนจริง $M$ ที่เป็นขอบเขตบนได้ กล่าวคือ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออกสู่ $\infty$ เมื่อ $t \to \infty$

เราสามารถสร้างวิธีการตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ ดังวิธีที่หนึ่งต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 3.2.2 (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ: Comparison test)
ถ้า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันที่เป็นบวก โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,t]$ ซึ่ง $t > a$ แล้ว

1. ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย

**พิสูจน์** 1. สมมติให้ $f,g$ มีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ ทุก $t \geq a$ จากข้อสมมติฐานที่ว่า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,t]$ จึงได้ว่า

$$\int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx \tag{3.2.1}$$

จาก $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า มี $M > 0$ ที่ทำให้ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$ จึงได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx < M$ สำหรับทุก $t \geq a$ ด้วย โดยทฤษฎีบท 3.2.1 ได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า

2. ถ้า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก จะได้ว่า $\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีขอบเขตบน โดย (3.2.1) จึงได้ว่า $\int_a^t g(x)\,dx$ ไม่มีขอบเขตบน นั่นคือ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออก ตามต้องการ □

**ตัวอย่าง 3.2.3** จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx$

**วิธีทำ** 1. เนื่องจากเราทราบว่า $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq \dfrac{1}{2x}$ และ $\int_1^\infty \dfrac{1}{2x}\,dx$ เป็นปริพันธ์ $p$ เมื่อ $p=1$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 ได้ว่า $\int_1^\infty \dfrac{1}{2x}\,dx$ ลู่ออก โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ลู่ออก

2. พิจารณา $\dfrac{1}{e^x} \geq \dfrac{1}{e^x+1}$ และจาก $\int_1^\infty \dfrac{1}{e^x}\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx$ เป็นปริพันธ์เรขาคณิต ซึ่ง $m=1>0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 ได้ว่า $\int_1^\infty \dfrac{1}{e^x}\,dx$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_a^\infty \dfrac{1}{e^x+1}\,dx$ ลู่เข้า

จะเห็นว่า วิธีที่ผ่านมาต้องอาศัยการจัดขอบเขตบน ซึ่งเกิดความยุ่งยาก อย่างไรก็ตาม เรามีวิธีการทดสอบอีกวิธีหนึ่งที่สะดวกขึ้นโดยการใช้ลิมิตเปรียบเทียบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.4** (การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ: Limit comparison test)
ให้ $f, g$ เป็นบวกบน $[a,t]$ ซึ่ง $t>a$

1. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ แล้ว $\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน
2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า
3. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก

**พิสูจน์** 1. สมมติว่า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ จะได้ว่า มี $k>a$ ซึ่งสำหรับทุก $x>k$ แล้ว $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon$ เราจึงได้ว่า

$$(L-\epsilon)g(x) < f(x) < (L+\epsilon)g(x)$$

- <u>พิจารณากรณี $(L-\epsilon)g(x) < f(x)$ สำหรับทุก $x>k>a$</u>

ถ้า $\displaystyle\int_k^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_k^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า และ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าด้วย

- พิจารณากรณี $f(x) < (L+\epsilon)g(x)$ สำหรับทุก $x > k > a$

ถ้า $\displaystyle\int_k^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_k^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออก และ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออกเช่นกัน

2. สมมติว่า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ จะได้ว่า มี $k$ ที่ทำให้ $\dfrac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$ สำหรับทุก $x > k$ นั่นคือ $f(x) < \epsilon g(x)$ สำหรับทุก $x > k$

ดังนั้น ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า

3. สมมติว่า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ จะได้ว่า มี $k, M$ ซึ่ง $\dfrac{f(x)}{g(x)} > M$ นั่นคือ $f(x) > Mg(x)$ สำหรับทุก $x \geq k$

ดังนั้น ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออก แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย □

**ตัวอย่าง 3.2.5** จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx$ สำหรับจำนวนจริงบวก $n > 0$

**วิธีทำ** 1. เมื่อ $x \to \infty$ จะเห็นว่า $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x}$ เราจึงเลือก $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 (ปริพันธ์ $p$ เมื่อ $p = 1$) โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ลู่ออก

2. เลือก $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-1}} = 1$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x-1}\,dx$ ลู่ออก

3. เลือก $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$$

(โดยกฎโลปิตาล) เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ ลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า

4. สำหรับ $n > 0$ เลือก $f(x) = x^n e^{-x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^2 x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = 0$$

จาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ลู่เข้าโดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx$ ลู่เข้า

จากวิธีการทดสอบดังกล่าว เราอาจสร้างวิธีการทดสอบที่ใช้งานได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.2, 3.2.4 และทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 ประกอบกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.6** 1. ถ้า $f \geq 0$ บนช่วง $[a,t]$ แล้ว

- ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p > 1$ และจำนวนจริงบวก $M$ ที่ทำให้ $f(x) \leq M/x^p$ สำหรับทุก $x \geq a$
- ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p \leq 1$ และจำนวนจริงบวก $G$ ที่ทำให้ $f(x) \geq G/x^p$ สำหรับทุก $x \geq a$

2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p f(x)$ หาค่าได้และไม่เป็นศูนย์แล้ว ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p > 1$

**ตัวอย่าง 3.2.7** ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{4x^2+25}\,dx$ ลู่เข้า

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{4x^2+25} = \frac{1}{4}$

### 3.2.2 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งทั่วไป

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทำการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งในกรณีที่ $f(x) \geq 0$ ซึ่งจะเห็นว่า การลู่เข้าหรือการลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ฟังก์ชันมีค่าเป็นบวกเพียงอย่างเดียวนั้น ขึ้นอยู่กับการที่ค่าของฟังก์ชันมีค่ามาก ๆ อย่างไรก็ตาม หากฟังก์ชัน $f$ อยู่ในกรณีทั่วไปที่อาจเป็นได้ทั้งบวกและลบ การลู่เข้าอาจขึ้นอยู่กับการแกว่งของค่าลิมิตนั้น ดังนั้นเราจึงจะพิจารณาการลู่ของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปผ่านการพิจารณาการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

**บทนิยาม 3.2.1** ให้ $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ และ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

1. ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ ลู่เข้า
2. ปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergent) ก็ต่อเมื่อ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า แต่ $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ ลู่ออก

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวก่อน ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.8** ให้ $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ และ $\int_a^\infty h(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง จะได้ว่า

1. ถ้า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^\infty (f(x) \pm g(x))\,dx$ จะลู่เข้า
2. ถ้า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า โดยที่ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \geq a$ แล้ว $\int_a^\infty h(x)\,dx$ จะลู่เข้าด้วย

**พิสูจน์** 1. เขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิต แล้วอาศัยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 4, 5 ทำให้สามารถแยกปริพันธ์จำกัดเขตเป็นบวกหรือผลลบได้ จากนั้นใช้สมบัติของลิมิตมาพิจารณาอีกครั้ง

2. เนื่องจาก $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ จึงได้ว่า $0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$ จาก $\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\int_a^\infty h(x)\,dx$ ลู่เข้า จากข้อ 1 จึงได้ว่า $\int_a^\infty (h(x) - f(x))\,dx$ จึงลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\int_a^\infty (h(x) - f(x))\,dx$ ลู่เข้า ทำให้สรุปได้ว่า $\int_a^\infty h(x)\,dx$ ลู่เข้าตามต้องการ □

การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะช่วยให้เราสามารถพิจารณาการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 3.2.9 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จะลู่เข้า กล่าวคือ ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ ลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่เข้า

**พิสูจน์** เนื่องจาก $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ จึงได้ว่า

$$\int_a^\infty -|f(x)|\,dx \le \int_a^\infty f(x)\,dx \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

จากการกำหนดให้ $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ โดยทฤษฎีบท 3.2.8 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าตามต้องการ □

ดังนั้น หากเรามีปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ที่ทำการทดสอบ แล้วพบว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เราก็จะสามารถสรุปได้ว่า ปริพันธ์ดังกล่าวนั้นลู่เข้าได้ทันที ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** 3.2.10 จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เมื่อ $p > 1$

**วิธีทำ** ก่อนอื่นเราจะพิจารณาว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เนื่องจาก

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{|\sin x|}{x^p} = \frac{1}{x^p}$$

และ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ (ทฤษฎีบท 3.2.2) จึงได้ว่า $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.9 สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

**ตัวอย่าง** 3.2.11 จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{3}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

**วิธีทำ** ในกรณีนี้จะเห็นว่า หากเราเริ่มต้นโดยพิจารณา $\displaystyle\int_1^\infty \left|\sin\frac{3}{x}\right| dx$ จะพบว่าเราทำการเปรียบเทียบกับ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ซึ่งพบว่าลู่ออก ทฤษฎีบท 3.2.1 จึงไม่สามารถใช้ในการตรวจสอบได้ ดังนั้น เราจึงต้องพิจารณาจากสมบัติพื้นฐานของปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{3}{x}\,dx$

เราจะเห็นว่า $\sin\frac{3}{x} \ge 0$ เมื่อ $x \ge 1$ ดังนั้นจึงพบว่าปริพันธ์ดังกล่าวมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเมื่อเลือก $f(x) = \sin\frac{3}{x}$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$ โดยใช้ลิมิตเปรียบเทียบ

จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{3\sin t}{t} = 3$$

และ $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก จึงสรุปได้ว่า $\int_1^\infty \sin\frac{3}{x}\,dx$ ลู่ออก

เราสามารถพิจารณาการลู่เข้าหรือออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบได้อีกวิธีหนึ่ง โดยการใช้**เกณฑ์ของโคชี** (Cauchy criterion) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.12** (เกณฑ์ของโคชีสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง)
ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ชนิดที่หนึ่ง ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $X_0 \geq a$ ที่ทำให้

$$\left|\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \text{ สำหรับทุก } X_1, X_2 > X_0$$

**พิสูจน์** นิยาม $F(X) = \int_a^X f(x)\,dx$ เป็นฟังก์ชันของ $X$ เราจะพิจารณาโดยใช้เกณฑ์การลู่เข้าของโคชีสำหรับฟังก์ชัน $F(X)$ กล่าวคือ $F(X)$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริงเมื่อ $X\to\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $X_0 \geq a$ ซึ่งสำหรับทุก $X_1, X_2 > X_0$ แล้ว $|F(X_1) - F(X_2)| < \epsilon$ นั่นคือ

$$\left|\int_a^{X_1} f(x)\,dx - \int_a^{X_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon$$

ตามต้องการ □

ดังนั้น หากใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 3.2.12 ทำให้เราสามารถตรวจสอบได้ว่า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก ถ้ามี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ทุก $X_0 \geq a$ มี $X_1, X_2 > X_0$ ซึ่ง $\left|\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx\right| \geq \epsilon$

เราสามารถสร้างทฤษฎีบทเพื่อใช้ในการทดสอบการลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์สามารถศึกษาได้จาก [1]

**ทฤษฎีบท 3.2.13** ถ้า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ลู่เข้า และ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงหรือ $\pm\infty$ แล้ว $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

**ตัวอย่าง 3.2.14** ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_2^\infty \frac{\ln x - 2x^2}{x^2-1}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

**วิธีทำ** เราจะใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 3.2.13 มาพิจารณา กล่าวคือ พิจารณา

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x - 2x^2}{x^2-1} = -2 \neq 0$$

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า $\int_2^\infty \frac{\ln x - 2x^2}{x^2-1}\,dx$ ลู่ออก

**หมายเหตุ** เราควรระมัดระวังว่า หาก $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ หรือ $\pm\infty$ เราจะสรุปได้ว่า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก แต่หากลิมิตของ $f(x)$ ไม่มีค่าแล้ว จะยังสรุปไม่ได้ว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่ออก

นอกจากนี้ เรายังมีการทดสอบการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ชนิดอื่น ๆ โดยเราจะยกทฤษฎีบทดังกล่าวมาไว้โดยละการพิสูจน์ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.15** (การทดสอบแบบอาเบล : Abel's test)
ถ้า $\phi(x)$ เป็น ฟังก์ชัน ที่ มี ขอบเขต และ เป็น ฟังก์ชัน ทาง เดียว บน $[a,\infty)$ และ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^\infty f(x)\phi(x)\,dx$ ลู่เข้า

**ทฤษฎีบท 3.2.16** (การทดสอบแบบดีรีเคล : Dirichlet's test)
ถ้า $\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต เป็นฟังก์ชันทางเดียว ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $x \to \infty$ และ $\int_a^X f(x)\,dx$ มีขอบเขตเมื่อ $X \geq a$ แล้ว $\int_a^\infty f(x)\phi(x)\,dx$ ลู่เข้า

### 3.2.3 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่ไม่เป็นลบ

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ก่อนอื่นเราพิจารณากรณีที่ฟังก์ชัน $f$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$ กล่าวคือ จะเขียนลิมิตได้ในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก ทำให้เราได้ว่า $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a,b)$ ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2.1, 3.2.2 และ 3.2.4 เราจึงได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ โดยจะละการพิสูจน์ เนื่องจากทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถทำได้ในทำนองคล้ายกัน

**ทฤษฎีบท 3.2.17** ให้ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in [a,b)$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)\,dx$ ที่ $x = b$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก $M$ ที่ทำให้ $\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t \in [a,b)$

**ทฤษฎีบท 3.2.18** (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ: Comparison test)
ถ้า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันที่เป็นบวก โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b)$ แล้ว

1. ถ้า $\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a,b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

**ตัวอย่าง 3.2.19** จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$

**วิธีทำ** 1. จะเห็นว่า สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่จุด $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ที่กำหนด เนื่องจากสำหรับ $x > 1$ ได้ว่า $x^4 - 1 > x - 1$ นั่นคือ $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 1, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ ลู่เข้า

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-3)^4}$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่จุด $x = 3$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เนื่องจาก $\ln x > 1$ สำหรับ $x > 3$ จึงได้ว่า $\dfrac{\ln x}{(x-3)^4} > \dfrac{1}{(x-3)^4}$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4}\,dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 3, p = 4$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$ ลู่ออก

**ทฤษฎีบท 3.2.20** (การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ: Limit comparison test)
ให้ $f, g$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวก

1. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน

2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า

3. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ และ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน โดยพิจารณาลิมิตซึ่ง $x \to a^+$

**ตัวอย่าง 3.2.21** จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\,dx$

**วิธีทำ** 1. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ มีจุด $x = 3$ ที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ ที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ที่กำหนด เลือก $g(x) = \dfrac{1}{3-x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

เนื่องจาก $\int_0^3 \frac{1}{3-x}\,dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $b = 3, p = 1$) โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ลู่ออก

2. ฟังก์ชัน $f(x) = -\ln x$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือที่จุด $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เลือก $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 0$$

เนื่องจาก $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 0, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\int_0^1 -\ln x\,dx$ ลู่เข้า

ในทำนองเดียวกันกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เราสามารถสร้างวิธีการทดสอบที่ใช้งานได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.18, 3.2.20 และทฤษฎีบท 3.1.5 ประกอบกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.22** 1. ถ้า $f \geq 0$ ในย่านจุดใกล้เคียงของ $b$ แล้ว

- ปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p < 1$ และจำนวนจริงบวก $M$ ที่ทำให้ $f(x) \leq M/(b-x)^p$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$
- ปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p \geq 1$ และจำนวนจริงบวก $G$ ที่ทำให้ $f(x) \geq G/(b-x)^p$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$

2. ถ้า $\lim_{x\to b^-} (b-x)^p f(x)$ มีค่าและไม่เป็นศูนย์แล้ว ปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p < 1$

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

**ตัวอย่าง 3.2.23** ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ ลู่เข้า
เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}$

### 3.2.4 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองทั่วไป

ในทำนองเดียวกันกับการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งทั่วไป เราสามารถนิยามการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการตรวจสอบการลู่เข้าได้โดยสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้โดยละการพิสูจน์เนื่องจากสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน โดยเราจะยกตัวอย่างกรณีที่ $f$ ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x=b$ สำหรับกรณี $x=a$ และกรณีจุดในช่วง $[a,b]$ ไม่ต่อเนื่อง สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้

**บทนิยาม 3.2.2** ให้ $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ และ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง โดยที่ $x$ ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x=b$

1. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ ลู่เข้า
2. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergent) ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า แต่ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ ลู่ออก

**ทฤษฎีบท 3.2.24** ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จะลู่เข้า กล่าวคือ สำหรับ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่ง $x=b$ ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ ถ้า $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ ลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่เข้า

**ตัวอย่าง 3.2.25** จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

**วิธีทำ** เราพิจารณาว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right|\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่
เนื่องจาก

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{x^{1/2}}$$

และ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a=0, p=\frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right|\,dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.24 สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าแบบโคชี สำหรับกรณีปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองได้ทำนองเดียวกัน ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.26** (เกณฑ์ของโคชีสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง)
ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ชนิดที่สอง เมื่อ $f$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = b$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\left|\int_{a+\lambda_1}^{b+\lambda_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \text{ โดยที่ } 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \delta$$

สำหรับการพิสูจน์สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกันกับทฤษฎีบท 3.2.12 โดยกำหนดฟังก์ชัน $F(\lambda) = \displaystyle\int_{a+\lambda}^b f(x)\,dx$ แล้วพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าแบบโคชีของ $F(\lambda)$

### 3.2.5 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

เนื่องจากเราสามารถเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามในรูปแบบของผลบวกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและสอง เราจึงสามารถพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามได้จากการพิจารณาการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและสอง ซึ่งเราได้สร้างวิธีการตรวจสอบมาในหัวข้อที่ผ่านมา โดยเราสามารถพิจารณาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.2.27** จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

**วิธีทำ** จากปริพันธ์ที่กำหนดให้ เราพบว่า เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม เนื่องจากมีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 1$ เราจึงต้องแยกปริพันธ์ดังกล่าวออกเป็นสามส่วน กล่าวคือ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx + \int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx + \int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$$

เราจะพิจารณาปริพันธ์ทีละพจน์ ดังนี้

- <u>พจน์</u> $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่งมีจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตบนของปริพันธ์ เราจึงทำการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

  เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีค่าเป็นลบในช่วง $[0, 1]$ เราจึงพิจารณา $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1-x)^{1/3}}\,dx$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกตลอดในช่วง $[0, 1]$

  เนื่องจากเราทราบว่า $e^{-x} \leq 1$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$ นั่นคือ $\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^{1/3}} \leq \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$ จึงเลือกปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx$ ซึ่งลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.5 โดยทฤษฎีบท 3.2.18 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า

- <u>พจน์</u> $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่งมีจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เราจึงทำการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

  สำหรับพจน์ที่สอง $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีค่าเป็นบวกตลอดบนช่วง

$[0, 1]$ ทำนองเดียวกันกับพจน์ที่หนึ่ง จะได้ว่า $\dfrac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} \leq \dfrac{1}{(x-1)^{1/3}}$ จึงเลือกปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ซึ่งลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.5 โดยทฤษฎีบท 3.2.18 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า

- พจน์ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยขอบเขตบนเป็นอนันต์

  เลือกฟังก์ชัน $g(x) = e^{-x}$ ซึ่งเราทราบว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}(x-1)^{1/3}} = 0$$

  เนื่องจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_2^\infty e^{-x}\,dx$ ลู่เข้า

  ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.4 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า

จากทั้งสามปริพันธ์ลู่เข้า เราจึงสรุปได้ว่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า ตามต้องการ

# แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

   (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+\ln x}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2e^{4x}\,dx$

2. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)^2}$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{-\ln x}$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_3^2 \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^{1/3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$

3. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้า จงพิจารณาว่า การลู่เข้าเป็นการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^4}$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

4. จงพิจารณาว่า สำหรับค่าคงที่ $a>0$ ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

5. จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

6. สำหรับ $t>0$ จงแสดงว่า

   (a) $\displaystyle\int_t^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า

   (b) $\displaystyle\int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ลู่เข้า

   (คำใบ้ : พิจารณาพจน์ $\displaystyle\int_t^M \frac{\sin x}{x}\,dx$ โดยการหาปริพันธ์แต่ละส่วน แล้วใช้ผลจากข้อ a.)

7. ถ้า $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามในเทอมของ $x$ โดยที่ $Q(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\geq a$ จงแสดงว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ $Q(x)$ มากกว่าดีกรีของ $P(x)$ อย่างน้อยสอง

8. ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามซึ่งไม่มีตัวประกอบร่วมกันเลย จงแสดงว่า $\displaystyle\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ ลู่ออก เมื่อรากของพหุนาม $Q(x)=0$ อยู่ในช่วง $a\leq x\leq b$

## 3.3 การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

ในบทที่ 2 เราเคยพิจารณาฟังก์ชันที่นิยามในรูปแบบอิงตัวแปรเสริม

$$\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

ซึ่งโดยทฤษฎีบท 2.4.3 เราสามารถพิจารณาสลับลำดับการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ได้

ในหลายเหตุการณ์ ฟังก์ชันที่นิยามข้างต้น อาจพิจารณาได้ในรูปของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ กล่าวคือ

$$\phi(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

โดยที่ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ $x$ และ $\alpha$ ซึ่ง $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ และ $x \in [a, \infty)$ จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $\phi(\alpha)$ เป็นฟังก์ชันของ $\alpha$ เช่นเดียวกันกับเหตุการณ์ที่เคยกล่าวในทฤษฎีบท 2.4.3 เราสนใจว่า

1. $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องหรือไม่ บนเซตใด
2. $\phi(\alpha)$ หาปริพันธ์ได้บน $[\alpha_1, \alpha_2]$ หรือไม่ และ $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\,d\alpha = \int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha$ หรือไม่
3. $\phi(\alpha)$ หาอนุพันธ์ได้หรือไม่ และ $\displaystyle\phi'(\alpha) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,d\alpha$ หรือไม่

เนื่องจาก $\phi(\alpha)$ นิยามโดยปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เราอาจพิจารณาว่า การลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบจะรับประกันเหตุการณ์ดังกล่าวที่กล่าวมาข้างต้นได้หรือไม่ ซึ่งจะพบว่า เงื่อนไขดังกล่าวไม่เพียงพอที่จะสรุปเหตุการณ์ดังกล่าว เราจึงพิจารณาการลู่เข้าชนิดที่เหมาะสมกว่าดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.3.1** จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ **ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ** (converge uniformly) สำหรับ $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $N$ ซึ่งเป็นอิสระจาก $\alpha$ ซึ่งสำหรับทุก $p \ge N$

$$\left| \int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_a^{p} f(x,\alpha)\,dx \right| = \left| \int_p^{\infty} f(x,\alpha)\,dx \right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$

**หมายเหตุ** เราอาจศึกษาฟังก์ชัน $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ ให้อยู่ในลักษณะการศึกษาอนุกรมอนันต์ กล่าวคือ ให้

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ นั่นคือ เราเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปผลบวกอนันต์ กล่าวคือ

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,\alpha)\,dx$$

สมมติให้ $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,\alpha)\,dx$ ในการศึกษาอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชัน หากอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty u_n(\alpha)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอแล้ว $\phi(\alpha)$ ก็จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย อย่างไรก็ตาม การพิจารณาการลู่เข้าของลำดับนี้อาจไม่เป็นไปได้อย่างเดียว (uniqueness) การนิยามผ่านลิมิตของผลบวกอนันต์อาจไม่เพียงพอ เราจึงต้องนิยามแนวคิดของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอตามบทนิยาม 3.3.1

ในการตรวจสอบการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ นอกจากการใช้นิยามการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอดังทฤษฎีบท 3.3.1 แล้ว เรายังมีวิธีทดสอบต่าง ๆ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 3.3.1 (การทดสอบแบบไวแยร์สตราส : Weierstrass M-test)
ถ้า $M(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก และมีความต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq N$ และถ้า

1. $|f(x,\alpha)| \leq M(x)$ สำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $x \geq N$ และ
2. $\displaystyle\int_a^\infty M(x)\,dx$ ลู่เข้า

แล้ว $\displaystyle\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$

**พิสูจน์** สมมติให้สมมติฐานเป็นจริง ให้ $\epsilon > 0$ จาก $\displaystyle\int_N^\infty M(x)\,dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า มี $N > a$ ซึ่งทำให้ $\displaystyle\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้า กล่าวคือ

$$\left|\int_a^\infty M(x)\,dx - \int_a^N M(x)\,dx\right| < \epsilon \text{ ทุก } S \geq N$$

นั่นคือ สำหรับทุก $S \geq N$ และ $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$ จะได้ว่า

$$\int_N^\infty M(x)\,dx = \left|\int_a^\infty M(x)\,dx - \int_a^N M(x)\,dx\right| < \epsilon$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^N f(x,\alpha)\,dx\right| &= \left|\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx\right| \\ &\leq \int_N^\infty |f(x,\alpha)|\,dx \\ &\leq \int_N^\infty M(x)\,dx < \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ □

**ตัวอย่าง** 3.3.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\,dx$ บน $(-\infty,\infty)$
2. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(\alpha x)\,dx$ บน $(-\infty,\infty)$

**วิธีทำ** 1. เนื่องจาก $\left|\dfrac{\cos\alpha x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{1}{x^2+1}$ สำหรับทุก $\alpha\in\mathbb{R}$ และ $x>0$ จึงเลือก $M(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ซึ่ง $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้า นั่นคือ

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\right|dx \le \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

ดังนั้นโดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ และลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. พิจารณา $\left|xe^{-x^2}\sin(\alpha x)\right| \le xe^{-x^2}$ สำหรับทุก $\alpha\in\mathbb{R}$ และ $x\ge 0$ เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านตรวจสอบเป็นแบบฝึกหัด) โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(\alpha x)\,dx$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ และลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

**ตัวอย่าง** 3.3.3 กำหนดให้ $\phi(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx$ สำหรับ $\alpha>0$

1. จงคำนวณค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\phi(\alpha)$
2. จงแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 สำหรับ $\alpha\ge\alpha_1>0$
3. จงแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ สำหรับ $\alpha>0$

**วิธีทำ** 1. เราคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้โดยตรง กล่าวคือ

$$\phi(\alpha)=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=\lim_{b\to\infty}-e^{-\alpha x}\big|_{x=0}^{b}=1$$

2. จะแสดงโดยใช้นิยามของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 หากจะแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 จะต้องแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\epsilon>0$ จะมี $N$ (ซึ่งขึ้นอยู่กับ $\epsilon$ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับ $\alpha$) ซึ่ง $\left|1-\displaystyle\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\,dx\right|<\epsilon$ สำหรับทุก $u>N$

ดังนั้น ให้ $\epsilon>0$ เลือก $N=\dfrac{1}{\alpha_1}\ln\dfrac{1}{\epsilon}$ ซึ่งทำให้

$$\left|1-\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\,dx\right| = |1-(1-e^{-\alpha u})| = e^{-\alpha u}\le e^{-\alpha_1 u}<\epsilon$$

สำหรับ $u > N$ ตามต้องการ (เราสามารถแสดงการลู่เข้าอย่างสม่ำเสอโดยวิธีไวแยร์สตาร์ส ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)

3. เมื่อ $\alpha_1 \to 0$ จะเห็นว่า $N = \dfrac{1}{\alpha_1}\ln\dfrac{1}{\epsilon}$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต นั่นคือ ปริพันธ์ $\phi(\alpha)$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha > 0$

**หมายเหตุ** ในการเลือก $N$ ในข้อที่ 2. ของตัวอย่างดังกล่าว จากการคิดทด เพื่อให้ได้ว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ จะพิจารณาว่า หาก $u > N$ แล้ว ปริพันธ์จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้นจากอสมการ $e^{-\alpha_1 u} < \epsilon$ จึงแก้อสมการเพื่อหาค่า $N$

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการทดสอบการลู่เข้าอีกชนิดของดิริคเรต โดยเราจะละการพิสูจน์ ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 3.3.4 (การทดสอบแบบดีรีเคล : Dirichlet's test)
สำหรับจำนวนจริง $\alpha_1, \alpha_2$ ถ้า

1. $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวกและเป็นฟังก์ชันลดทางเดียว โดยที่ $\psi(x) \to 0$ เมื่อ $x \to 0$ และ
2. $\displaystyle\int_a^u f(x,\alpha)\,dx$ มีขอบเขต สำหรับทุก $u > a$ และ $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ แล้ว

แล้ว $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\psi(x)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับทุก $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

สำหรับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

**บทนิยาม** 3.3.2 จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ ซึ่งเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = a$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $S$ ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $t_0 \in (a, b]$ ซึ่ง

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_t^b f(x,\alpha)\,dx\right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $\alpha \in S, a < t < t_0 \le b$

และการทดสอบแบบไวแยร์สตราสสามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 3.3.5 (การทดสอบแบบไวแยร์สตราส II: Weierstrass M-test II)
ถ้า $M(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก และถ้า

1. $|f(x,\alpha)| \le M(x)$ สำหรับ $\alpha \in S$, $x \in (a, b]$ และ
2. $\displaystyle\int_a^b M(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ซึ่งลู่เข้า

แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์บน $S$

### 3.3.1 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นทฤษฎีบทที่ช่วยตอบคำถามข้างต้นของหัวข้อนี้เกี่ยวกับฟังก์ชัน $\phi(\alpha)$ โดยเริ่มต้น เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่อง ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 3.3.6 ถ้า $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ต่อเนื่องบน $[\alpha_1,\alpha_2]$ นั่นคือ สำหรับจุด $\alpha_0 \in [\alpha_1,\alpha_2]$ จะได้ว่า

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\phi(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx$$

**พิสูจน์** จาก $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ จะได้ว่า เราเขียน

$$\phi(\alpha) = \int_a^u f(x,\alpha)\,dx + R(u,\alpha)$$

โดยที่ $R(u,\alpha) = \displaystyle\int_u^\infty f(x,\alpha)\,dx$ เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า

$$\phi(\alpha+h) = \int_a^u f(x,\alpha+h)\,dx + R(u,\alpha+h)$$

สำหรับ $\alpha+h \in [\alpha_1,\alpha_2]$ นั่นคือ

$$\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha) = \int_a^u [f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)]\,dx + R(u,\alpha+h) - R(u,\alpha)$$

เพราะฉะนั้น

$$|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)| \leq \int_a^u |f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)|\,dx + |R(u,\alpha+h)| + |R(u,\alpha)|$$

เนื่องจากปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[\alpha_1,\alpha_2]$ จึงได้ว่า มี $N$ (ซึ่งเป็นอิสระจาก $\alpha$) ที่ทำให้สำหรับแต่ละ $u > N$

$$|R(u,\alpha+h)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ และ } |R(u,\alpha)| < \frac{\epsilon}{3}$$

จาก $f(x,\alpha)$ มีความต่อเนื่อง จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)| < \delta/3$ เมื่อ $|h| < \delta$ นั่นคือ

$$\int_a^u |f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)|\,dx < \frac{\epsilon}{3}$$

เพราะฉะนั้น

$$|\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

นั่นคือ $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[\alpha_1, \alpha_2]$ ตามต้องการ $\square$

กล่าวโดยสรุปคือ หากปริพันธ์ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอแล้ว เราจะสามารถสลับลิมิตเข้าไปในปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ ตัวอย่างค้านต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า หากขาดซึ่งเงื่อนไขการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ก็จะทำให้ทฤษฎีบท 3.3.6 ไม่เป็นจริง

**ตัวอย่างค้าน** 3.3.7 จงแสดงว่า

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx \neq \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha e^{-\alpha x}\right) dx$$

**พิสูจน์** ในตัวอย่าง 3.3.3 จะเห็นว่า

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx = 1$$

แต่เนื่องจาก

$$\int_0^\infty \left(\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha e^{-\alpha x}\right) dx = \int_0^\infty 0\, dx = 0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx \neq \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha e^{-\alpha x}\right) dx$$

ทั้งนี้ จะเห็นว่าในตัวอย่าง 3.3.3 นั้น $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha > 0$ ทำให้ไม่สามารถรับประกันได้ว่า $\phi(\alpha)$ จะต่อเนื่องสำหรับ $\alpha > 0$ $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการสลับลำดับของการหาปริพันธ์ ซึ่งในทฤษฎีบทนี้จะคล้ายกับทฤษฎีบท 2.4.3 ดังนี้

**ทฤษฎีบท** 3.3.8 ถ้า $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\, dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^\infty f(x,\alpha)\, dx\right] d\alpha = \int_a^\infty \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\, d\alpha\right] dx$$

**พิสูจน์** จากทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ และเราทราบว่า $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\, dx$ ต่อเนื่อง ทุก $\alpha \geq \alpha_1$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\displaystyle\int_a^K \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\, d\alpha\, dx$ ลู่เข้าสู่ $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\, d\alpha$ เมื่อ $K \to \infty$

จากทฤษฎีบท 2.4.6 เราได้ว่า

$$\int_a^K \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\, d\alpha\, dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_a^K f(x,\alpha)\, dx\, d\alpha$$

เนื่องจากปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าสม่ำเสมอ จะได้ว่า สำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $N$ ซึ่งสำหรับ $N > a$ ซึ่ง $S \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^S f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\phi(\alpha)\,d\alpha - \int_a^K\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_a^K f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha\right| \\
&\leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left|\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^K f(x,\alpha)\,dx\right|\,d\alpha \\
&\leq \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า เราสามารถสลับการหาปริพันธ์ได้ตามต้องการ □

**ตัวอย่าง 3.3.9** จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty\int_a^b \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,d\alpha\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ สำหรับ $b > a > 0$

**วิธีทำ** จะเห็นว่า $f(x,\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha^2x^2}$ มีความต่อเนื่องบน $[0,\infty)\times[a,b]$ ต่อไปเราจะพิจารณาว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$

จาก $\alpha \geq a$ เราจึงได้ว่า $\left|\dfrac{1}{1+\alpha^2x^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+a^2x^2}$ เนื่องจาก $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส (ทฤษฎีบท 3.3.1) จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3.8 จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_a^b \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,d\alpha\,dx &= \int_a^b\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx\,d\alpha \\
&= \int_a^b \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du\,d\alpha \\
&= \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{1}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาการสลับลำดับระหว่างการหาอนุพันธ์กับเครื่องหมายปริพันธ์ตามทฤษฎีบท 2.4.3 สำหรับปริพันธ์ที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 3.3.10 ถ้า $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial\alpha$ ต่อเนื่องเทียบกับ $\alpha$ สำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

$$\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

**พิสูจน์** จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่หนึ่ง (ทฤษฎีบท 2.2.1) สำหรับทุก $y \in (a_1, a_2)$ ได้ว่า

$$\int_{\alpha_1}^{y} \frac{\partial f(x,\alpha))}{\partial\alpha}\,d\alpha = f(y,x) - f(\alpha_1,x)$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\alpha_1,\alpha_2]$ โดยทฤษฎีบท 3.3.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1}^{y}\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,dx\,d\alpha &= \int_a^\infty\int_{\alpha_1}^{y} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,d\alpha\,dx\\ &= \int_a^\infty [f(y,x) - f(\alpha_1,x)]\,dx\\ &= \phi(y) - \phi(\alpha_1)\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่สอง (ทฤษฎีบท 2.2.6) จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\alpha_1}^{y}\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,dx\,d\alpha = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx = \phi'(y)$$

จึงสรุปได้ว่า $\displaystyle\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ ตามต้องการ

□

**หมายเหตุ** ในทฤษฎีบท 3.3.10 จะเห็นว่า $a$ ที่เป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ไม่ตรงแบบจะไม่ขึ้นอยู่กับ $\alpha$ ในกรณีที่ $a$ เป็นขอบเขตล่างที่เป็นฟังก์ชันของ $\alpha$ เราจะสามารถใช้ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ (ทฤษฎีบท 2.4.3) ดำเนินการได้เช่นเดียวกัน

## 3.4 การคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในส่วนนี้เราจะศึกษาวิธีการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ซึ่งหลายปริพันธ์ ได้ใช้เทคนิคในการจัดพจน์ของปริพันธ์ อาทิ การใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ รวมถึงสมบัติที่ได้กล่าวข้างต้นคือการใช้สมบัติของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งสามารถช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบบางปริพันธ์ที่คำนวณค่าตามปกติได้ยาก โดยอาศัยการสลับลำดับการหาปริพันธ์หรือสลับการหาอนุพันธ์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.4.1** จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$

**วิธีทำ** ก่อนอื่น จะต้องแสดงว่า $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด โดยการตรวจสอบการลู่เข้า) จึงสมมติได้ว่า ให้ $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$ เราจะทำการสมมติตัวแปร ให้ $x = \pi/2 - y$ จะได้ว่า

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(\frac{\pi}{2} - y)\right)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos y)\,dy$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin x) + \ln(\cos x))\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad (3.4.1)
\end{aligned}$$

ต่อมา กำหนดให้ $2x = v$ จะได้ว่า $dx = \frac{1}{2}dv$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin v)\,dv \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin v)\,dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v)\,dv\right]
\end{aligned}$$

สำหรับปริพันธ์พจน์สุดท้าย กำหนดให้ $v = \pi - u$ จะได้ว่า

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin v)\,dv = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin u)\,du$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}(I + I) = I$ ดังนั้น จากสมการ (3.4.1) ทำให้ได้ว่า $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$ ตามต้องการ

**ตัวอย่าง 3.4.2**

1. จงแสดงว่า $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ สำหรับทุก $\alpha \geq 1$
2. หากทราบว่า $\phi(\alpha) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$ แล้ว จงคำนวณค่า $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

3. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}\frac{\pi}{2}$$

**วิธีทำ** 1. สำหรับ $\alpha \geq 1$ โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า

$$\frac{1}{x^2+\alpha} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

และเนื่องจาก $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านตรวจสอบเป็นแบบฝึกหัด) จะได้ว่า $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

2. พิจารณาพจน์

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \tag{3.4.2}$$

(ผู้อ่านสามารถแสดงได้โดยใช้การหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยตรง) ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

เนื่องจาก $\frac{1}{(x^2+\alpha)^2} \leq \frac{1}{(x^2+1)^2}$ และ $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

โดยทฤษฎีบท 3.3.10 ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.4.2) เทียบกับ $\alpha$ ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\left(\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}\right) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{x^2+\alpha}\right) \\ &= -\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+\alpha)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2}\end{aligned}$$

ต่อไป เราต้องการพิจารณากรณีที่ $\alpha \to 1^+$ เนื่องจาก $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$ โดยใช้ทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า

$$-\lim_{\alpha\to 1^+}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = -\int_0^\infty \lim_{\alpha\to 1^+}\frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = -\lim_{\alpha\to 1^+}\frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2} = -\frac{\pi}{4}$$

3. ในทำนองคล้ายกันกับข้อ 2. เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2}\alpha^{-1/2}$$

และสามารถแสดงได้ว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$ และเมื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ $\alpha$ จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2}$$

ซึ่งในทำนองเดียวกันกับข้อ 2. เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left(\frac{1}{x^2+\alpha}\right)dx$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่ $n$ เทียบกับ $\alpha$ จะทำให้ได้

$$(-1)(-2)...(-n)\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}\cdots\frac{-(2n-1)}{2}\frac{\pi}{2}\alpha^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

เมื่อให้ $\alpha \to 1^+$ โดยทฤษฎีบท 3.3.10 จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{(-1)(-3)...(-2n-1)}{2^n(-1)^n n!}\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}\frac{\pi}{2}$$

สำหรับการแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,d\theta$ เราสามารถแสดงได้โดยให้ $x=\tan\theta$ จะได้พจน์ตามที่ต้องการ

# แบบฝึกหัดที่ 3.3 - 3.4

1. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอหรือไม่
   (a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$ สำหรับ $\alpha\in[a,b]$ เมื่อ $0<a<b<\infty$
   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin(\alpha^2+x^2)\,dx$ สำหรับ $\alpha\in(-\infty,\infty)$
   (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ สำหรับ $\alpha>0$
   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\alpha x^2+1}\,dx$ สำหรับ $\alpha\in[\epsilon,\infty)$ เมื่อ $\epsilon>0$
2. พิจารณา $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx$ สำหรับ $\alpha>0$ และสำหรับจำนวนจริง $r$ ใด ๆ
   (a) จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}$
   (b) จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าสัมบูรณ์สำหรับ $a\le\alpha\le b$ โดยที่ $0<\alpha<\beta$ และจำนวนจริง $r$ ใด ๆ
3. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\pi x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$
4. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x}\,dx$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[1,2]$
5. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$ โดยที่ $b>a>0$

6. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\sec rx}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$ โดยที่ $a, b > 0$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.8)

7. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}$ โดยที่ $\alpha > 0$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.10)

8. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 8, 1c และทฤษฎีบท 3.3.6)

## 3.5 บทนำสู่ปริพันธ์เชิงวงรี

ในแคลคูลัสพื้นฐาน การหาความยาวของส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ สามารถหาได้จากปริพันธ์จำกัดเขต

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{3.5.1}$$

ปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งคือ การหาความยาวเส้นรอบรูปวงรี สมมติให้วงรีมีสมการ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a < b$ และสมการในรูปอิงตัวแปรเสริมเขียนได้ในรูป $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ จะได้ว่า ความยาวของเส้นรอบวงรีหาได้จาก

$$L = 4b^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

โดยที่ $k^2 = 1-\frac{a^2}{b^2}$ ซึ่งปริพันธ์ดังกล่าวไม่สามารถคำนวณค่าได้โดยวิธีปกติที่เคยศึกษามาแล้ว

ปัญหาต่อไปที่น่าสนใจคือ ปัญหาการแกว่งลูกตุ้ม (เพนดูลัม) สมมติว่ามีลูกตุ้มความยาว $L$ ที่ไม่มีความหน่วง มีการเคลื่อนที่ที่สามารถจำลองได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin u = 0$$

โดยที่ $u$ คือมุมระหว่างลูกตุ้มกับเส้นแนวตั้งฉากกับพื้นโลก เป็นฟังก์ชันของเวลา $t$ และ $g$ คือค่าคงที่เนื่องจากแรงดึงดูดของโลก ซึ่งในทางฟิสิกส์ เราอาจทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (ดูรายละเอียดจาก [18]) สมมติว่ามุมเริ่มต้น $u(0) = A$ จะได้คาบของการแกว่ง $T(A)$ โดยที่ $k = \sin\frac{A}{2}$ โดย

$$T(A) = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

ซึ่งก็ไม่สามารถคำนวณค่าของปริพันธ์โดยวิธีปกติเช่นกัน เราจึงต้องมีวิธีการในการสร้างรูปแบบมาตรฐานของปริพันธ์ชนิดพิเศษเหล่านี้ เพื่อให้ได้เครื่องมือสำหรับช่วยคำนวณค่าเมื่อปัญหาสามารถแปลงได้ในรูปของปริพันธ์ดังกล่าว

### 3.5.1 ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์

ปริพันธ์เชิงวงรีแบบพื้นฐานได้รับการศึกษาโดยแอนเดรียน มารี เลอจองค์ (Andrien-Marie Legendre) โดยปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์สามารถแบ่งได้เป็นสามชนิด โดยกำหนดให้ $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ดังนี้

1. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ชนิดที่หนึ่ง** (The Legendre's elliptic integral of the first kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \qquad 0 \leq k^2 < 1 \tag{3.5.2}$$

   ตัวแปรเสริม $k$ เรียกว่า **โมดูลัส** (modulus) ของปริพันธ์เชิงวงรี และ $\phi$ เรียกว่า **แอมพลิจูด** (amplitude) ของปริพันธ์เชิงวงรี ซึ่ง $0 \leq \phi < \pi/2$

   ในกรณี $\phi$ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $F(k, \phi)$ เป็น**ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์** (incomplete elliptic integral) ชนิดที่หนึ่ง และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $F(k, \frac{\pi}{2}) = K(k) = K$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่า **ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์** (complete elliptic integral) ชนิดที่หนึ่ง

2. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ชนิดที่สอง** (The Legendre's elliptic integral of the second kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta \qquad 0 \leq k^2 < 1$$

   ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี $\phi$ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $E(k, \phi)$ เป็นปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สอง และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $E(k, \frac{\pi}{2}) = E(k) = E$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่าปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สอง

3. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ชนิดที่สาม** (The Legendre's elliptic integral of the third kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\pi(k, n, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \qquad 0 \leq k^2 < 1$$

   โดยที่ $n$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $n \neq 0$

   สำหรับกรณี $\phi$ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $\pi(k, n, \phi)$ เป็นปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สาม และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $E(k, n, \frac{\pi}{2}) = \pi(k, n)$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่าปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สาม

ในการคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรี เราจะใช้การคำนวณค่าซึ่งคำนวณได้โดยใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ในการกระจายพจน์

$$(1 - k^2 \sin^2\theta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{3}{4}k^2 \sin^4\theta + ...$$

นั่นคือ

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} k^{2n} \sin^{2n}\theta \, d\theta$$

โดยใช้สูตรของ Wallis ทำให้ได้ว่า

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 ... (2n-1)}{2 \cdot 4 ... 2n} \right)^2 k^{2n}$$

**ตัวอย่าง** 3.5.1 จงหาค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$ ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

**วิธีทำ** ให้ $x = \frac{1}{t}$ ดังนั้นปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$ สามารถเขียนได้ในรูป $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ สมมติว่า $t = \sin\phi$ จะได้ว่า $dt = \cos\phi \, d\phi$ ซึ่ง

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\phi \, d\phi}{\sqrt{1-\sin^4\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$$

ให้ $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีแบบบริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง นั่นคือ

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K(\frac{1}{2})$$

สำหรับค่าของ $K(\frac{1}{2})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์

**ตัวอย่าง** 3.5.2 จงหาความยาวส่วนโค้ง $y = \sin x$ สำหรับ $0 \leq x \leq \pi$

**วิธีทำ** จากสูตรความยาวส่วนโค้ง (3.5.1) จะได้ว่า $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ และความยาวส่วนโค้งคือ

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x} \, dx$$

ซึ่งจะได้ปริพันธ์ดังกล่าวในรูปปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่สองเป็น

$$L = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2-\sin^2 x} \, dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x} \, dx = 2\sqrt{2} E(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

โดยค่าของ $E(\frac{1}{\sqrt{2}})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์

### 3.5.2 ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบี

จะเห็นว่า สำหรับปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งอาจยังไม่สะดวกในการใช้งาน โดยอาศัยการแปลงให้ $v = \sin\theta, x = \sin\phi$ จะทำให้ได้ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีได้ ดังนี้

1. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่หนึ่ง** (The Jacobi's elliptic integral of the first kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$F_J(k,x) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \qquad 0 \le k^2 < 1, 0 \le \sin\phi \le 1$$

เมื่อ $\phi = \pi/2$ จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบี นั่นคือ $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ได้ว่า

$$F_J(k,1) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \qquad 0 \le k^2 < 1, 0 \le \sin\phi \le 1$$

2. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่สอง** (The Jacobi's elliptic integral of the second kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$E_J(k,x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}}\,dv \qquad 0 \le k^2 < 1$$

โดยปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบีชนิดที่สอง ให้ $\phi = \pi/2$ จะได้ $x = 1$ ซึ่งพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

3. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่สาม** (The Jacobi's elliptic integral of the third kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\pi_J(k,n,x) = \int_0^x \frac{1}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}\,dv \qquad 0 \le k^2 < 1$$

โดยที่ $n$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $n \neq 0$

และเมื่อ $x = 1$ ก็จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบีชนิดที่สาม

สมมติให้ $R(x,y)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะในพจน์ของ $x, y$ เราสามารถแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในรูปฟังก์ชันอย่างง่าย (elementary function) เมื่อ $y$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ ซึ่งอยู่ในรูปของรากที่สองของฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร $x$ กล่าวคือ ปริพันธ์เชิงวงรีคือปริพันธ์ใด ๆ ที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x) = \int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}\,dx$$

โดยที่ $A(x), B(x), C(x)$ และ $D(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ $x$ และ $S(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสามหรือสี่ ซึ่งปริพันธ์เชิงวงรีสามารถพิจารณาได้ในรูปการวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

จากปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่หนึ่ง ทั้งแบบเลอจองค์และจาโคบี เราสามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีแบบจาโคบี (Jacobian elliptic function) ได้ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.5.1** ให้ $u$ เป็นปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่หนึ่ง และ $\phi, x$ นิยามตาม (3.5.2) ฟังก์ชันเชิงวงรีแบบจาโคบี $\operatorname{sn}$ , $\operatorname{cn}$ , $\operatorname{dn}$ นิยามโดย

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn} u &= \sin\phi = x \\
\operatorname{cn} u &= \cos\phi = \sqrt{1-x^2} \\
\operatorname{dn} u &= \sqrt{k^2\sin^2\phi} = \sqrt{1-k^2x^2}
\end{aligned}$$

จากนิยามดังกล่าว ทำให้เราได้ผลที่ตามมาที่คล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น เอกลักษณ์ $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ และสามารถนิยามฟังก์ชันเพิ่มเติม เช่น $\operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$ และได้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรี เช่น

1. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = (\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u)$

2. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = -(\operatorname{sn} u)(\operatorname{dn} u)$

3. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{dn} u) = -k^2(\operatorname{sn} u)(\operatorname{dn} u)$

4. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{tn} u) = \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}$

**ตัวอย่าง 3.5.3** จงหาค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}\,dx$ ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

**วิธีทำ** เพื่อให้สามารถคำนวณค่าได้สะดวก เราจะจัดรูปปริพันธ์ให้อยู่ในรูปปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ โดยใช้การแทนค่าแบบตรีโกณมิติ

ให้ $x = 2\sin\theta$ จะได้ว่า $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ จะได้ว่า สำหรับขอบเขต เมื่อ $x = 0$ จะได้ $\theta = 0$ และเมื่อ $x = 2$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{(4-4\sin^2\theta)(9-4\sin^2\theta)}}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(9-4\sin^2\theta)}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9}\sin^2\theta)}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}K(\frac{2}{3})
\end{aligned}$$

สำหรับค่าของ $K(\frac{2}{3})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์

**หมายเหตุ** การคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรี สามารถคำนวณได้จากเว็บไซต์ Wolfram Alpha (http:// www.wolframalpha.com) หรือ ซอฟท์แวร์ คณิตศาสตร์ Wolfram Mathematica®โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

| ฟังก์ชัน | คำสั่งใน WolframAlpha |
|---|---|
| ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $F(m,\phi)$ แอมพลิจูด $\phi$ และโมดูลัส $m=k^2$ | EllipticF[$\phi$, m] |
| ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $K(m)$ | EllipticK[m] |
| ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $E(m,\phi)$ แอมพลิจูด $\phi$ และโมดูลัส $m=k^2$ | EllipticE[$\phi$, m] |
| ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สอง $E(m)$ | EllipticK[m] |
| ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สาม $\pi(m,n,\phi)$ แอมพลิจูด $\phi$ และโมดูลัส $m=k^2$ | EllipticPi[n, $\phi$, m] |
| ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สาม $\pi(m,n)$ | EllipticPi[n, m] |

# แบบฝึกหัดที่ 3.5

1. จงคำนวณค่าของปริพันธ์เชิงวงรีต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{15}\sin^2 x}}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,dx$

2. โดยใช้ความสัมพันธ์ $\sqrt{\cos x} = \cos\phi$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \sqrt{2}K(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

3. โดยใช้ความสัมพันธ์ $\sin^2\theta = \dfrac{1}{k^2}(1-k^2\sin^2\theta)$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{k^2}(K-E)$$

4. จงหาความยาวของเส้นรอบวงรีที่กำหนดดังสมการ $4x^2+9y^2=36$ โดยตอบในรูปของปริพันธ์เชิงวงรี

5. จงหาความยาวของส่วนโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของวงรีที่กำหนดโดย $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ โดยเส้นโค้งอยู่ระหว่างจุด $(0,2)$ และ $(1/2,\sqrt{3})$ (ตอบในรูปของปริพันธ์เชิงวงรี)

6. หากสังเกตปริพันธ์เชิงวงรี จะพบว่า ปริพันธ์เชิงวงรีก็เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง จงใช้วิธีการตรวจสอบที่ได้ศึกษามาแล้วแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้า

   (a) $\displaystyle E=\int_0^{a} \frac{\sqrt{a^2-k^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ เมื่อ $0<k<1$

   (b) $\displaystyle F=\int_0^{b} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ เมื่อ $b>1/k$

## 3.6 ปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบ

ในการคำนวณปริพันธ์หลายชั้นในแคลคูลัสพื้นฐาน เราคำนวณค่าของปริพันธ์หลายชั้นบนบริเวณปิดและมีขอบเขต ดังนั้น หากเราขยายนิยามของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตสู่ปริพันธ์หลายชั้น เราก็จะสามารถพิจารณานิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้ในทำนองคล้ายกัน

ในที่นี้เราจะเริ่มต้นพิจารณาจากตัวอย่างจากปัญหาการหาปริพันธ์สองชั้นในกรณีที่บริเวณของการหาปริพันธ์เป็นบริเวณที่ไม่มีขอบเขต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.6.1** จงหาค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

**วิธีทำ** จากปริพันธ์ที่กำหนดให้ เราทำการหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณซึ่งอยู่ในจตุภาคที่หนึ่ง ทั้งนี้ วิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้คือ การเปลี่ยนระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว (เราได้กล่าวในหัวข้อ 1.9) โดยสมมติให้ $x = r\cos\phi$ และ $y = r\sin\phi$ จะได้ว่า

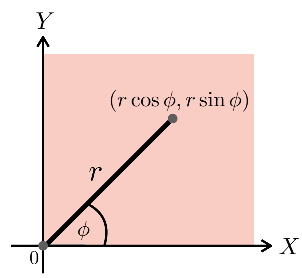
$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\phi$$

ทำให้ได้ว่า เราเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตได้ กล่าวคือ

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\phi = \lim_{M\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^M e^{-r^2} r\,dr\,d\phi$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^M e^{-r^2} r\,dr\,d\phi &= \lim_{M\to\infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2}\right) d\phi \\ &= \lim_{M\to\infty} \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$




**ภาพที่ 3.4.** บริเวณในการหาปริพันธ์ในตัวอย่าง

ซึ่งเราสามารถนำผลที่ได้ดังกล่าวไปประยุกต์กับการหาปริพันธ์ต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.6.2** จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**วิธีทำ** สมมติให้ $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ จากการเขียนปริพันธ์ดังกล่าวในรูปตัวแปรหุ่นได้ จะทำให้ได้ว่า $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$ ด้วย ดังนั้น

$$\begin{aligned}I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

เนื่องจากเราทราบว่า $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ จากตัวอย่าง 3.6.1 จึงได้ว่า $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ตามต้องการ

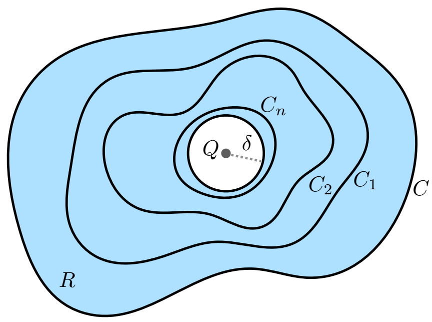
ต่อไปเราจะพิจารณานิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ในกรณีที่ขอบเขตของปริพันธ์เป็นขอบเขตปิด แต่มีจุดในบริเวณจำกัดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์

สมมติว่า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งต่อเนื่องทุก ๆ ในบริเวณ $R$ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งปิด $C$ ยกเว้นที่จุด $Q(x_0, y_0)$ ซึ่งทำให้ $f$ ไม่มีขอบเขต สัญลักษณ์

$$\int_R f(x, y)\, dS$$

โดยที่ $dS$ คือส่วนของพื้นที่ในบริเวณ $R$ จะเรียกว่า ปริพันธ์สองชั้นไม่ตรงแบบ (improper double integral)

ให้ $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ เป็นลำดับอนันต์ของเส้นโค้งในบริเวณ $R$ ซึ่งแต่ละเส้นโค้งปิดล้อมจุด $Q(x_0, y_0)$ และแต่ละเส้นโค้งซ้อนในซึ่งกันและกัน ดังภาพ 3.5




**ภาพที่** 3.5. ลำดับของเส้นโค้ง $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ ซึ่งเป็นบริเวณของการหาปริพันธ์ยกเว้นที่จุด $Q$

ให้ $R_n$ เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $C_n$ ซึ่ง $R_n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ นิยามบริเวณปิดซึ่งอยู่ด้านนอกของ $C_n$ และบริเวณภายในของ $C$ โดย $R - R_n$ เมื่อ $n = 1, 2, ...$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x, y)$ มีความต่อเนื่องบนบริเวณ $R - R_n$ และปริพันธ์ $\displaystyle\int_{R-R_n} f(x, y)\, dS$ มีค่าสำหรับทุก $n$

เพราะฉะนั้น หากลิมิต

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R-R_n} f(x, y)\, dS$$

มีค่าสำหรับการเลือก $R_n$ ใด ๆ แล้ว จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_R f(x, y)\, dS$ ลู่เข้า กล่าวคือ

> สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้
>
> $$\left| \int_{R'} f(x, y)\, dS \right| < \epsilon$$
>
> สำหรับทุกบริเวณย่อย $R'$ ของ $R$ ซึ่งไม่บรรจุย่านจุดเปิดจุด $Q$ ซึ่งรัศมี $\delta$

ทั้งนี้ วิธีการตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [12] และ [9]

# แบบฝึกหัดที่ 3.6

1. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$
2. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_0^3 \int_0^\infty \frac{y}{x^2+4}\,dx\,dy$
3. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_{4/3}^\infty \int_3^\infty \frac{1}{(xy-2)^2}\,dx\,dy$
4. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int_0^3 \int_0^\infty \frac{y}{x^2+4}\,dx\,dy$
5. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int\int_D \frac{1}{1+x+y}\,dA$ เมื่อ $D$ คือบริเวณที่กำหนดโดย $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < \infty, 0 < y < 1\}$
6. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\int\int_D 1 + \sin x \cos y\,dA$ เมื่อ $D$ เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง

*This page is intentionally left blank. หน้านี้ตั้งใจเว้นว่างไว้*

# บรรณานุกรม


[1] ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ (2556). แคลคูลัส: ผลบวกอนันต์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[2] สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[3] สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[4] อติชาต เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[5] Amazigo, J. C., & Rubenfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.

[6] Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.

[7] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis. 4th edition, NJ: Wiley.

[8] Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.

[9] Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley

[10] Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.

[11] Shifrin, T. (2005). Multivariable mathematics: linear algebra, multivariable calculus, and manifolds. John Wiley & Sons Inc.

[12] Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.

[13] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.

[14] Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.

[15] Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.

[16] Culham, J. R. Elliptic Integrals, Elliptic Functions and Theta Functions. Retrieved from http://www.mhtlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap3.pdf

[17] Conrad, K. (2018). Differentiating under the integral sign. Retrieved from https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf

[18] Hall, L. M. (1995). Special Functions: Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Retrieved from http://web.mst.edu/ lmhall/SPFNS/sfch3.pdf

[19] Wheeler, J. P. . Assigning Value to the Valueless... The Cauchy Principle Method and Related Ideas in Divergent Series. Retrieved from http://www.pitt.edu/ jwheeler/Principal%20Values.pdf

## ภาพปก

Tokyo Gate Bridge ถ่ายโดยผู้เขียนในวันที่ 24 มกราคม พ.ศ.2559
ขณะที่ผู้เขียนกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกที่ประเทศญี่ปุ่น
ในวันที่อากาศหนาวที่สุดในรอบ 40 ปี

Tokyo Gate Bridge เป็นสะพานที่เชื่อมระหว่างเกาะในย่านโอไดบะ
ซึ่งเป็นย่านที่ผู้เขียนชอบมากที่สุดในโตเกียว ผู้เขียนเลือกภาพนี้เป็นภาพปก
เนื่องจากกระบวนวิชาแคลคูลัสขั้นสูง เปรียบเสมือนสะพานและประตูเชื่อม
ระหว่างการเรียนคณิตศาสตร์ระดับพื้นฐานและคณิตศาสตร์ขั้นสูง